дель Тимошенко. На внешнюю поверхность первого несущего слоя пластины действует поперечная осесимметричная нагрузка, которая не зависит от координаты φ: $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R и прогиба $w(r)$ принимается согласно модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w(r) + t_f \Delta w(r),$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига основания; Δ – оператор Лапласа.

За искомые величины принимаются: прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$, радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$.

Система уравнений равновесия в перемещениях выводится из вариационного принципа Лагранжа. Согласно методу упругих решений, перепишем ее в итерационном виде:

$$L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w,_r^{(n)}) = p_\omega^{(n-1)},$$
$$L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w,_r^{(n)}) = h_\omega^{(n-1)},$$
$$L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w,_r^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} = -q + q_\omega^{(n-1)}, \quad (1)$$

где a_i – коэффициенты, учитывающие термомеханические и геометрические характеристики слоев; $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения; n – номер приближения.

Разработан приближенный метод решения системы уравнений (1), основанный на методе упругих решений Ильюшина. Получено рекуррентное решение задачи об термоупругопластическом изгибе круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака. Выполнен численный параметрический анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (*проект № Т22М-072*).

Список литературы

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

3 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

4 **Козел, А. Г.** Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А. Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37.

5 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

6 **Козел, А. Г.** Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

УДК 539.374

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СВОЙСТВ ПОЛЗУЧЕСТИ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ПОДЗЕМНОГО СООРУЖЕНИЯ

Е. Я. КОЗЛОВСКИЙ. М. А. ЖУРАВКОВ
Белорусский государственный университет, г. Минск

Массивам соляных пород, вмещающим подземные сооружения, свойственны деформации, которые нарастают в очень длительном интервале времени и могут иметь нестационарные стадии. При анализе данных мониторинга за выработками на глубине 1100–1200 м авторами отмечено асимметричное деформирование контура. Так, смещения противоположных стенок могли различаться более чем в 2 раза. Однако анализ исходных данных указывал на однородность без каких-либо предпосылок к такой разнице смещений.

По данным мониторинга определялись параметры модели ползучести путем решения обратных задач. Согласно принятому подходу полные относительные деформации ε состоят из независимых от времени упругих ε^{el} и пластических ε^{pl} деформаций, а также развивающихся во времени деформаций ползучести ε^{cr}. Для описания независимого от времени пластического поведения соляных пород была использована модель Мора – Кулона с поверхностью f_{MC}. Деформации ползучести описываются комбинацией эмпирических законов Нортона и Нортона – Бейли [3, 4]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{cr},$$
$$f_{MC}(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin(\varphi) + \sqrt{J_2}\left(\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)\sin(\varphi)}{\sqrt{3}}\right) - c\ \cos(\varphi),$$
$$\varepsilon_{cr} = C_1 \sigma_e^{C_2} t^{C_3} + C_4 \sigma_e^{C_5} t,$$

где φ – угол внутреннего трения; c – сцепление; C_i – параметры модели ползучести; σ_e – интенсивность напряжений; t – время.

Поскольку породный массив на рассматриваемом участке не имеет существенных возмущений в природном НДС [1] или изменчивости условно-мгновенных механических характеристик [2, 8, 9], было сделано предположение, что параметры закона ползучести являются некоторыми случайными функциями координат. Поскольку коэффициенты C_2, C_3 и C_5 являются степенными коэффициентами, чрезвычайно сложно включить их как функции пространственных переменных, т. к. их значение напрямую влияет на коэффициенты C_1 и C_4. Но было обнаружено, что коэффициенты C_2, C_3 и C_5 имеют весьма близкие численные значения для всех случаев и согласуются с диапазонами значений, описанными многими авторами [11]. Поэтому их значения принимались как фиксированные.

Значения коэффициента C_1 хорошо описываются усеченным нормальным распределением, а коэффициента C_4 – логнормальным распределением. Эти распределения были взяты в качестве исходных данных для проведения дальнейшего стохастического анализа.

Для решения стохастической задачи генерировались случайные автокоррелированные поля для коэффициентов C_1 и C_4 с использованием квази-изотропной функции корреляции Маркова [14–16]:

$$\rho(\tau_x, \tau_y) = \exp\left[-\frac{2|\tau_x|}{\theta_x} - \frac{2|\tau_y|}{\theta_y}\right],$$
$$\rho(\tau) = \exp\left[-\frac{2\tau}{\theta}\right],$$

где θ – длина корреляции; τ – расстояние.

Для случая незакрепленной выработки результаты анализировались по восьми равномерно расположенным точкам на контуре выработки, оценка производилась по неравномерности радиальных перемещений и вычислялась на таких «виртуальных реперах» с шагом 2 (δ_{90}, под углом 90°) и 4 (δ_{180}, под углом 180°) как максимальное отношение:

$$\delta_{90} = \max\left[\frac{u_i}{u_{2+i}}, \frac{u_{2+i}}{u_i}\right] - 1,$$
$$\delta_{180} = \max\left[\frac{u_i}{u_{4+i}}, \frac{u_{4+i}}{u_i}\right] - 1,$$

где u_i – радиальные перемещения.

Было обнаружено, что обе величины, δ_{90} и δ_{180}, имеют схожие логнормальные распределения. С кумулятивной вероятностью 95 % коэффициент неравномерности имеет максимальные значения $\delta_{90}^{0,95} = 70$ % и $\delta_{180}^{0,95} = 110$ %.

Согласно результатам стохастического анализа усилия в крепи жесткого типа имеют распределение напряжений, близкое к нормальному, что позволяет выполнять дальнейшее проектирование.

При использовании за жесткой крепью податливого слоя возникает эффект точечного нагружения [5–7, 10, 12]. Этот эффект при взаимодействии породы с конструкцией приводит к возникновению значительных возмущений в НДС крепи. Результаты для таких слоев имеют большой разброс и близки к равновероятным, поэтому распределение можно считать равномерным.

Показанный подход может быть использован для прогнозирования и количественной оценки неоднородностей нагрузки в аналогичных условиях при строительстве новых дополнительных стволов при наличии данных мониторинга на площадке [13].

Список литературы

1 **Бельтюков, Н. Л.** О механизме проявления эффекта Кайзера в осадочных горных породах / Н. Л. Бельтюков // Стратегия и процессы освоения георесурсов : сб. науч. тр. – Пермь : ГИ УрО РАН, 2015. – Вып. 13. – С. 102–104.

2 Волновая динамика неоднородных и нелинейных структур с приложением к геомеханике и биомеханике : монография / А. В. Борисов [и др.] ; общ. ред. А. В. Чигарева. – Смоленск : Универсум, 2015. – 431 с.

3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

4 **Журавков, М. А.** Численное моделирование реологических процессов при недостаточном количестве реологических констант / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 79–85.

5 **Казикаев, Д. М.** Диагностика и мониторинг напряженного состояния крепи вертикальных стволов / Д. М. Казикаев, С. В. Сергеев. – М. : Горная книга, 2011. – 244 с.

6 **Ко́зел, А. М.** Геомеханические вопросы проектирования и поддержания шахтных стволов. Книга 1. Условия поддержания, состояние, виды и причины деформаций вертикальных стволов / А. М. Ко́зел. – СПб. : Недра, 2001. – 216 с.

7 **Потапова, О. А.** Несущая способность тоннельных обделок при случайном расположении заобделочных пустот : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.15 / О. А. Потапова. – М. : 2000. – 210 с.

8 **Чигарев, А. В.** Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А. В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 425 с.

9 **Шашенко, А. Н.** Некоторые задачи статистической геомеханики / А. Н. Шашенко, С. Б. Тулуб, Е. А. Сдвижкова. – Киев : Пульсари, 2002. – 302 с.

10 **Auld, F. A.** Design and construction of deep shaft concrete linings in the UK / F. A. Auld // Shaft Design and Construction 4th International Conference. – 2019. – Vol. 20, no. 12. – P. 1–11.

11 **Hou, Z.** Untersuchungen zum Nachweis der Standsicherheit für Untertagedeponien im Salzgebirge : Dissertation ... Doktoringenieurs / Z. Hou. – TU Clausthal, 1998. – 387 p.

12 **Jia, Y. D.** Numerical modelling of shaft lining stability at deep mine / Y. D. Jia, R. Stace, A. Williams // Mining Technology. – 2013. – Vol. 122, no. 1. – P. 8–19.

13 **Kazlouski, J.** Study of sylvinite heterogeneous creep characteristics and their influence on the shaft stability / J. Kazlouski, M. A. Zhuravkov, S. I. Bogdan / // The Mechanical Behavior of Salt X. – Utrecht : CRC Press/Balkema, 2022. – P. 519–529.

14 **Phoon, K.-K.** Characterization of geotechnical variability / K.-K. Phoon, F. H. Kulhawy // Canadian Geotechnical Journal. – 1999. – Vol. 36, no. 4. – P. 612–624.

15 Probabilistic Analysis of a Rock Salt Cavern with Application to Energy Storage Systems / E. Mahmoudi [et al.] // Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2017. – Vol. 50. – P. 139–157.

16 Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering : International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures / ed. by D. V. Griffiths, G. A. Fenton. – Springer Vienna, 2007. – Vol. 491. – 346 p.

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ МЕРИДИАНА ПРИ СТАТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Е. А. КОРОВАЙЦЕВА
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
г. Москва, Российская Федерация

Постановка задачи статического деформирования мягкой оболочки вращения описывается системами квазилинейных дифференциальных и нелинейных алгебраических уравнений, в векторно-матричной форме имеющих вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

где $\mathbf{y}$ – вектор разрешающих переменных задачи; $\mathbf{f}$ – вектор-функция из n компонент правых частей разрешающей системы уравнений; $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор-функция нелинейных дополнительных алгебраических соотношений; z – вектор дополнительных переменных, т. е. переменных, которые не входят под знак производной в дифференциальных уравнениях задачи, а рассчитываются по алгебраическим соотношениям; $\boldsymbol{\mu}$ - вектор-функция исходных значений параметров задачи; $\mathbf{q}$ – вектор-функция заданных обобщенных распределенных нагрузок.

Соотношения (1), (2) дополняются граничными условиями,