УДК 539.3

УДАР АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ С ПОКРЫТИЕМ В ВИДЕ УПРУГОГО СЛОЯ.

Е. Ю. МИХАЙЛОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (НИУ);
НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Исследуется напряжённо-деформированное системы «полупространство- упругий слой» (основание) при ударе по ней абсолютно твердым телом (ударником). Вектор начальной скорости, с которой движется ударник, совпадает с направлением оси z и ортогонален невозмущённой поверхности основания. Контакт между абсолютно твердым телом и системой «полупространство – упругий слой» происходит в условиях свободного проскальзывания. Взаимодействие между покрытием и полупространством рассматривается в двух вариантах: а) в условиях жесткого сцепления; б) свободного проскальзывания.

Для решения данной задачи все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрихи обозначают безразмерные величины):

$$x' = \frac{x}{L},\ z' = \frac{z}{L},\ \tau = \frac{c_1^{(c)}t}{L},\ \varphi'^{(k)} = \frac{\varphi^{(k)}}{L^2},\ \psi'^{(k)} = \frac{\psi^{(k)}}{L^2},\ h' = \frac{h}{L},\ u'^{(k)} = \frac{u^{(k)}}{L},\ w'^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{L},$$

$$\sigma_{ij}'^{(k)} = \frac{\sigma_{ij}^{(k)}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}},\ \eta^{(k)} = \frac{c_1^{(k)}}{c_2^{(k)}},\ \kappa^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}} = 1 - \frac{2}{\eta^{(k)2}}\ \ (k = c, p), \tag{1}$$

$$\delta' = \frac{\delta}{L},\ b' = \frac{b}{L},\ R' = \frac{R}{\lambda^{(c)} + 2\mu^{(c)}},\ m' = \frac{m}{L\rho^{(c)}},\ \gamma_n^{(k)} = \frac{c_1^{(c)}}{c_n^{(k)}}\ \ (n = 1, 2),$$

где t – время; h – глубина погружения ударника; δ – толщина слоя; L – некоторый линейный размер; m – масса ударника; R – погонная контактная сила; b – радиус границы области контакта; $\rho^{(k)}$; $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$; $u^{(k)}$, $w^{(k)}$; $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}$; $\sigma_{ij}^{(k)}$; $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ – плотность, потенциалы упругих смещений, тангенциальные(вдоль оси x) и нормальные (вдоль оси z) перемещения, скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига, компоненты тензора напряжений, параметры Ламе. Здесь верхний индекс $k = c, p$ обозначает величины, относящиеся к слою и полупространству соответственно. В дальнейшем везде штрих в обозначении безразмерных величин опускаем.

Математическая модель, описывающая нестационарный процесс деформирования основания под действием абсолютного твердого тела, включает в себя:

– уравнения движения упругой среды

$$\gamma_1^{(k)2}\ddot{\varphi}^{(k)} = \Delta\varphi^{(k)},\ \gamma_2^{(k)2}\ddot{\psi}^{(k)} = \Delta\psi^{(k)},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{2}$$

– соотношения для покрытия, связывающие компоненты вектора перемещений с упругими потенциалами и компоненты тензоров напряжений с перемещениями,

$$u^{(k)} = \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial z},\ w^{(k)} = \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial x}; \tag{3}$$

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \kappa^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z},\ \sigma_{33}^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} + \kappa^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x},$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = \kappa^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z}\right),\ \eta^{(k)2}\sigma_{13}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}; \tag{4}$$

– граничные условия между:

1) покрытием и полупространством:

а) жесткое сцепление

$$u^{(c)}\Big|_{z=-\delta}=u^{(p)}\Big|_{z=-\delta},\ w^{(c)}\Big|_{z=-\delta}=w^{(p)}\Big|_{z=-\delta}; \tag{5}$$

б) свободное проскальзывание

$$\sigma_{13}^{(k)}\Big|_{z=-\delta}=0\ (k=c,p),\ w^{(c)}\Big|_{z=-\delta}=w^{(p)}\Big|_{z=-\delta}; \tag{6}$$

2) ударником и основанием:

$$w^{(c)}(\tau,x)=f(x)+h(\tau)-l\quad,\ |x|\le b(\tau), \tag{7}$$

где $f(x)$ – граница ударника; l – расстояние от центра масс до лобовой точки ударника

– условия, заключающиеся в отсутствии возмущений в бесконечно удаленной точке,

$$\varphi^{(k)}=O(1),\ \psi^{(k)}=O(1),\ z\to+\infty; \tag{8}$$

– уравнение движения ударника

$$m\ddot{h}(\tau)=R(\tau),\ R(\tau)=\int\limits_{-b(\tau)}^{b(\tau)}p\,dx; \tag{9}$$

– соотношение для определения радиуса пятна контакта

$$b(\tau)=f^{-1}(l-h); \tag{10}$$

– начальные условия

$$\varphi^{(k)}\Big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}^{(k)}\Big|_{\tau=0}=0,\ \psi^{(k)}\Big|_{\tau=0}=\dot{\psi}^{(k)}\Big|_{\tau=0}=0\ k=(c,\ p),\ h\Big|_{\tau=0}=0,\ \dot{h}\Big|_{\tau=0}=V_0. \tag{11}$$

Для решения задачи строится система функциональных уравнений, имеющая вид

$$\begin{gathered}w^{(c)}(x,\tau)=G**p,\ w^{(c)}(\tau,x)=f(x)+h(\tau)-l,\ h(\tau)=\int\limits_0^{\tau}V(t)dt,\\ b(\tau)=f^{-1}\big(l-h(\tau)\big),\ mV(\tau)=\int\limits_0^{\tau}R(t)dt,\ R(\tau)=\int\limits_{-b(\tau)}^{b(\tau)}p\,dx,\end{gathered} \tag{12}$$

где G – функция влияния для системы «полупространство – покрытие», представляющая собой нормальные перемещения верхней поверхности упругого слоя. Так как рассматриваются два условия взаимодействия слоя и полупространства ((5), (6)), то получаются две системы уравнений (12), отличающихся друг от друга функциями влияния для основания.

Функции G являются решением краевой задачи (2)–(6) с однородными начальными условиями (11) при задании на границе z = 0 мгновенного нормального давления p = $\delta(\tau)\delta(x)$. Для нахождения функций влияния применяются преобразования Лапласа по времени и Фурье по координате.

В результате решения задачи получены графики зависимостей контактных напряжений, возникающих между слоем и абсолютно твердым телом, а также нормальные перемещения поверхности системы в зависимости от времени и координаты. В качестве ударника рассмотрены круговой, эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01099 А).

Список литературы

1 **Mikhailova, E. Yu.** Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E.Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239–247.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Нестационарное деформирование системы «полупространство – мембрана» / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2022. – № 123. – URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165348.

3 **Горшков, А. Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский. – М. : Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

4 Функция влияния для упругого полупространства с покрытием типа мембраны / Е. Ю. Михайлова [и др.] // Проблемы безопасности на транспорте : материалы IX Междунар. науч.-практ. конф. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Ч. 2. – С. 259–261.