УДК 539.3

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ПЛАСТИН И СТЕРЖНЕЙ ПРИ ОДНОКРАТНОМ И ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Ф. Э. АБДУКАДИРОВ, С. Ш. ХОЖАХМАТОВ
Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

На основе теории малых упругопластических деформаций приведены методика расчета тонких пластин и стержней при повторно-переменном нагружении [1–3]. Получены уравнения равновесия для тонких пластин в текущих величинах при переменном нагружении [4]:

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left[(1-\Omega_1^{(k)})\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial x^2}\left[(1-\Omega_1^{(k)})\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x\partial y}\right]+\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial y^2}\left[(1-\Omega_1^{(k)})\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2}\right)\right]\right\}=\frac{q}{D}q_1(x,y)-\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\Omega_1^{(k)}\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-1)}}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-1)}}{\partial y^2}\right)\right]+\right.\\&\left.+2\frac{\partial}{\partial y^2}\left[\Omega_1^{(k)}\frac{\partial^2 w^{0(k-1)}}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y^2}\left[\Omega_1^{(k)}\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-1)}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-1)}}{\partial x^2}\right)\right]\right\}+\\&+\sum_{m=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial}{\partial y^2}\left\{\Omega_1^{0(k-m)}\left[\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-m-1)}}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-m-1)}}{\partial y^2}\right)\right]\right\}+\right.\\&+2\frac{\partial}{\partial x\partial y}\left[\Omega_1^{0(k-m)}\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial x\partial y}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\Omega_1^{0(k-m)}\left[\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-m)}}{\partial x^2}\right)-\right.\right.\\&\left.\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 w^{0(k-m-1)}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^{0(k-m-1)}}{\partial x^2}\right)\right]\right\}\right\rangle.\end{aligned}\tag{1}$$

Дифференциальные уравнения (1) решаются при граничных условиях

$$M_{11}^{(k)}\delta\left.\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x}\right|_r=0,\qquad R^{(n)}\delta W^{(k)}\big|_r=0\,.\tag{2}$$

Для решения краевых задач (1), (2) применяется метод Бубнова – Галеркина. Согласно этому методу искомая функция прогиба берется в виде ряда

$$w^{(k)}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}T_i^{(k)}\varphi_i(x,y)\,,\tag{3}$$

где $T_i^{(k)}$– неизвестные коэффициенты, $\varphi_i(x,y)$ – заданные координатные функции, удовлетворяющие граничные условия (3), n – количество сохраняемых слагаемых в разложении прогиба.

Подставляя (3) в (1) и группируя слагаемые полученного уравнения, имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}\left[D(1-\Omega^{(k)})\left(\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\right)\right]+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[D(1-\Omega^{(k)})\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\right]+\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial y^2}\left[D(1-\Omega^{(k)})\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}+\mu\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right)\right]\right\}T_i^{(k)}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\Omega^{(k)}\left(\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right)+\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\Omega^{(k)}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+\mu\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right)\right]\Bigg\}T_i^{0(k-1)}=q^{(k)}q_1(x,y)+\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}D\Omega^{o\,(k-m)}\left(\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\mu\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\right)\right]+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[D\Omega^{o\,(k-m)}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\Omega^{o\,(k-m)}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}+\mu\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right)\right]\right\}\left(T_i^{o\,(k-m)}-T_i^{o\,(k-m-1)}\right). \quad (4)$$

Теперь уравнение (4) умножим на φ_i и произведем дважды интегрирование по частям. Затем, учитывая краевые условия, вводя ряд обозначения получим

$$\left(A^{уп}-A^{пл}(T)\right)T^{(k)}=g_i q^{(k)}-g_i^{пл}(T)+g_i^{o}, \quad (5)$$

где вектор неизвестных коэффициентов $T^{(k)}$ определяется из системы нелинейных алгебраических уравнений (5).

На основе разработанного алгоритма [5] в качестве примера приведем результаты расчета тонких прямоугольных пластинок с учетом упругопластических свойств материала при переменном нагружении по обобщенному принципу Мазинга и повреждаемости. Расчет выполнен при следующих значениях: $q(x,y)=1$; λ = 0,95; μ = 0,5; γ = 0,8; N_1 = N_2 = 20; δ = 2,76; ε = 10^{-5}; $q^{(k)}$ = = $(-1)^{(k+1)}$. В таблице 1 для сравнения приведены значения расчетных величин в центре защемленной прямоугольной плиты при k = 1, 2, …, 20.

Таблица 1 – **Циклически упрочняющийся материал (сплав В-96)**

k	α_k	$\omega^{(k)}$	$\times10^2\eta^{(k)}$	$\times10^3 W^{(k)}$	$\times10^2 M_y^{(k)}$
1	1,00	0,41286	0,0000	1,49092	1,97336
2	2,08	0,41789	0,0528	–1,42752	–2,10930
4	2,19	0,40637	0,1058	–1,40338	–2,18059
5	2,22	0,39736	0,2133	1,42929	2,14306
9	2,29	0,37987	0,4339	1,41411	2,20163
10	2,30	0,39304	0,4902	–1,37922	–2,27207
19	2,38	0,36384	0,8371	1,39798	2,27640
20	2,39	0,36385	1,0779	–1,36459	–2,34153

За материальные константы кинетического уравнения повреждаемости принимали следующие: $A = 1{,}2\cdot10^{-4}$; $\alpha = \beta = 5$; $\gamma = 0{,}8$; $r = 1$; $\alpha_1 = 0{,}97$; $B = 1{,}4\cdot10^3$.

Сравнивая значения расчетных величин в центре плиты, отметим, что с увеличением повреждаемости постепенно уменьшаются значения функции пластичности $\omega^{(k)}$, т. е. зона пластичности, а прогибы плиты от цикла к циклу становятся меньше из-за упрочнения материала В-96. Разница величин $W^{(k)}$, $M_y^{(k)}$ и $\omega^{(k)}$ при k = 1 и k = 20 составляет 8,47, 18,65 и 11,87 %.

В таблице 2 для сравнения приведены значения расчетных величин в центре защемленной прямоугольной плиты по двум теориям: с использованием обобщенного принципа Мазинга (задача 1) и обобщенной диаграммы деформирования А. П. Гусенкова – Г. В. Москвитина (задача 2).

Таблица 2 – **Сравнение значения прогиба и изгибающего момента**

k	По обобщенному принципу Мазинга			По обобщенной диаграмме деформирования		
	α_k	$10^3W^{(k)}$	$10^2 M_y^{(k)}$	λ_k	$10^3W^{(k)}$	$10^2 M_{11}^{(k)}$
1	1	1,49092	1,97336	0,95	1,49092	1,97336
2	2,08	–1,42752	–2,10930	0,92	–1,47338	–2,07135
4	2,19	–1,40338	–2,18059	0,88	–1,46451	–2,12159
5	2,22	1,42929	2,14306	0,86	1,47134	2,08593
9	2,29	1,41411	2,20163	0,83	1,46312	2,13806
10	2,30	–1,37922	–2,27207	0,82	–1,45181	–2,19893
19	2,38	1,39798	2,27640	0,78	1,45169	2,20804
20	2,39	–1,36459	–2,34153	0,7	–1,44109	–2,26661

Проанализированы результаты расчетных величин: значения перемещений и изгибающего момента при исходном и циклическом нагружении. Например, при k = 5 на 3,8 и 5,71 %, при k = 20 – на 7,65 и 7,49 %. Отметим, что при максимальном значении перемещений $W^{(k)}$ и интенсивности деформаций $e^{(k)}$ при k = 1, 2, 3, 4 разница составит: $W^{(3)} = 2{,}46W^{(1)}$, $W^{(2)}=1{,}1W^{(1)}$, $e^{(3)}=2{,}1\,e^{(1)}$, $e^{(4)}=1{,}6\,e^{(2)}$.

Также исследовано НДС тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения, защемленного по торцам при повторно–переменном нагружении для материалов (В-96, Д-16Т) [6].

Список литературы

1 **Ильюшин, А. А.** Труды. Пластичность / А. А. Ильюшин. − М. : Логос, 2004. − 388 с.

2 **Москвитин, В. В.** Циклические нагружения элементов конструкций / В. В. Москвитин. − М. : URSS, 2019. − 344 с.

3 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2006. – 379 с.

4 **Буриев, Т.** Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций / Т. Буриев. – Ташкент : Фан, 1986. – 244 с.

5 Численное решение задач для упругопластических стержней при пространственно-переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга и повреждаемости материалов / А. А. Абдусаттаров [и др.] // Упругость и неупругость : матер. междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – М. : МГУ. – С. 156–162.

6 **Абдусаттаров, А.** К моделированию расчета упругопластических стержней при пространственно-переменном нагружении с учетом накопления повреждаемости / А. Абдусаттаров, Ф. Э. Абдукадиров, А. И. Исомиддинов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2019. – № 5(23). – С. 5–9.

УДК 539.3

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛОВ

А. АБДУСАТТАРОВ, Н. Б. РУЗИЕВА

Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

В статье приводятся математические модели и методика расчета трубопроводов при однократном и циклическом нагружении с учетом накопления повреждаемости и взаимодействий с окружающим грунтом. На основе теории вязкоупругопластичности [1,2] и вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных (интегро- дифференциальных) уравнений движения трубопроводов с учетом взаимодействий с грунтом и повреждаемости материала. Следуя теории В. В. Москвитина, введем разности

$$\bar{u}_i^{(n)} = (-1)^n (u_i^{(n-1)} - u_i^{(n)}),\ \ \bar{e}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (e_{ij}^{(n-1)} - e_{ij}^{(n)}),\ \ \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}). \qquad (1)$$

Согласно статическим гипотезам [3, 4] общие перемещения трубопровода представим в цилиндрических координатах ($x = x$, $y = r\cos\gamma$, $z = r\sin\gamma$):

$$\bar{u}_1^{(n)}(x,r,\gamma,t) = \bar{u}^{(n)}(x,t) - \bar{\alpha}_1^{(n)}(x,t) r\cos\gamma - \bar{\alpha}_2^{(n)}(x,t) r\sin\gamma + \phi\bar{v}^{(n)}(x,t) + a_1\beta_1^{(n)}(x,t) + a_2\beta_2^{(n)}(x,t),$$
$$\bar{u}_2^{(n)}(x,r,\gamma,t) = \bar{\upsilon}^{(n)}(x,t) - \bar{\theta}^{(n)}(x,t) r\sin\gamma,\ \ \bar{u}_3^{(n)}(x,r,\gamma,t) = \bar{w}^{(n)}(x,t) + \bar{\theta}^{(n)}(x,t) r\cos\gamma, \qquad (2)$$

где $\bar{\alpha}_1^{(n)}, \bar{\alpha}_2^{(n)}$ – углы поворота сечения при чистом изгибе при n-м нагружении; $\bar{\beta}_1^{(n)}, \bar{\beta}_2^{(n)}$ – углы поперечного сдвига; $\bar{\theta}^{(n)}$ – угол кручения; $\bar{v}_1^{(n)}$ – погонная закрутка при n-м нагружении; φ – функция кручения Сен-Венана.

Согласно (1), (2) и соотношениям Коши определены компоненты деформации и напряжений при n-м нагружении. Для вывода уравнения движения трубопровода при пространственном нагружении с учетом упругопластических деформаций и взаимодействий используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского:

$$\delta\int_t (T^{(n)} - \Pi^{(n)} + A^{(n)})dt = 0\,.$$

Для определения вариации кинетической, потенциальной энергии и вариации работы внешних сил в данной постановке имеем следующие соотношения:

$$\delta\int_t T^{(n)}dt = \int_x \tilde{A}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t} E\delta Y^{(n)}\,dx\Big|_t - \int_t\int_x \tilde{A}\frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} E\delta Y^{(n)}\,dxdt\,; \qquad (3)$$