ным направлениям. Первое связано с симметричными точками и построением на *n*-арной группе специальных фигур аффинной геометрии, обладающих заданными свойствами [13], а второе изучает свойства различных последовательностей векторов *n*-арных групп [14].

Приведенные ниже результаты примыкают ко второму направлению исследований.

В частности, приведенные в формулировке теоремы равенства являются векторными аналогами понятия самосовмещения произвольного элемента $p \in A$ относительно последовательности вершин соответствующих четырехугольников, построенных на полуабелевой *n*-арной группе *A*.

Отметим, что используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [13].

Приведем полученный результат.

Теорема. Пусть *A* – полуабелева *n*-арная группа. Если *a*, *b*, *c* – произвольные точки из *A*, а *d* – такая точка из *A*, что четырёхугольник <*a*, *b*, *c*, *d*> – параллелограмм *A*, то справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)c} + \overrightarrow{S_c(S_d(p))S_c(b)} + \overrightarrow{S_{S_c(b)}(S_c(S_d(p)))S_d(a)} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{pb} + \overrightarrow{S_b(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_b(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_b(p)))c} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))S_d(a)} = \vec{0}.$$

Список литературы

1 **Vakarelov, D.** Ternary groups / D. Vakarelov // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. 1966/67. – Vol. 61. – P. 71–105.

2 **Русаков, С. А.** Некоторые приложения теории n-арных групп / С. А. Русаков. – Минск, 1998.

3 **Dudek, W. A.** Ternary quasigroups connected with the affine geometry / W. A. Dudek // Algebras, Groups and Geometries. – 1999. – Vol. 16. – P. 329–354.

4 **Dudek, W. A.** On Rusakovs n-ary rs-groups / W. A Dudek, N. A Stojakovic // Czechoslovak Math. J. – 2001. – Vol. 51 (126). – P. 275–283.

5 **Kulazhenko, Yu. I.** Geometry of semiabelian n-ary groups / Yu. I. Kulazhenko // Quasigroups and Related Systems. – 2011. – Vol. 19. – P. 265–278.

6 **Prufer, H.** Theorie der Abelschen Gruppen I. Grundeigenschaften / H. Prufer // Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 165–187.

7 **Certain, J.** The ternary operation $(abc)=ab^{-1}c$ of a group / J. Certain // Bull. Amer. Math. soc. –1943. – Vol. 49. – P. 869–877.

8 **Baer, R.** Linear algebra and projective geometry / R. Baer. – New York : Academic Press, 1952. – 336 p.

9 **Brănzel, D.** Structures affines et operations ternaries / D. Brănzel // An. Sti. Iniv. Iasi, sect. I a Mat. – 1977. – Vol. 23. – P. 33–38.

10 **Dornte, W**. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

11 **Post, E. L.** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. − 1940. − Vol. 48, no 2. − P. 208−350.

12 **Русаков С. А.** Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С. А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1992. – 264 с.

13 **Кулаженко, Ю. И.** Полиадинамические операции и их приложения : [монография] / Ю. И. Кулаженко. – Минск : БГУ, 2014. – 311 с.

14 **Kulazhenko, Yu. I.** Semi-cummutativity criteria and self-coincidence of elements expressed by vectors properties of n-ary groups / Yu. I. Kulazhenko // Algebra and Discrete Math. – 2010. – Vol. 9, no 2. – P. 98–107.

УДК 539.374

ЗАДАЧА О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Е. А. ЛАЧУГИНА

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

За последние годы слоистые элементы конструкций получили широкое применение в народном хозяйстве, включая строительство и машиностроение. Это обусловливает требование по созданию расчетных механико-математических моделей, учитывающих как квазистатический, так и динамический характер нагрузок. В связи с этим исследование свободных колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным. Методы расчета и постановки краевых задач для слоистых элементов конструкций рассмотрены в работах [1–17].

Здесь для симметричной по толщине упругой круговой пятислойной пластины с жестким заполнителем приведены уравнения движения в перемещениях. Вывод уравнений движения проведен в цилиндрической системе координат r, φ, z, которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе учитывается работа касательных напряжений.

Радиальные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ выражаются через две искомые функции: $w(r)$ – прогиб пластины и $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителях. В результате

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)}=-zw,_r+h_3\psi, \quad (0,5h_1+h_3\le z\le 0,5h_1+h_3+h_2)\,,$$

$$u_r^{(1)}=-zw,_r\,, \quad (-0,5h_1\le z\le 0,5h_1)\,,$$

$$u_r^{(2)}=-zw,_r-h_3\psi, \quad (-0,5h_1-h_3-h_2\le z\le -0,5h_1-h_3)\,,$$

– в заполнителе 3, 5

$$u_r^{(5)}=-zw,_r+(z-0,5h_1\psi), \quad (0,5h_1\le z\le 0,5h_1+h_3)\,,$$

$$u_r^{(3)}=-zw,_r+(z+0,5h_1\psi), \quad (-0,5h_1-h_3\le z\le -0,5h_1)\,.$$

где $w(r, t)$ – прогиб пластины, $\psi(r, t)$ – относительные сдвиги в заполнителях; z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ: $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = r_0$). Рассматривается осесимметричная задача, поэтому тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а искомые прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ не зависят от координаты φ.

Уравнения движения пластины выводятся при помощи вариационного принципа Гамильтона – Остроградского:

$$L_2(a_4\psi-a_5w,_r)-2h_3G_3\psi=0\,, \quad L_3(a_5\psi-a_6w,_r)-M_0\ddot{w}=0,$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы,

$$L_2(g)\equiv\left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r\equiv g,_{rr}+\frac{g,_r}{r}-\frac{g}{r^2}\,,\ L_3(g)\equiv\frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r\equiv g,_{rrr}+\frac{2g,_{rr}}{r}-\frac{g,_r}{r^2}+\frac{g}{r^3};$$

$M_0\ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3)r_0^2$; a_i – коэффициенты

$$a_4=\left[2K_2^{+}\ h_2h_3^2+2K_3^{+}\frac{h_3^3}{3}\right],\ a_5=\left[K_2^{+}h_2h_3(h_1+2h_3+h_2)+2K_3^{+}h_3\left(\frac{h_1h_3}{4}+\frac{h_3^2}{3}\right)\right],$$

$$a_6=\left[2K_2^{+}h_2\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_2}{2}+h_1h_3+\frac{h_2^2}{3}+h_2h_3+h_3^2\right)+K_1^{+}\frac{h_1^3}{12}+2K_3^{+}h_3\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_3}{2}+\frac{h_3^2}{3}\right)\right],$$

$$a_7=\left[2K_2^{-}h_2\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_2}{2}+h_1h_3+\frac{h_2^2}{3}+h_2h_3+h_3^2\right)+K_1^{-}\frac{h_1^3}{12}+2K_3^{-}h_3\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_3}{2}+\frac{h_3^2}{3}\right)\right],$$

$$K_k+\frac{4}{3}G_k\equiv K_k^{+},\ K_k-\frac{2}{3}G_k\equiv K_k^{-}\,,$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования.

Начальные условия движения принимаются однородные

$$w(r,0)=0, \quad \dot{w}(r,0)=0\,.$$

На шарнирно опертом контуре принимается наличие жесткой диафрагмы, не позволяющей относительный сдвиг слоев, поэтому при $r=r_0$ должны выполняться кинематические условия

$$u=\psi=w=0, \quad M_r=\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_r^{(k)}z\,dz=0\,,$$

где $\sigma_r^{(k)}$ – радиальное напряжение; M_r – изгибающий момент.

Список литературы

1 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : МАИ, 2016. – 184 с.

3 **Kuznetsova, E. L.** Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Vol. 12, Spec. is. – 2020. – P. 79–90.

4 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

5 **Gorshkov, A. G.** Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, no 9. – P. 1196–1203.

6 **Горшков, А. Г.** Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

7 **Fedotenkov, G. V**. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no 4. – P. 439–447.

8 **Вестяк, В. А.** Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – Т. 46, № 2. – С. 130–140.

9 **Tarlakovskii, D. V**. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2015.– Vol. 46, no. 5. – P. 779–787.

10 **Старовойтов, Э. И.** Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

11 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.

12 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 80–87.

13 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.

14 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 165–171.

15 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.

16 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 246–252.

17 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.

УДК 539.3

ТЕПЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Д. В. ЛЕОНЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Многослойные стержни, пластины и оболочки широко применяются в транспортном машиностроении, строительстве, авиа- и ракетостроении. Исследованию поведения этих конструкций посвящено множество научных работ. Достаточно хорошо исследовано поведение гладких конструкций. Ранее в статье [1] решена задача о колебаниях круговых пластин на двухпараметрическом основании. Задачи термоупругости однослойных элементов конструкций рассмотрены А. Д. Коваленко в монографии [2]. Статическое нагружение трехслойного стержня исследовано в [3], при действии температурного поля – в [4, 5] В работе [6] исследована сэндвич-пластина с нерегулярной границей при отсутствии температурного воздействия. Здесь рассмотрена подобная пластина при действии термосиловой нагрузки.

Пластина круглой формы состоит из трех слоев. Несущие слои равной толщины ($h_{1l} = h_{2l} = h_l$) могут изменяться вдоль радиуса пластины ступенчато. На внешнюю поверхность пластины перпендикулярно первому несущему слою действует тепловой поток интенсивностью q_t и внешняя силовая нагрузка q_l. За искомые величины принимаются прогиб пластины $w_l(r)$ и относительный сдвиг в заполнителе $\psi_l(r)$ на каждом участке l, которые не зависят от окружной координаты φ.