УДК 539.3

УДАР АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО СИСТЕМЕ «ПОЛУПРОСТРАНСТВО – ПЛАСТИНА ТИПА ТИМОШЕНКО»

Е. Ю. МИХАЙЛОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (НИУ);
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Исследуется процесс ударного воздействия абсолютно твердого тела (ударник) на упругое полупространство (основание) с покрытием в виде пластины типа Тимошенко. Контакт между ударником и покрытием, пластиной типа Тимошенко и основанием происходит в условиях свободного проскальзывания. Вектор начальной скорости абсолютно твердого тела нормален невозмущённой поверхности системы «полупространство – пластина».

Полупространство заполнено изотропной линейно-упругой средой параметрами Ламе $\lambda^{(o)}$, $\mu^{(o)}$. Нестационарное деформирование системы «полупространство – пластина типа Тимошенко» рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат Oxz. Ось z направлена вглубь основания, x – в плоскости $z = 0$, которая совпадает с невозмущенной поверхностью пластины.

Постановка задачи включает в себя:

– уравнение движения основания и покрытия

$$\Delta\varphi = \gamma_1^2\ddot{\varphi},\ \Delta\psi = \gamma_2^2\ddot{\psi},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial \tau^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2}\right) + p + \sigma_{330}^*,\ \sigma_{330}^* = \tilde{\beta}\sigma_{330},\ \sigma_{330} = \sigma_{33}\big|_{z=0},$$
$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} = \tilde{\alpha}^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \tilde{\gamma}_2^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \beta^2\left[\chi + \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x}\right]\right); \tag{2}$$

– соотношения, связывающие компоненты вектора перемещений с упругими потенциалами и компоненты тензоров напряжений с перемещениями

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z},\ w^{(o)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \tag{3}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa\frac{\partial w^{(o)}}{\partial z},\ \sigma_{33} = \frac{\partial w^{(o)}}{\partial z} + \kappa\frac{\partial u}{\partial x},\ \sigma_{22} = \kappa\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^{(o)}}{\partial z}\right),\ \eta^2\sigma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w^{(o)}}{\partial x}; \tag{4}$$

– уравнение движения ударника

$$m\ddot{h}(\tau) = R(\tau),\ R(\tau) = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} p\,dx; \tag{5}$$

– соотношение для определения радиуса области контакта

$$b(\tau) = f^{-1}(l - h); \tag{6}$$

– граничные условия между

- пластиной и полупространством

$$\sigma_{13}\big|_{z=0} = 0,\ w^{(p)}\big|_{z=0} = w^{(o)}\big|_{z=0}; \tag{7}$$

- ударником и покрытием

$$w^{(p)}(\tau, x) = f(x) + h(\tau) - l,\ |x| \le b(\tau); \tag{8}$$

– условия, заключающиеся в ограниченности упругих потенциалов в бесконечно удаленной точке

$$\varphi^{(k)} = O(1),\ \psi^{(k)} = O(1),\ z \to +\infty; \tag{9}$$

– начальные условия

$$\varphi\big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}\big|_{\tau=0}=0,\ \psi\big|_{\tau=0}=\dot{\psi}\big|_{\tau=0}=0,\ h\big|_{\tau=0}=0,\ \dot{h}\big|_{\tau=0}=V_0,\ \ \chi\big|_{\tau=0}=w^{(p)}\big|_{\tau=0}=0. \qquad (10)$$

Для решения задачи все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует безразмерным величинам):

$$x'=\frac{x}{L},\ z'=\frac{z}{L},\ l'=\frac{l}{L},\delta'=\frac{\delta}{L},\ h'=\frac{h}{L},\tau=\frac{c_1^{(o)}t}{L},\ u'=\frac{u}{L},\ w^{(n)\prime}=\frac{w^{(n)}}{L}\ (n=o,p),\ \varphi'=\frac{\varphi}{L^2},\tilde{\beta}=\frac{L\rho^{(o)}}{\delta\rho^{(p)}},$$

$$\psi'=\frac{\psi}{L^2},\ \sigma'_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\lambda^{(o)}+2\mu^{(o)}},\ p'=\frac{pL}{\delta\rho^{(p)}c_1^{(o)2}},\ \beta^2=\frac{12k^2L^2}{\delta^2},\ \alpha^2=k^2\tilde{\gamma}_2^{(p)2},\ \tilde{\alpha}^2=\frac{1}{c_1^{(o)2}}\frac{\lambda^{(p)}+\mu^{(p)}}{\rho^{(p)}},\ b'=\frac{b}{L}, \qquad (11)$$

$$\tilde{\gamma}_m^2=\frac{c_m^{(p)2}}{c_1^{(o)2}},\ \gamma_m^2=\frac{c_1^{(o)2}}{c_m^{(o)2}}(m=1,2),\ \eta=\frac{c_1^{(o)}}{c_2^{(o)}},\ \ \kappa=\frac{\lambda^{(o)}}{\lambda^{(o)}+2\mu^{(o)}},\ R'=\frac{R}{\delta\rho^{(p)}c_1^{(o)2}},\ m'=\frac{m}{\delta L\rho^{(p)}},$$

где t – время; h – глубина погружения ударника; l – расстояние от центра масс до лобовой точки тела; δ – толщина пластины; L – некоторый линейный размер; m – масса ударника; R – погонная контактная сила; b – радиус границы области контакта; $\rho^{(n)}$; φ, ψ; u, $w^{(n)}$; $c_1^{(n)}$, $c_2^{(n)}$; σ_{ij}; $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ – плотность, потенциалы упругих смещений, тангенциальные(вдоль оси x) и нормальные (вдоль оси z) перемещения, скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига, компоненты тензора напряжений, параметры Ламе. Здесь верхний индекс $n = p, o$ обозначает величины, относящиеся к покрытию и полупространству соответственно. В дальнейшем везде штрих в обозначении безразмерных величин опускаем.

Соответствующую систему уравнений для решения задачи запишем в следующем виде

$$G^{(o)}**\sigma_{330}-\tilde{\beta}\cdot G^{(p)}**\sigma_{330}=G^{(p)}**p,G^{(p)}**p=\tilde{w}^{(p)},\ \tilde{w}^{(p)}(\tau,x)=f(x)+h(\tau)-l,$$

$$h(\tau)=\int_0^\tau V(t)dt,\ b(\tau)=f^{-1}(l-h(\tau)),\ mV(\tau)=\int_0^\tau R(t)dt,\ R(\tau)=\int_{-b(\tau)}^{b(\tau)}pdx. \qquad (12)$$

Первое (основное) уравнение формулы (12) вытекает из равенства нормальных перемещений полупространства и пластины (7) и базируется на принципе суперпозиции.

Здесь $w^{(o)}\big|_{z=0}=G^{(o)}*\sigma_{330}$, $w^{(p)}\big|_{z=0}=G^{(p)}*\left(p+\tilde{\beta}\cdot\sigma_{330}\right)$, где $G^{(o)},G^{(p)}$ – функции влияния для основания и покрытия, представляющие собой нормальные перемещения пластины и полупространства при нулевых начальных условиях и давлении вида $p=\delta(\tau)\delta(x)$, заданном на поверхности основания и покрытия соответственно. При этом в формуле (12) $\tilde{w}^{(p)}$ являются нормальными перемещениями пластины при воздействии на нее ударника без учета влияния полупространства и определяются граничными условиями (8).

Для системы разрешающих уравнений строится ее дискретный аналог. С использованием численноаналитического аналога, основанного на методе квадратур, получаем графики зависимостей контактных напряжений, которые возникают между слоем и абсолютно твердым телом, а также нормальные перемещения поверхности системы в зависимости от времени и координаты. В качестве ударника рассмотрены круговой, эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01099 А).

Список литературы

1 **Mikhailova, E. Yu.** Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. P. 239–247.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Нестационарное деформирование системы «полупространство-мембрана» / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2022. – № 123. – URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165348.

3 **Горшков, А. Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский. – М. : Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

4 **Михайлова, Е. Ю.** Воздействие нестационарной нагрузки на систему «полупространство – пластина типа Тимошенко» / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А. Г. Горшкова : материалы XXVIII Междунар. симп. – М., 2022. – Т. 2. – С. 80–82.