$$\int_0^\tau \left[1+A_{11}(\tau-t)\right]\frac{\partial f_{11}^*(t)}{\partial t}dt+\int_0^\tau A_{12}(\tau-t)\frac{\partial f_{12}^*(t)}{\partial t}dt=F_1(\tau),$$

$$\int_0^\tau A_{21}(\tau-t)\frac{\partial f_{11}^*(t)}{\partial t}dt+\int_0^\tau \left[1+A_{22}(\tau-t)\right]\frac{\partial f_{12}^*(t)}{\partial t}dt=F_2(\tau),$$

$$a_{11}(\tau-t)=\frac{2}{R_1}(c_{12}-1)G_{111}(R_1,\tau-t)+1,\quad a_{12}(\tau-t)=\frac{2}{R_1}(c_{12}-1)G_{112}(R_1,\tau-t),$$

$$a_{21}(\tau-t)=2(c_{12}-1)G_{111}(R_1,\tau-t),\quad a_{22}(\tau-t)=2(c_{12}-1)G_{112}(R_1,\tau-t)+1.$$

$$F_1(\tau)=-\frac{2}{R_1}(c_{12}-1)\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^\tau\int_{R_1}^1 G_{1m}(R_1,\xi,t)F_m(\xi,\tau-t)dtd\xi,\quad \forall R_1\le\xi\le 1,$$

$$F_2(\tau)=-2(c_{12}-1)\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{N+1}\int_0^\tau\int_{R_1}^1 G_{q+1,m}(1,\xi,t)F_m(\xi,\tau-t)dtd\xi,\quad A_{ij}(\tau)=\int_0^\tau a_{ij}(\zeta)d\zeta,\quad (i,j=1,2),\qquad (5)$$

Соотношения (5) представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода, решение которой ищется численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников. Подставляя решение системы (5) в соотношения (4), получаем решение исходной задачи.

Список литературы

1 **Deswal, S.** Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction / S. Deswal, K. K. Kalkal, S. S. Sheoran // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.

2 **Aouadi M.** A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion / M. Aouadi // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.

3 **Зверев Н. А.** Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 2. – С. 156–167.

4 **Zemskov, A.V.** Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer / A.V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, no 1. – P. 36–41.

УДК 539.3, 539.8

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНОДИФФУЗИЯ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ

А. В. ЗЕМСКОВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ); НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины Тимошенко, находящейся под действием распределенного по поверхности механического давления (рисунок 1).

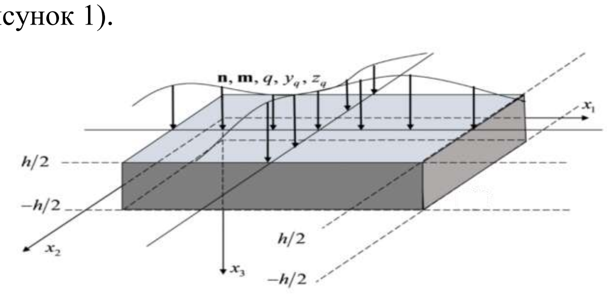

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений поперечных колебаний ортотропной прямоугольной пластины, полученная в работе [1]:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\chi}_1=\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x_1^2}+C_{66}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x_2^2}+C_{55}k_T^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\chi_1\right)+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_1^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_1}-\frac{12}{h^3}m_1,\\
\ddot{\chi}_2=C_{66}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1^2}+C_{22}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_2^2}+C_{44}k_T^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-\chi_2\right)+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x_1\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_2^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_2}-\frac{12}{h^3}m_2,\\
\ddot{w}=C_{55}k_T^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}\right)+C_{44}k_T^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}\right)+\frac{q}{h},\quad H_{N+1}=-\sum_{q=1}^{N}H_q,\\
\dot{H}_q+\tau_q\ddot{H}_q=\left(D_1^{(q)}\frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2}+D_2^{(q)}\frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2}\right)+\Lambda_{11}^{(q)}\frac{\partial^3\chi_1}{\partial x_1^3}+\Lambda_{12}^{(q)}\frac{\partial^3\chi_2}{\partial x_1^2\partial x_2}+\Lambda_{21}^{(q)}\frac{\partial^3\chi_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\Lambda_{22}^{(q)}\frac{\partial^3\chi_2}{\partial x_2^3}+\frac{12}{h^3}z_q.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь точки обозначают производную по времени. Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
x_i=\frac{x_i^*}{l};\ w=\frac{w^*}{l};\ \tau=\frac{Ct}{l};\ C_{ij}=\frac{C_{ij}^*}{C_{11}^*};\ C^2=\frac{C_{11}^*}{\rho};\ l_m=\frac{l_m^*}{l};\ \tau_q=\frac{C\tau^{(q)}}{l};\ m_i=\frac{m_i^*}{C_{11}^*};\\
\alpha_i^{(q)}=\frac{\alpha_i^{*(q)}}{C_{11}^*};\ D_i^{(q)}=\frac{D_i^{*(q)}}{Cl};\ \Lambda_{ij}^{(q)}=\frac{m^{(q)}D_i^{*(q)}\alpha_j^{*(q)}n_0^{(q)}}{\rho RT_0Cl};\ q=\frac{q^*}{C_{11}^*};\ z_q=\frac{lz^{(q)}}{C};\ h=\frac{h^*}{l},
\end{gathered}
$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; w^* – прогибы пластины; χ_i – углы поворота нормальных к срединной поверхности волокон; l – характерный линейный размер; l_1^* и l_2^* – длина и ширина пластины; h^* – толщина пластины; $\eta^{(q)}$ – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды, $\eta^{(q)}=x_3H_q$; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q-го вещества; C_{ij}^* – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_i^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_i^{*(q)}$ – коэффициенты диффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; m_i^* – распределенные по поверхности моменты; q^* – распределенная по поверхности поперечная нагрузка; $z^{(q)}$ – распределённая по поверхности плотность объемных источников массопереноса; k_T – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению пластины.

Замыкают постановку однородные начально-краевые условия, которые в случае шарнирного опирания, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\left.\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_q\right)\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_q\right)\right|_{x_1=l_1}=0,\\
\left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_2^{(q)}H_q\right)\right|_{x_2=0}=0,\quad \left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{q=1}^{N}\alpha_2^{(q)}H_q\right)\right|_{x_2=l_2}=0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
\begin{gathered}
\left.\chi_2\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.\chi_2\right|_{x_1=l_1}=0,\quad \left.\chi_1\right|_{x_2=0}=0,\quad \left.\chi_1\right|_{x_2=l_2}=0,\quad \left.w\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.w\right|_{x_1=l_1}=0,\\
\left.w\right|_{x_2=0}=0,\quad \left.w\right|_{x_2=l_2}=0,\quad \left.H_q\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.H_q\right|_{x_1=l_1}=0,\quad \left.H_q\right|_{x_2=0}=0,\quad \left.H_q\right|_{x_2=l_2}=0,
\end{gathered}
$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Решение задачи (1), (2) ищется в интегральной форме ($i=1,2$)

$$\begin{Bmatrix} \chi_i(x_1,x_2,\tau) \\ w(x_1,x_2,\tau) \\ H_q(x_1,x_2,\tau) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^{\tau}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \begin{Bmatrix} G_{ik}(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau-t) \\ G_{3k}(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau-t) \\ G_{q+3,k}(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau-t) \end{Bmatrix} F_k(\xi,\zeta,t)\,d\xi d\zeta dt. \qquad (3)$$

Здесь $F_k(x_1,x_2,\tau)$ – функции, задающие поверхностные возмущения. В соответствии с уравнениями (1) они определяются следующим образом:

$$F_1(x_1,x_2,\tau) = -\frac{12}{h^3} m_1(x_1,x_2,\tau), \quad F_2(x_1,x_2,\tau) = -\frac{12}{h^3} m_2(x_1,x_2,\tau),$$

$$F_3(x_1,x_2,\tau) = \frac{1}{h} q(x_1,x_2,\tau), \quad F_{q+3}(x_1,x_2,\tau) = \frac{12}{h^3} z_q(x_1,x_2,\tau).$$

G_{ik} – функции Грина задачи (1), (2), для нахождения которых используются преобразование Лапласа по времени и разложения в двойные тригонометрические ряды Фурье (индекс L – трансформант Лапласа; s – параметр преобразования Лапласа)

$$G_{1kl}^L(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{1klnm}^L(\xi,\zeta,s)\cos\lambda_n x_1 \sin\mu_m x_2,$$

$$G_{2kl}^L(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} G_{2klnm}^L(\xi,\zeta,s)\sin\lambda_n x_1 \cos\mu_m x_2,$$

$$G_{pkl}^L(x_1,x_2,\xi,\zeta,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{pklnm}^L(\xi,\zeta,s)\sin\lambda_n x_1 \sin\mu_m x_2, \quad p \ge 3.$$

Оригиналы по Лапласу находятся аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-08-00589 А).

Список литературы

1 **Zemskov, A.** Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate / A. Zemskov, D. Tarlakovskii, N. Grigorevskiy // Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021) : 9th edition of the International Conference on Computational Methods. – https://www.scipedia.com/public/Zemskov_et_al_2021a.

2 **Диткин, В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высш. шк., 1965. – 568 с.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КОНТАКТ ВЫПУКЛОГО УДАРНИКА И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Ю. С. КАЗАКОВ
ПАО «Корпорация "Иркут"», г. Москва, Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ); НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается контакт движущегося вдоль оси Oz под действием силы P симметричного выпуклого абсолютно твердого ударника и упругой полуплоскости $z \ge 0$ при отсутствии массовых сил в прямоугольной декартовой системе координат Oxz. Задача полагается плоской, т. е. все искомые функции зависят только от координат x, z и времени τ. Замкнутая система уравнений представлена уравнениями движения полуплоскости в потенциалах перемещений, соотношениями Ко-