МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Графика»

Г. Т. ПОДГОРНОВА, Е. Г. КАЛАШНИК

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ.
МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

Гомель 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Графика»

Г. Т. ПОДГОРНОВА, Е. Г. КАЛАШНИК

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Одобрено методической комиссией факультета промышленного и гражданского строительства в качестве учебно-методического пособия для студентов строительных специальностей

Гомель 2015

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.3
П44

Р е ц е н з е н т – канд. техн. наук, доцент *Т. К. Королик* (УО «БелГУТ»)

Подгорнова, Г.Т.

П44 Начертательная геометрия. Способы преобразования проекций. Метрические задачи: учеб.-метод. пособие для студентов строительных специальностей / Г.Т. Подгорнова, Е. Г. Калашник; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 27 с.
ISBN 978-985-554-342-9

В краткой форме изложены основы способов преобразования проекций, применяемых в начертательной геометрии. Рассмотрены ряд способов вращения и способ замены плоскостей проекций. Для типовых задач метрического характера приведены примеры их решения с применением различных способов преобразования проекций.

Предназначено для студентов строительных специальностей.

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.3

ISBN 978-985-554-342-9

1 СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Решение многих позиционных и метрических задач упрощается, если объекты проецирования располагаются частным образом относительно плоскостей проекций. Например, натуральную величину плоской фигуры удобно находить, если эта фигура параллельна плоскости проекций; расстояние от точки до плоскости легко определяется, если эта плоскость занимает проецирующее положение и т.д.

Если проекции геометрических элементов или фигур заданы в общем виде, то для перевода их в частное положение наиболее часто используют следующие способы преобразования проекций:

– способ замены плоскостей проекций;

– способы вращения:

- вокруг проецирующих осей;
- вокруг линии уровня (осей, параллельных плоскости проекций);
- совмещение (вращение вокруг следов плоскости);
- плоскопараллельное перемещение.

2 СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Суть способа заключается в том, что объект проецирования остается неподвижным, а плоскости проекций заменяют, причем последовательно, т.е. одна из плоскостей проекций заменяется новой, а вторая остается без изменения. Между новой и старой плоскостями проекций соблюдается ортогональность, т.е. плоскости должны быть взаимно перпендикулярными. Преобразование проекций некоторой геометрической фигуры связано с преобразованием проекций точек, принадлежащих данной фигуре. Поэтому рассмотрим, какие изменения претерпевают проекции отдельной точки при переходе от одной системы ортогональных плоскостей проекций к другой. На рисунке 2.1 показана точка *A*, заданная в системе плоскостей проекций

V/H. Заменим плоскость V другой, также вертикальной плоскостью R, и построим новую фронтальную проекцию точки на эту плоскость. Координата Z точки A остается неизменной, следовательно, расстояние от новой оси X_1 до новой фронтальной проекции равно расстоянию от заменяемой проекции до оси X. Горизонтальная проекция точки остается прежней.

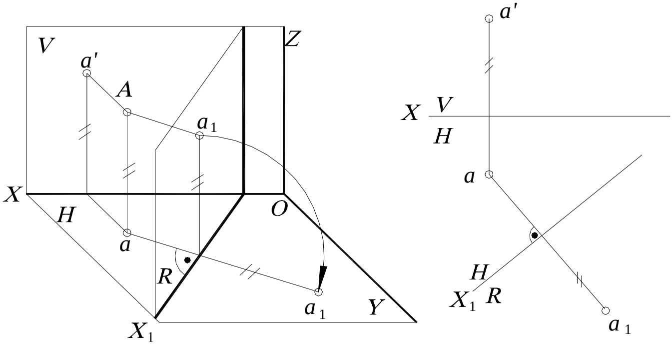

Рисунок 2.1 – Замена фронтальной плоскости проекций

Для получения эпюра плоскость R вращением вокруг оси X_1 совмещается с плоскостью проекций H. Совместится с H и новая фронтальная проекция a_1 точки A, которая окажется на общем перпендикуляре к новой оси X_1 с оставшейся без изменения горизонтальной проекцией a. Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций H новой плоскостью, также перпендикулярной V. На этот раз не изменится величина координаты Y. Поэтому расстояние основой оси X_1 до новой горизонтальной проекции точки a_1 равно расстоянию от проекции a до оси X (рисунок 2.2).

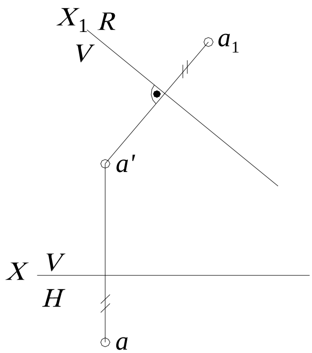

Рисунок 2.2 – Замена горизонтальной плоскости проекций

Иногда замена только одной плоскости проекций не обеспечивает получения требуемого вида вспомогательной проекции, поэтому приходится переходить к замене двух плоскостей. Но одновременно меняем только одну плоскость проекций, другая остается неизменной. После того как будут определены новые проекции, можно переходить ко второй системе плоскостей проекций. Наличие одной плоскости проекции, которая не меняет своего положения, позволяет использовать ее как связующее звено между старыми (исходными) проекциями и новыми.

Следовательно, последовательный переход от одной системы плоскостей проекций к другой необходимо осуществлять, выполняя следующее правило: ***расстояние от новой проекции точки до новой оси должно равняться расстоянию от преобразуемой (заменяемой) проекции точки до предыдущей (старой) оси.*** На рисунке 2.3 при переходе от системы V/R_1 к R_1/R_2 новой осью стала X_2 по отношению к которой ось X_1 является предыдущей. При всех заменах разноименные проекции точек должны быть расположены на общих перпендикулярах к соответствующим осям.

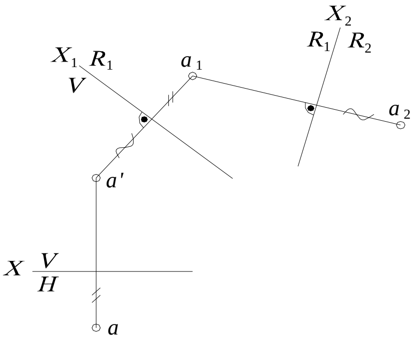

Рисунок 2.3 – Двойная замена плоскости проекций

Решение всех метрических и позиционных задач способом замены плоскостей проекций можно свести к четырем основным типовым задачам:

1) прямую общего положения преобразовать в прямую уровня;

2) прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую;

3) плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость;

4) плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня.

Задача 1. *Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня (рисунок 2.4).*

Для решения задачи (рисунок 2.4, *а*) взята новая плоскость R, отвечающая двум условиям: $R \perp H$ и $R // AB$. В системе H/R прямая стала фронталью, поэтому ось $X_1 // ab$ (новая ось X_1 и новая плоскость проекций R могут быть расположены на любом расстоянии от прямой, они могут совпадать с прямой и ее проекцией). На плоскость R без искажения проецируется и отрезок AB и угол α (угол наклона к горизонтальной плоскости проекций). Эта же задача (рисунок 2.3, *б*) решена путем введения новой плоскости R параллельно AB и перпендикулярно V, а новая ось $X_1 // a'b'$. Очевидно, на эту плоскость R прямая AB проецируется в натуральную величину, и угол, образованный проекцией a_1b_1 с осью X_1 равен углу наклона прямой AB к плоскости V (угол β).

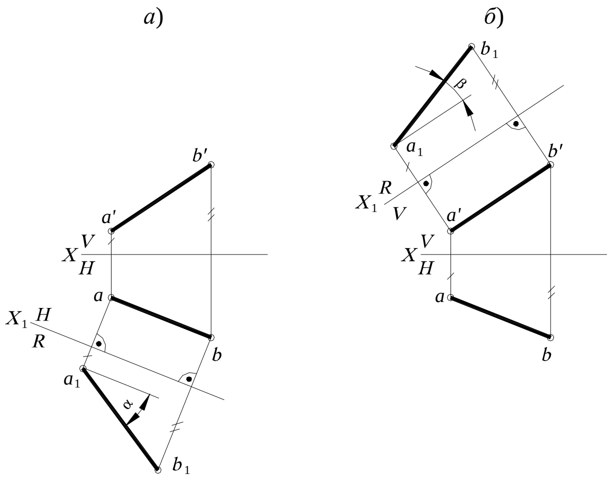

Рисунок 2.4 – Преобразование прямой общего положения в прямую уровня:
а – замена фронтальной плоскости проекций; *б* – замена горизонтальной плоскости проекций

Задача 2. *Прямую общего положения преобразовать в проецирующую.*

Преобразование одной из проекций прямой общего положения в точку требует двойной замены плоскостей. При переходе от системы *V/H* к H/R_1 плоскость R_1 располагают перпендикулярно плоскости *H* и параллельно прямой *AB* ($R_1 \perp H$ и $R_1 // AB$), т.е. решают первую задачу, рассмотренную выше. При второй замене новую плоскость R_2 располагают перпендикулярно прямой, т.е. новую ось X_2 (на любом расстоянии) проводят перпендикулярно новой фронтальной проекции прямой a_1b_1 ($X_2 \perp a_1b_1$). На плоскости R_2 прямая изобразится точкой (рисунок 2.5), так как координаты концов отрезка в системе H/R_1 одинаковы, поскольку ось X_1 проводилась параллельно *ab*.

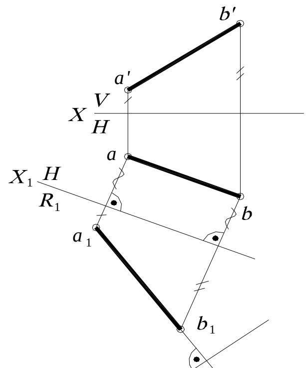

Рисунок 2.5 – Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

Задача 3. *Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую.*

Пусть плоскость общего положения задана плоской фигурой *ABC*. Для решения поставленной задачи новую плоскость проекций нужно расположить перпендикулярно треугольнику *ABC* и одной из плоскостей проекций. Поэтому в заданной плоскости проводят одну из линий уровня, например горизонталь *CD* (рисунок 2.6). Расположив плоскость

$T \perp CD$, обеспечивается выполнение двух условий: новая плоскость будет перпендикулярна и плоскости H, и плоскости треугольника. Новую ось X_1 проводят под прямым углом к cd (горизонтальной проекции горизонтали).

Проводя через горизонтальные проекции вершин треугольника прямые, перпендикулярные новой оси, откладывают на этих прямых от оси X_1 отрезки, равные Z_A, Z_B, Z_C. Мы получили новую фронтальную проекцию $a_1c_1b_1$ треугольника ABC, представляющую собой прямую линию. При этом на плоскость T без искажения проецируется угол наклона плоскости ABC к плоскости H (угол между $a_1c_1b_1$ и X_1).

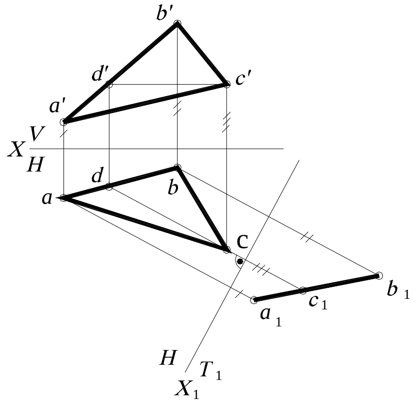

Рисунок 2.6 – Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

Аналогично можно ввести новую плоскость, перпендикулярную V и треугольнику ABC. Для этого в плоскости строится фронталь, перпендикулярно которой и располагается новая плоскость. Новая ось проводится перпендикулярно фронтальной проекции фронтали и от этой оси по линиям связи откладываются отрезки равные Y_A, Y_B, Y_C. Плоскость треугольника относительно новой плоскости проекций стала проецирующей (представляет собой прямую линию) и без искажения проецируется угол наклона плоскости треугольника ABC к фронтальной плоскости проекций V.

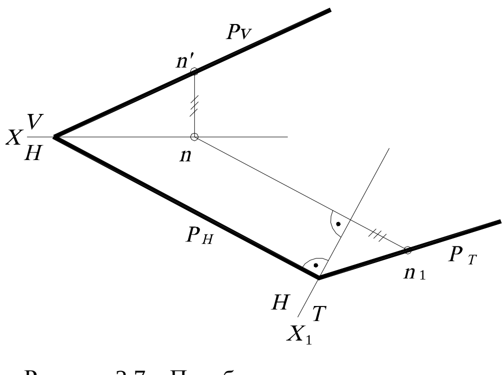

Рисунок 2.7 – Преобразование плоскости, заданной следами, в проецирующую плоскость

Если плоскость задана следами (рисунок 2.7), то новая ось располагается перпендикулярно следу плоскости ($X_1 \perp P_H$). Положение следа плоскости на новой плоскости проекций (P_T) определяем по произвольно взятой точке 1 на следе плоскости Pv (сама точка совпадает со своей фронтальной проекцией n', а горизонтальная

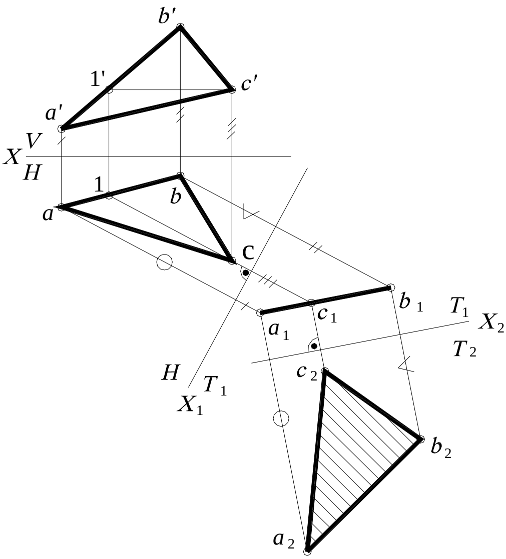

Рисунок 2.8 – Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

проекция точки *n* лежит на оси). Аналогично решается задача, если новую ось провести перпендикулярно следу P_V, только произвольная точка уже берется на следе *Рн*.

Задача 4. *Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня.*

Чтобы преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня, необходимо создать такую новую ортогональную систему плоскостей проекций, в которой одна из плоскостей проекций должна быть параллельна заданной плоскости (треугольнику).

Решение этой задачи требует двойной замены плоскостей. Смысл первой замены заключается в преобразовании плоскости треугольника в проецирующую плоскость (см. решение основной задачи 3).

Второй этап решения (рисунок 2.8) заключается в переходе от системы H/T_1 к системе T_1/T_2. Новая плоскость T_2 устанавливается параллельно треугольнику, а значит, новая ось X_2 на эпюре проводится параллельно прямой $a_1c_1b_1$. Как обычно, через указанные точки проводят перпендикуляры к новой оси и откладывают на них от оси X_2 отрезки, равные расстояниям от горизонтальных проекций точек *a*,*b*,*c* до заменяемой оси X_1. Построенная проекция $a_2b_2c_2$ определяет натуральную величину треугольника.

Если же заданная плоскость – проецирующая (рисунок 2.9), то поставленная задача решается одной заменой плоскостей.

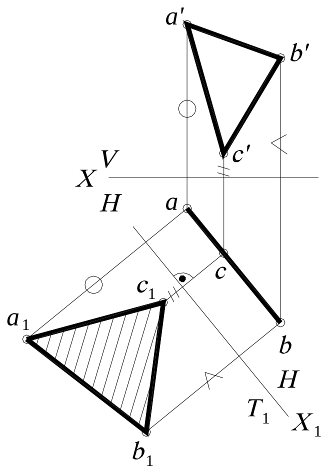

Рисунок 2.9 – Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

3 СПОСОБЫ ВРАЩЕНИЯ

Некоторая точка, вращаясь вокруг оси, опишет окружность, плоскость которой будет перпендикулярна этой оси. Центр окружности будет располагаться в точке пересечения оси вращения с плоскостью, в которой вращается точка, а величина радиуса определится как расстояние от точки до оси вращения. Если какая-либо точка находится на оси вращения, то при вращении системы эта точка считается неподвижной. В зависимости от положения оси различают следующие способы вращения:

1) вращение вокруг проецирующих осей;
2) вращение вокруг линии уровня;
3) совмещение (вращение вокруг следов плоскости);
4) плоскопараллельное перемещение.

3.1 Вращение вокруг проецирующих осей

Рассмотрим вращение точки A вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций V (рисунок 3.1).

Точка перемещается по окружности, плоскость которой параллельна V. На плоскость V эта окружность проецируется без искажения, а на плоскость H – в виде отрезка прямой, параллельной оси X и перпендикулярной, соответственно, линиям связи. На рисунке 3.1 через a'_1 обозначена проекция нового положения точки A, которое она занимает после поворота на угол α.

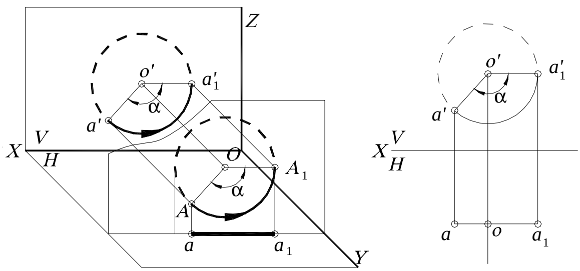

Рисунок 3.1 – Вращение вокруг проецирующей оси

Для того чтобы построить проекции отрезка, повернутого вокруг проецирующей оси на некоторый угол, достаточно определить новое положение двух его точек, повернув их на этот же угол.

Для того чтобы повернуть плоскость на некоторый угол, достаточно повернуть на этот угол две точки плоскости. Новое положение плоскости будет определено повернутыми точками и неподвижной точкой пересечения данной плоскости с осью вращения. При этом предполагается, что первые две точки не лежат на одной прямой с третьей.

3.2 Вращение вокруг линии уровня

Метод вращения вокруг линии уровня применяют обычно для определения метрических характеристик плоских фигур, т.к. в результате такого вращения ее можно расположить параллельно плоскости проекций.

Рассмотрим поворот точки вокруг горизонтали (рисунок 3.2). Пусть точка B вращается вокруг горизонтальной оси G. При этом она движется по окружности, лежащей в плоскости S и перпендикулярной оси вращения G ($\text{пл.} S \perp OG$). Значит, плоскость S является горизонтально-проецирующей, и окружность, по которой движется точка, проецируется в виде прямой, совмещенной со следом $S_н$. Из условия перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $S_н$ будет перпендикулярен горизонтальной проекции оси g.

Итак, *если ось вращения параллельна некоторой плоскости, то проекция вращающейся вокруг оси точки на ту же плоскость перемещается по прямой. Эта прямая перпендикулярна проекции оси вращения на заданную плоскость*.

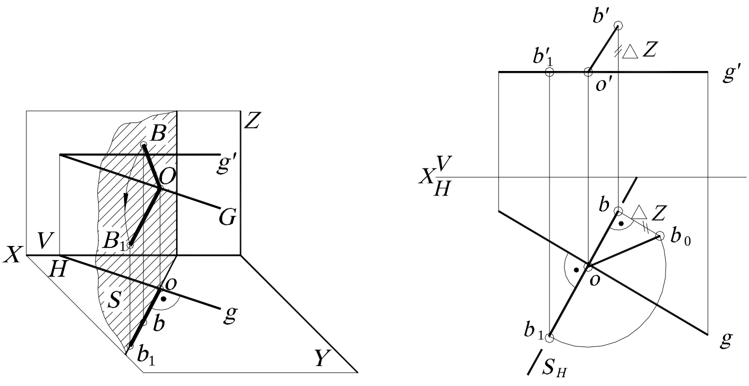

Рисунок 3.2 – Вращение вокруг горизонтали

Если при вращении радиус OB займет положение, параллельное плоскости H, то проекция ob_1 окажется равной натуральной величине радиуса OB. На эпюре определены проекции радиуса вращения – ob и $o'b'$, затем построена натуральная величина радиуса вращения ob_0 (методом прямоугольного треугольника). Найденный отрезок ob_0 откладываем на прямую, по которой движется проекция точки b, т.е. $ob_1 = ob_0$. При этом фронтальная проекция точки b'_1 будет лежать на фронтальной проекции оси вращения g'.

3.3 Совмещение (вращение вокруг следов плоскости)

Метод совмещения является частным случаем метода вращения вокруг горизонтали или фронтали, при этом осью вращения является горизонтальный или фронтальный след плоскости, так как следы плоскости можно рассматривать как «нулевую» горизонталь и «нулевую» фронталь. Вращение плоскости производится до ее совмещения с плоскостью проекций, при этом отрезки линий, фигуры, расположенные в плоскости, изобразятся без искажения (рисунок 3.3).

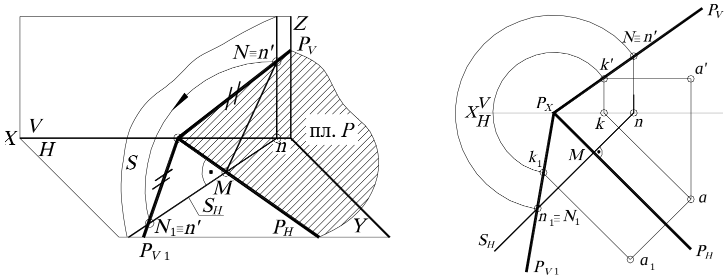

Рисунок 3.3 – Вращение вокруг горизонтального следа

На рисунке 3.3 показано совмещение плоскости общего положения P с плоскостью H. При вращении вокруг следа $Pн$ этот след, как ось вращения, не меняет своего положения. Точка пересечения следов (схода следов) Px также не меняет своего положения. Поэтому, чтобы найти совмещенное положение следа Pv, надо найти еще одну точку этого следа в положении совмещения с плоскостью Н. Найдем совмещенное положение произвольно взятой точки N, лежащей на следе Pv. Точка N опишет дугу окружности в плоскости S, перпендикулярной к оси вращения, т. е. $Sн \perp Pн$. В пересечении этой дуги (радиусом MN) с горизонтальным следом $Sн$ получим совмещенную точку N_1. Из рисунка видно, что при вращении плоскости отрезок PxN не изменяет своей величины, т.е. $PxN = PxN_1$. Пользуясь этим, построим совмещенное изображение следа Pv_1 на эпюре.

Берем на следе Pv произвольную точку N, которая совпадает со своей проекцией n'. Через ее горизонтальную проекцию n проведена прямая nM, перпендикулярная к оси вращения – следу $Pн$. Проводя из точки Px дугу радиусом Pxn' до пересечения с продолжением прямой nM, получаем совмещенное с плоскостью H положение точки N – точку n'_1. Соединив найденную точку n'_1 с точкой Px, получим совмещенное положение следа Pv – прямую Pv_1.

Совмещенное положение точки A, лежащей в плоскости, находим с помощью горизонтали AK (ее совмещенное положение $a_1k_1 // Pн$) и линии движение точки $aa_1 \perp Pн$.

Можно произвести обратное действие. Если известно совмещенное положение точки, ее проекции можно восстановить на эпюре. Действия производятся в обратном порядке с использованием горизонтали (или фронтали).

3.4 Плоскопараллельное перемещение

При вращении вокруг проецирующей оси проекция отрезка прямой линии или плоской фигуры на плоскость, перпендикулярную оси вращения, не изменяется ни по виду, ни по величине – меняется лишь положение этой проекции. Другая проекция (на плоскости, параллельной оси вращения) изменяется, но все точки этой проекции перемещаются по прямым, параллельным оси проекций. Пользуясь этими свойствами, можно применить способ вращения, не задаваясь изображением оси вращения. Достаточно, не изменяя вида и величины одной из проекций рассматриваемой фигуры, переместить эту проекцию в требуемое положение, а затем построить другую проекцию так, как указано выше. Например, отрезок AB повернем сначала в положение фронтали, а затем перпендикулярно плоскости H (рисунок 3.4).

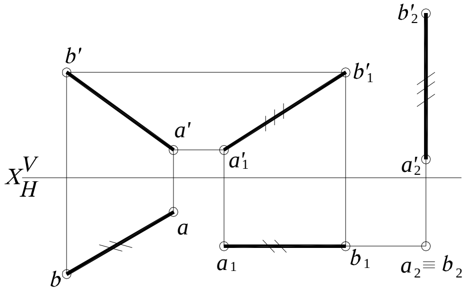

Рисунок 3.4 – Плоскопараллельное перемещение

Начинаем с поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости H до положения, параллельного плоскости V, но эту ось на чертеже не указываем. При таком повороте горизонтальная проекция отрезка не изменяет своей величины, следовательно, проекцию a_1b_1 берем равной ab и располагаем параллельно оси X. Найдя соответствующую фронтальную проекцию отрезка $(a_1'b_1')$, выполняем второй поворот вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V до искомого положения, то есть, располагаем проекцию $a'_2b'_2=a'_1b'_1$перпендикулярно к оси X (ось вращения на чертеже также не изображают). Горизонтальная проекция отрезка будет точкой – $a_2 \equiv b_2$.

4 МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Основные метрические задачи можно подразделить на следующие категории:

– Определение расстояний:
  - между двумя точками;
  - от точки до прямой;
  - между прямыми;
  - от точки до плоскости;
  - между плоскостями.

– Определение натуральной величины плоскости

– Определение углов:
  - между двумя пересекающимися прямыми;
  - между двумя скрещивающимися прямыми;
  - между прямой и плоскостью;
  - между плоскостями.

4.1 Определение расстояний

4.1.1 Расстояние между двумя точками

Определить расстояние между двумя точками A и B – это значит определить натуральную величину отрезка AB. Рассмотрим некоторые **способы определения натуральной величины отрезка прямой**.

1 *Способ прямоугольного треугольника (рисунок 4.1).*

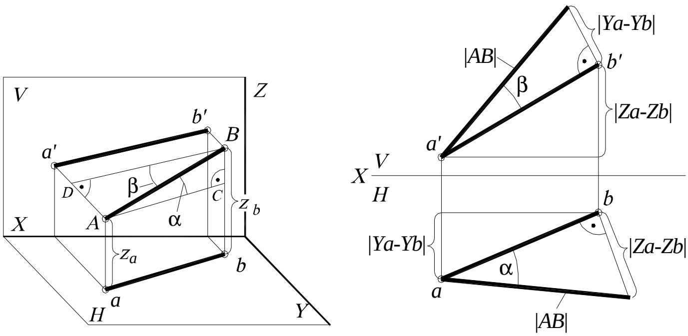

Рисунок 4.1 – Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника

Рассмотрим пространственную модель. Построим $AC // ab$ (ab – горизонтальная проекция отрезка прямой). Получившийся ΔABC прямоугольный, в котором один катет равен горизонтальной проекции *AB(AC = ab)*, второй катет равен разности координат по оси *Z* между точками *B* и *A* ($BC = Z_B - Z_A$), а отрезок *AB* является гипотенузой этого треугольника.

Аналогично, в Δ *ABD* катет *BD = a'b'*, а катет $AD = Y_A - Y_B$.

Следовательно, чтобы найти натуральную величину отрезка надо построить прямоугольный треугольник, взяв за один катет его горизонтальную (фронтальную, профильную) проекцию, а за другой катет – разность удаления концов отрезка от горизонтальной (фронтальной, профильной) плоскости проекций. В полученном треугольнике гипотенуза будет равна натуральной величине отрезка, а угол между проекцией и гипотенузой будет являться углом наклона прямой к горизонтальной (фронтальной, профильной) плоскости.

На эпюре (рисунок 4.1) натуральная величина прямой *AB* построена дважды: с использованием горизонтальной проекции *ab*, при этом найден угол α – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций; и с использованием фронтальной проекции *a'b'*, при этом находится угол β – угол наклона к фронтальной плоскости проекций.

2 *Способ замены плоскостей проекций (рисунок 4.2).*

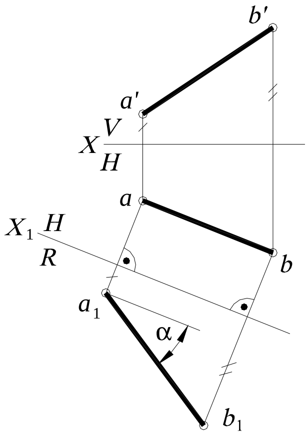

Рисунок 4.2 – Определение натуральной величины отрезка заменой плоскостей

Для определения натуральной величины отрезка прямой *AB* вводится новая плоскость проекций $R \perp H$ и $R // AB$. В системе *H/R* прямая станет фронталью, поэтому ось $X_1 // ab$ (новая ось X_1 может быть расположена на любом расстоянии от горизонтальной проекции прямой *ab* и даже совпадать с прямой и ее проекцией). Проводя через горизонтальные проекции точек прямые, перпендикулярные новой оси, откладывают на этих прямых от оси X_1 отрезки, равные Z_A и Z_B. На плоскость *R* без искажения проецируется и отрезок *AB* ($a_1b_1 = |AB|$) и угол α (угол наклона к горизонтальной плоскости проекций).

3 *Способ вращения вокруг проецирующей оси (рисунок 4.3).*

Чтобы определить натуральную величину отрезка прямой *AB*, надо повернуть эту прямую так, чтобы она заняла положение горизонтали или фронтали.

Чтобы легче было производить построения, проведем ось вращения через один из концов отрезка (через точку *A*). Тогда точка *A* в процессе вращения останется неподвижной. Ось вращения возьмем ⊥ пл.*H*. Повернем *ab* так, чтобы она заняла положение фронтали, то есть параллельно оси *X*. Проекция *b* перемещается по окружности, проекция *b'* – по прямой параллельно оси X. Новое положение прямой AB_1 есть положение фронтали, следовательно $a'b'_1 = |AB|$. Угол между новой проекцией $a'b'_1$ и осью X будет являться углом наклона отрезка прямой AB к горизонтальной плоскости проекций (угол α). Если вращение произвести вокруг оси ⊥ пл. V, то можно определить угол наклона прямой к плоскости V (угол β).

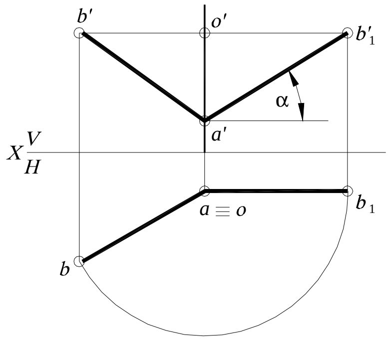

Рисунок 4.3 – Определение натуральной величины отрезка вращением вокруг проецирующей оси

4.1.2 Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, проведенным из точки к прямой. Прямой угол в общем случае проецируется с искажением. Следовательно, задача решается с использованием дополнительных построений. Рассмотрим некоторые **способы решения данной задачи**.

1 *Без преобразования чертежа.*

Для определения расстояния от точки C до прямой AB через точку C проведем плоскость перпендикулярную отрезку прямой AB (рисунок 4.4).

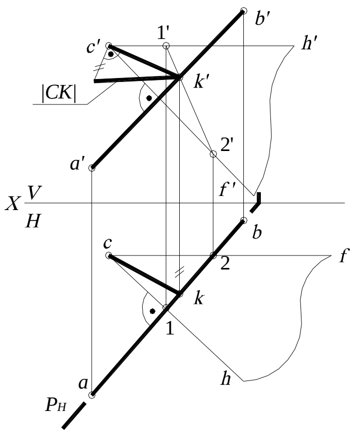

Рисунок 4.4 – Определение расстояния от точки до прямой без преобразования чертежа

Плоскость зададим горизонталью CH ($ch \perp ab$, $c'h' // X$) и фронталью CF ($c'f' \perp a'b'$, $cf // X$). Любая прямая, лежащая в этой плоскости, будет перпендикулярна AB.

Определим точку пересечения плоскости (CHXCF) с прямой AB. Для этого проведем горизонтально-проецирующую плоскость P через AB ($P_H \equiv ab$) и найдем линию пересечения плоскостей. Это прямая 1-2, фронтальная проекция (1′-2′) которой в пересечении с $a'b'$ даст фронтальную проекцию точки пересечения k', а затем определим горизонтальную проекцию k. Проекции ck и $c'k'$ являются проекциями искомого расстояния от точки C до прямой AB. Остается определить любым из способов натуральную величину отрезка CK.

2 *Способ замены плоскостей проекций.*

При решении этой задачи способом замены плоскостей проекций необходимо прямую общего положения преобразовать в проецирующую, что

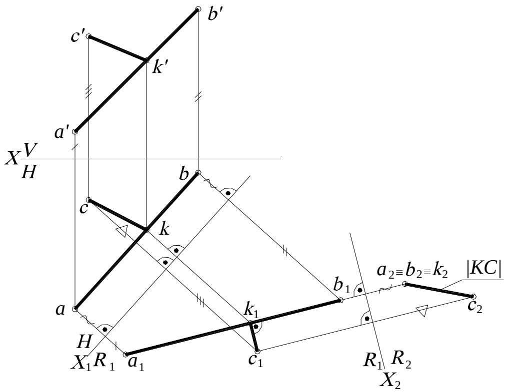

Рисунок 4.5 – Определение расстояния от точки до прямой заменой плоскостей

требует двойной замены плоскостей проекций (рисунок 4.5). Смысл первой замены заключается в преобразовании прямой общего положения в прямую уровня. Для этого новую плоскость проекций R_1 располагают параллельно прямой AB ($X_1//ab$). При второй замене плоскость проекций R_2 располагают перпендикулярно новой проекции прямой, т.е. ось $X_2 \perp a_1b_1$. На плоскость R_2 прямая AB спроецируется в точку. Точка C при всех преобразованиях, занимая новое положение, точкой и останется. Расстояние между двумя точками и будет искомым.

4.1.3 Расстояние между прямыми

При определении расстоянии между прямыми можно выделить **две задачи**: 1) определение расстояния между параллельными прямыми и 2) определение расстояния между скрещивающимися прямыми. Обе задачи наиболее просто решаются способом замены плоскостей проекции.

1 *Определение расстояние между параллельными прямыми.*

На рисунке 4.6 проекции двух параллельных прямых общего положения двойной заменой плоскостей проекций преобразованы в точки. Расстояние между ними будет искомым. При второй замене плоскостей проекций плоскость R_2 расположена перпендикулярно к заданным прямым. Следовательно, перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одной прямой на другую, параллелен плоскости R_2 и проецируется на нее без искажения.

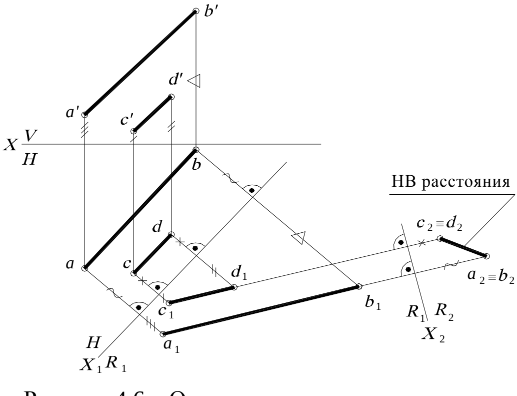

Рисунок 4.6 – Определение расстояния между параллельными прямыми

2 *Определение расстояния между скрещивающимися прямыми.*

Это расстояние измеряется длиной перпендикуляра общего к заданным прямым. Если прямые являются прямыми общего положения, задача сводится к преобразованию одной из прямых в точку (рисунок 4.7).

Этого можно достичь двойной заменой плоскостей проекций. На рисунке 4.7 при первой замене вводится новая фронтальная плоскость проекций R_1 параллельно прямой *CD*, при этом ось $X_1//cd$. При второй замене вводится новая плоскость R_2 перпендикулярно новому положению этой же прямой *CD*, т. е. $X_2 \perp c_1 d_1$. Прямая *CD* на плоскость R_2 проецируется в точку, а прямая *AB* при всех преобразованиях проецируется в прямую. Перпендикуляр, проведенный из точки $c_2 \equiv d_2$ на проекцию прямой $a_2 b_2$ и будет кратчайшим расстоянием между прямыми.

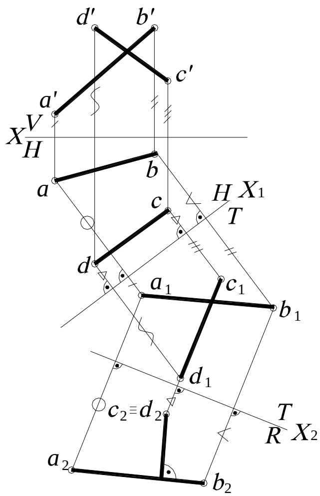

Рисунок 4.7 – Определение расстояния между скрещивающимися прямыми

4.1.4 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Рассмотрим **способы решения**.

1 *Без преобразования чертежа (рисунок 4.8)*

Чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна к плоскости, ее горизонтальная проекция должна располагаться под прямым углом к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – к фронтальной проекции фронтали.

На рисунке 4.8 проекции перпендикуляра построены с помощью главных линий плоскости: горизонтали *A*1 ($a'1'$, $a1$) и фронтали *B*2 ($b2$, $b'2'$). Проводим перпендикуляр *D*3 к плоскости ΔABC, фронтальная проекция которого $d'3' \perp b'2'$, а горизонтальная проекция – $d3 \perp a1$.

Затем находим точку пересечения перпендикуляра с плоскостью Δ *ABC*. Для этого заключаем перпендикуляр *D*3 во фронтально-

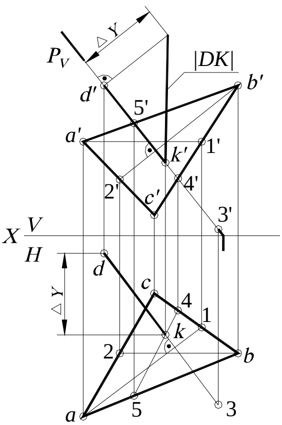

Рисунок 4.8 – Определение расстояния от точки до плоскости без преобразования чертежа

проецирую-щую плоскость P ($Pv \equiv d'3'$) и находим линию пересечения плоскостей P и $\Delta\, ABC$. Найденная линия 4-5 в пересечении с перпендикуляром D3 даст точку $К$ – точку пересечения перпендикуляра с плоскостью $\Delta\, ABC$. Построенные проекции dk и $d'k'$являются проекциями искомого расстояния. Затем необходимо определить натуральную величину отрезка DK. В данном примере натуральная величина определена способом прямоугольного треугольника.

2 *Способ замены плоскостей проекций (рисунок 4.9).*

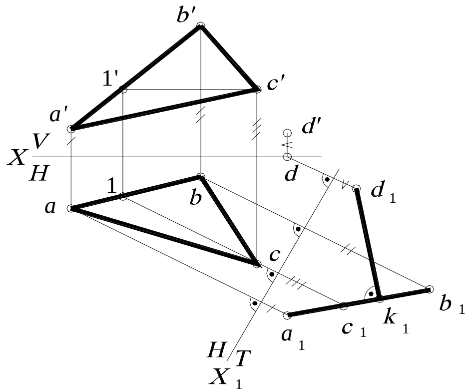

Рисунок 4.9 – Определение расстояния от точки до плоскости методом замены плоскостей

Перпендикуляр, определяющий расстояние от точки до плоскости, проецируется в натуральную величину на ту плоскость проекций, относительно которой данная плоскость $\Delta\, ABC$ является проецирующей. Поэтому решение задачи сводится к такому преобразованию, в результате которого заданная плоскость станет проецирующей. Новую плоскость проекций вводим перпендикулярно горизонтали плоскости ABC ($X_1 \perp c1$). Проводя через горизонтальные проекции вершин треугольника прямые, перпендикулярные новой оси, откладывают на этих прямых от оси X_1 отрезки, равные Z_A, Z_B, Z_C. Мы получили новую фронтальную проекцию $a_1c_1b_1$ треугольника ABC. Перпендикуляр, проведенный из точки d_1 на проекцию $a_1c_1b_1$, и будет искомым расстоянием.

4.1.5 Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние между параллельными плоскостями определяется общим перпендикуляром. Такие задачи проще всего решаются **способами преобразования проекций**.

1 *Способ замены плоскостей проекций (рисунок 4.10).*

Для решения задачи необходимо плоскости общего положения преобразовать в проецирующие.

Чтобы преобразовать данные плоскости в проецирующие, вводим перпендикулярно им новую фронтальную плоскость проекций *T*, в результате чего появится новая ось X_1 перпендикулярная горизонтальным следам плоскостей P_H и R_H. Положение следа плоскости *P* на новой плоскости проекций (P_T) определяем по произвольно взятой точке 1 на следе плоскости P_V. Новый след P_T пройдет через точку пересечения следа P_H с осью X_1 и новое положение точки 1_1. Так как плоскости параллельны, следовательно, $R_T \parallel P_T$. Перпендикуляр, проведенный между новыми следами плоскостей P_T и R_T, и будет искомым расстоянием.

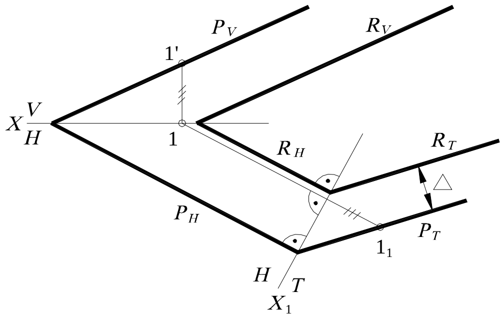

Рисунок 4.10 – Определение расстояния между плоскостями

2 *Без преобразования чертежа.*

Чтобы определить расстояние между параллельными плоскостями, необходимо из любой, произвольно взятой, точки одной плоскости провести перпендикуляр к другой плоскости и определить точку пересечения перпендикуляра с этой плоскостью. Затем любым из способов найти натуральную величину найденного отрезка. Это и будет искомым расстоянием.

4.2 Определение натуральной величины плоскости

Чтобы определить натуральную величину плоскости общего положения, необходимо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость оказалась параллельной одной из плоскостей проекций. Существуют различные **способы определения натуральной величины плоской фигуры**.

1 *Способ замены плоскостей проекций.*

Решение этой задачи требует двойной замены плоскостей (рисунок 4.11). Для этого сначала следует преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость, а затем – в плоскость уровня.

Смысл первой замены заключается в преобразовании плоскости треугольника в проецирующую плоскость. Новую плоскость проекций T_1 вводим перпендикулярно горизонтали плоскости $\Delta\, ABC$ ($X_1 \perp c1$). Проводя через горизонтальные проекции вершин треугольника прямые, перпендикулярные новой оси, откладывают на этих прямых от оси X_1 отрезки, равные Z_A, Z_B, Z_C. На новой плоскости проекций T_1 горизонталь проецируется в точку, а новая фронтальная проекция треугольника ABC представляет собой прямую линию $a_1c_1b_1$.

Второй этап решения заключается в переходе от системы H/T_1 к системе T_1/T_2. Новая плоскость T_2 устанавливается параллельно треугольнику, а значит, новая ось X_2 на эпюре проводится параллельно прямой $a_1c_1b_1$. Как обычно, через указанные точки проводят перпендикуляры к новой оси и откладывают на них от оси X_2 отрезки, равные расстояниям от горизонтальных проекций точек a,b,c до заменяемой оси X_1. Построенная проекция $a_2b_2c_2$ определяет натуральную величину треугольника.

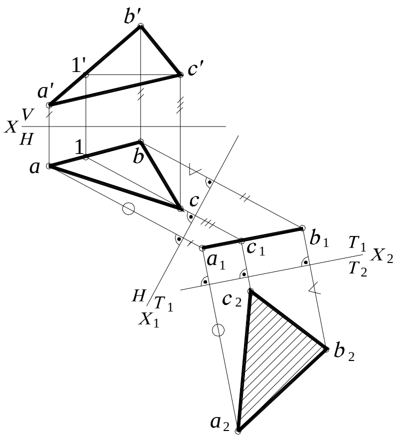

Рисунок 4.11 – Определение натуральной величины плоской фигуры методом замены плоскостей

2 *Способ вращения вокруг прямой уровня.*

Рассмотрим определение натуральной величины треугольника вращением вокруг фронтали. Необходимо отметить, что в тот момент, когда плоскость треугольника будет параллельна плоскости проекций V, фронтальные проекции каждой из перемещающихся вершин окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки. При этом одна из вершин, через которую будет проходить ось вращения, – фронталь, останется неподвижной. В нашем примере (рисунок 4.12) это точка C.

Проводим ось вращения – фронталь $C1$ ($c1$, $c'1'$). Перпендикулярно фронтальной проекции фронтали $c'1'$ проводим прямые, по которым будут перемещаться фронтальные проекции вращающихся точек A и B. Строим проекции радиуса вращения одной из них (в нашем примере на рисунке 4.12 – точка B). Это будут отрезки $b'o' \perp c'1'$ и bo. По двум проекциям определяем способом прямоугольного треугольника натуральную величину радиуса вращения точки B. Это будет гипотенуза $o'B_0$. Найденный отрезок $o'B_0$ от-

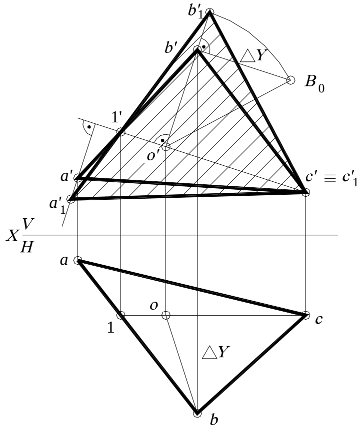

Рисунок 4.12 – Определение натуральной величины плоской фигуры вращением вокруг линии уровня

кладываем от точки o' на прямой, по которой перемещается фронтальная проекция b' вершины B. Через полученную точку b'_1 и неподвижную точку $1'$ проводим линию до пересечения с прямой, по которой перемещается фронтальная проекция вершины A. Соединяя найденные точки a'_1 и b'_1 и неподвижную точку c' получим новую фронтальную проекцию треугольника. Эта проекция и определяет натуральную величину треугольника ABC. Горизонтальная проекция треугольника окажется преобразованной в прямую, которая совпадет с линией $c1$.

3 *Способ плоскопараллельного перемещения.*

Суть этого способа заключается в том, что необходимо, не изменяя вида и величины одной из проекций рассматриваемой фигуры, переместить эту проекцию в требуемое положение, а затем построить другую проекцию, учитывая, что это способ вращения без указания осей вращения.

На рисунке 4.13 приведен пример решения задачи по определению натуральной величины плоской фигуры – треугольника *ABC*.

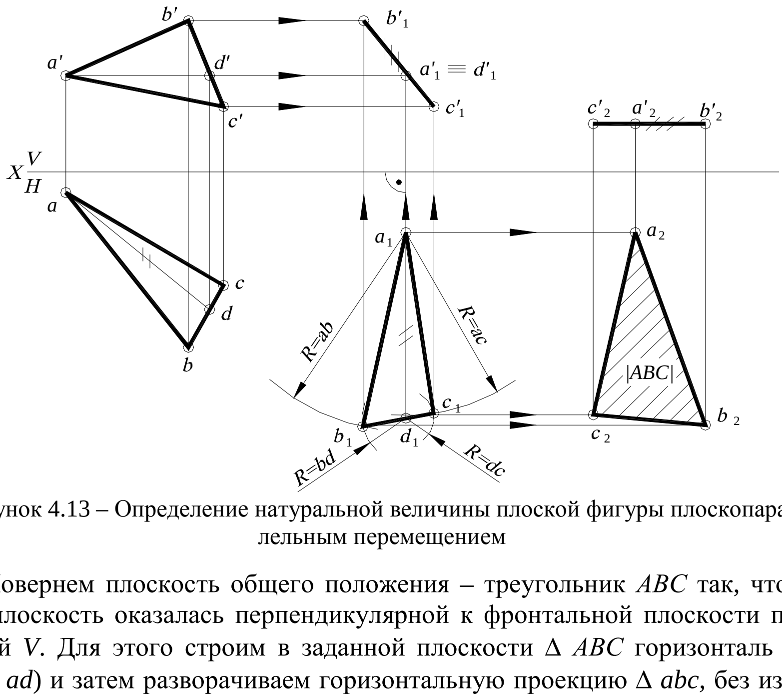

Рисунок 4.13 – Определение натуральной величины плоской фигуры плоскопараллельным перемещением

Повернем плоскость общего положения – треугольник *ABC* так, чтобы эта плоскость оказалась перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций *V*. Для этого строим в заданной плоскости Δ *ABC* горизонталь *AD* (*a'd'*, *ad*) и затем разворачиваем горизонтальную проекцию Δ *abc*, без изменения ее размеров так, чтобы его горизонталь *ad* стала перпендикулярна оси X ($ad = a_1d_1$ и $a_1d_1 \perp X$). При этом повороте подразумевается ось вращения, перпендикулярная к плоскости *H*, поэтому горизонтальная проекция сохраняет свой вид и величину ($abc = a_1b_1c_1$), изменяется лишь её положение.

Точки A, B, C при таком повороте перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости H, то есть фронтальные проекции этих точек будут перемещаться параллельно оси X и в пересечении этих линий с вертикальными линиями связи получим новую фронтальную проекцию плоскости, которая выльется в прямую $a_1'b_1'c_1'$. При втором повороте, приводящем плоскость ABC в положение параллельное плоскости проекций H, подразумевают ось вращения, перпендикулярную плоскости проекций V. Теперь фронтальная проекция при повороте сохраняет вид и величину и занимает положение параллельное оси X ($a'_1b'_1c'_1 = a'_2b'_2c'_2$ и $a'_2b'_2c'_2 // X$). Точки a_1, b_1, c_1 перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости V, то есть параллельно оси X и в пересечении этих линий с вертикальными линиями связи получим новую горизонтальную проекцию плоскости $a_2b_2c_2$. Это и будет натуральная величина плоскости ΔABC.

4.3 Определение углов

4.3.1 Угол между двумя пересекающимися прямыми

Решение задачи сводится к определению одним из способов натуральной величины отсека плоскости. Стороны угла ограничиваются произвольными точками, и определяется натуральная величина полученного треугольника.

4.3.2 Угол между двумя скрещивающимися прямыми

Мерой этого угла является угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся. Следовательно, и в этом случае задача сводится к определению натуральной величины треугольника любым из известных способов.

4.3.3 Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью определяется углом между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость (рисунок 4.14). Построение проекций угла требует определения двух точек, одна из которых является точкой пересечения данной прямой с плоскостью, а вторая – основанием перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой на ту же плоскость. Соединив найденные точки, мы получим проекцию заданной прямой на плоскости, а затем определим натуральную величину угла между пересекающимися прямыми, одна из которых – заданная прямая, а вторая– ее проекция на заданной плоскости.

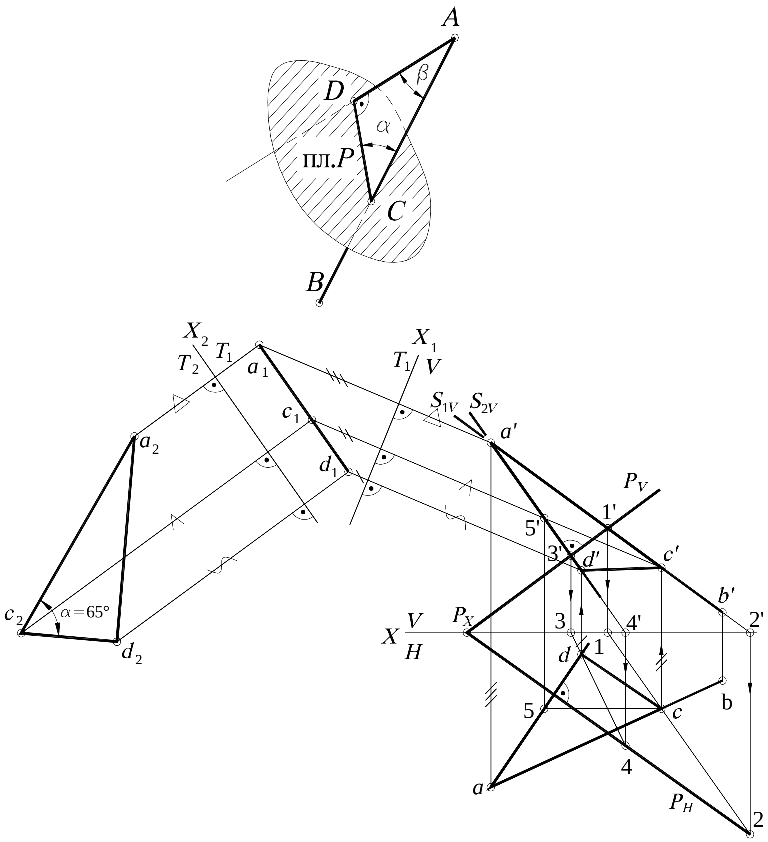

Рисунок 4.14 – Определение натуральной величины угла между прямой и плоскостью

Рассмотрим определение действительной величины угла между прямой *AB* и плоскостью *P*. Найдем точку пересечения прямой *AB* с плоскостью *P*, для этого заключаем эту прямую во фронтально-проецирующую плоскость ($S_1v \equiv a'b'$). Строим линию пересечения плоскостей *P* и S_1v, проекции которой – 1'-2' и 1-2. В пересечении горизонтальных проекций построенной прямой 1-2 и заданной *ab* находим горизонтальную проекцию точки пересечения *c*, а затем определяем фронтальную проекцию точки пересечения *c'*. Из точки *A* проведем перпендикуляр к плоскости *P*, фронтальная проекция которого перпендикулярна следу *Pv*, а горизонтальная проекция – перпендикулярна следу *Pн*. Затем определяем точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью *P*, заключив его во фронтально-проецирующую плоскость S_2v и построив проекции линии пересечения плоскостей – 3'-4' и 3-4. В пересечении горизонтальных проекций построенной прямой 3-4 и перпендикуляра находим горизонтальную проекцию точки пересечения – точку *d*, а затем определяем ее фронтальную проекцию – *d'*. Найденные проекции *d* и *d'* и будут искомыми проекциями точки пересечения перпендикуляра с плоскостью *P*. Проекции *c'd'* и *cd* будут проекциями прямой *AB* на плоскость *P*. Определяем действительную величину угла *ACD* (угла α) заменой плоскостей проекций. При первой замене вводим новую ось X_1 перпендикулярно фронтальной проекции фронтали $c'5'$ ($X_1 \perp c'5'$). На новой плоскости проекций T_1 фронталь проецируется в точку, а новая проекция угла *ACD* представляет собой прямую линию $a_1c_1d_1$. При второй замене (переход от системы H/T_1 к системе T_1 / T_2) новая ось X_2 на эпюре проводится параллельно прямой $a_1c_1d_1$. Как обычно, через указанные точки проводят перпендикуляры к новой оси и откладывают на них от оси X_2 отрезки, равные расстояниям от фронтальных проекций точек a',c',d' до заменяемой оси X_1. Построенная проекция угла $a_2c_2d_2$ и будет искомым углом α.

Решение этой задачи может быть упрощено, если определять не угол α между прямой и плоскостью, а дополненный до 90^0 угол β (угол между прямой и перпендикуляром к плоскости). Значение искомого угла *α* между прямой *AB* и плоскостью *P* определяется как $\alpha = 90^0 - \beta$. Ход решения задачи понятен из рисунка 4.15. Точка *D* (*d, d'*) на проекциях перпендикуляра взята произвольно, но таким образом, чтобы отрезок *DB* стал фронталью (*db* // *X*), что позволяет упростить дальнейшие построения. Двойной заменой плоскостей проекций определяем действительную величину угла β.

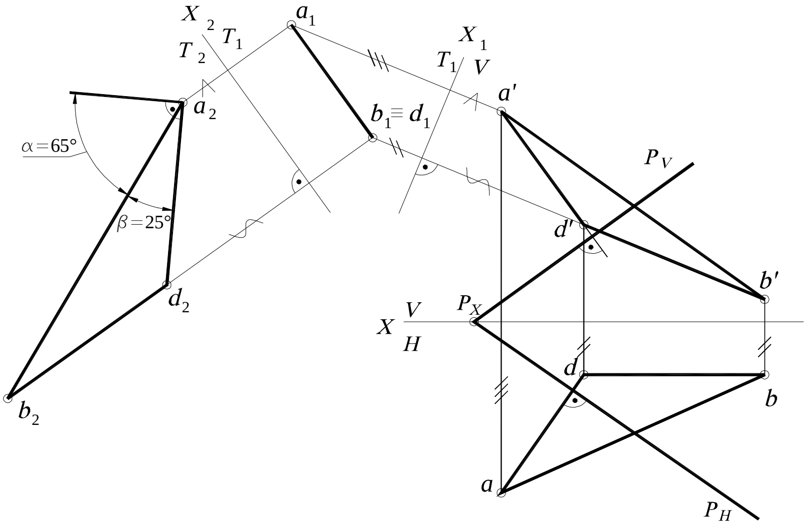

Рисунок 4.15 – Определение натуральной величины дополненного угла между прямой и плоскостью

4.3.4 Угол между плоскостями

Две плоскости, пересекаясь, образуют четыре попарно равных двугранных угла. В том случае, когда двугранный угол задан, как показано на рисунке 4.16, его натуральную величину целесообразно определять **способом преобразования проекций**.

1 *Способ замены плоскостей проекций.*

Ребром двугранного угла в этом примере служит общая сторона двух треугольников – прямая *AC*. Последовательно переходя от системы *V/H* к системам H/T_1 и T_1/T_2 прямую *AC* преобразуем в точку. Для этого при первой замене новую фронтальную плоскость проекций T_1 вводим параллельно прямой *AC* (X_1 // *ac*) и строим проекции всех точек на новой плоскости T_1. Прямая *AC* проецируется на плоскость T_1 в натуральную величину.

При второй замене вводим новую плоскость проекций T_2 перпендикулярно новому положению прямой *AC* ($X_2 \perp a_1c_1$). Прямая *AC* проецируется в точку, а полученный линейный угол α даст величину двугранного угла между плоскостями.

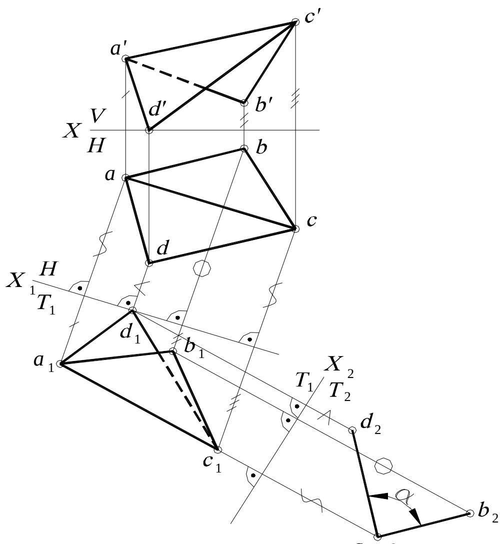

Рисунок 4.16 – Определение двугранного угла методом замены плоскостей

2 *Без преобразования чертежа.*

Если пересекающиеся плоскости пересечь третьей плоскостью *R*, перпендикулярной к линии их пересечения, то полученный линейный угол и будет искомым углом между плоскостями (рисунок 4.17). Если задать плоскость *R* двумя перпендикулярами, опущенными из произвольной точки пространства на заданные плоскости, то искомый угол будет равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

На рисунке 4.17 плоскости заданы главными линиями – горизонталями и фронталями. Для определения угла между этими плоскостями из произвольной точки *К* проведены два перпендикуляра к плоскостям. На перпендикулярах взяты произвольные точки *M* и *N*. В дальнейшем задача сводится к определению угла между двумя пересекающимися прямыми *KM* и *KN*.

Дважды используя метод замены плоскостей находится натуральная величина треугольника *MNK*, в котором угол при вершине *K* равен углу между заданными плоскостями.

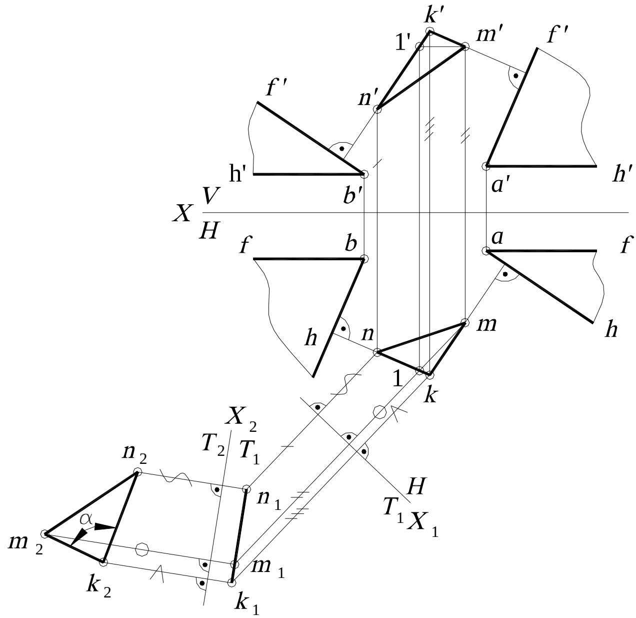

Рисунок 4.17 – Определение двугранного угла без преобразования чертежа

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

ПОДГОРНОВА Галина Тадеушевна
КАЛАШНИК Елена Геннадиевна

Начертательная геометрия. Способы преобразования проекций. Метрические задачи

Учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 15.01.2015 г. Формат 60х84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,48. Тираж 250 экз.
Зак. № . Изд. № 41.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014 г.
№ 2/104 от 01.04.2014 г.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель