

УДК 621.3.027.3

Д. В. КОМНАТНЫЙ, кандидат технических наук, Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ

Рассматривается вопрос о получении аналитических решений задач расчета электростатического поля, необходимых для отладки и верификации программно-математического обеспечения численных методов расчета электростатических полей. Кроме того, указанные задачи могут использоваться для предварительного анализа электростатического поля в установках высокого напряжения. Показано, что современный уровень развития метода разделения переменных в уравнении Лапласа дает возможность разработки единой методики постановки модельных задач и их решения. Показано использование теорем сложения для переразложения потенциала в системах сферических координат, связанных с центрами сфер. Такое переразложение позволяет удовлетворить граничным условиям, получить систему алгебраических уравнений для коэффициентов разложения потенциалов в ряды по полиномам Лежандра. Предлагаемая методика может найти широкое применение в научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработках техники высоких напряжений.

Различные установки высокого напряжения находят широкое применение в электроэнергетике, в частности на электрифицированных железных дорогах. От их работы зависит бесперебойное энергообеспечение и штатное функционирование электрифицированных участков железных дорог [1]. Безаварийная работа установок высокого напряжения во многом обеспечивается на этапе их проектирования. Современные методы проектирования этих установок включают расчеты электростатического поля в них и основаны на численных методах [2, 3]. Эти методы реализуются в программных комплексах. При разработке программно-математического обеспечения необходимым этапом становится отладка и верификация. Одним из способов проверки работы программного обеспечения является решение на компьютере задач, которые также имеют аналитическое решение [2]. Тем не менее в работах по расчету электростатических полей технических установок [2–4] такие задачи представлены в крайне незначительном количестве. Работы, в которых получены аналитические решения задач о расчете электростатических полей, являются либо исследованиями по физике [5], либо ориентированы на проблемы электромагнитного экранирования [6, 7]. Современный уровень развития метода разделения переменных решения уравнения Лапласа для потенциала электростатического поля [8] позволяет выработать единую методику постановки и решения задач о расчете электростатических полей в системах с осевой симметрией. Эти задачи могут использоваться для верификации программно-математического обеспечения расчета электростатических полей. Кроме того, они могут служить для предварительного расчета и анализа поля в установках высокого напряжения. Разработка этой методики является задачей, которая решается в статье.

По данным анализа литературных источников в качестве базовых объектов, из которых формируются электродинамические системы, способные служить моделями высоковольтных установок, выбраны: сфера [9–12], заряженная круговая нить [10, 13], точечный заряд [10, 14], электрический диполь [13, 15]. На основании [9] предполагается, что электростатические поля

электродинамических систем обладают осевой симметрией, то есть все объекты в системе лежат на общей оси. Для потенциалов полей сфер справедливы выражения [10], удовлетворяющие уравнению Лапласа:

– для металлической сферы

$$u_{out} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{R}{r} \right)^{k+1} P_k(\cos\Theta); \quad (1)$$

– для диэлектрической сферы

$$u_{out} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{R}{r} \right)^{k+1} P_k(\cos\Theta), \quad (2)$$

$$u_{in} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left( \frac{r}{R} \right)^k P_k(\cos\Theta), \quad (3)$$

где  $u_{in}$  – внутренний потенциал, В;  $u_{out}$  – внешний потенциал, В;  $a_k, b_k$  – коэффициенты разложения;  $r$  – расстояние, м;  $R$  – радиус сферы, м;  $P_k(\cos\Theta)$  – полином Лежандра,  $\Theta$  – угловая сферическая координата, рад;  $k$  – счетная переменная.

Для металлической сферы с диэлектрическим покрытием значительной толщины внешний потенциал выражается по формуле (2), а внутренний – по формуле [12, 16]

$$u_{in} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_{1k} \left( \frac{r}{R} \right)^k + c_{2k} \left( \frac{R}{r} \right)^{k+1} \right) P_k(\cos\Theta), \quad (4)$$

где  $c_{1k}, c_{2k}$  – коэффициенты разложения.

В формулах (1)–(4) все коэффициенты нормированы к  $1/4\pi\epsilon_a$ , где  $\epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

На поверхности раздела сфер с различными электрофизическими свойствами выполняются известные граничные условия [10] для проводников и изоляторов.

Выражения для потенциала электростатического поля точечного заряда, электрического диполя и круговой заряженной нити хорошо известны. Они приведены, в частности, в [10, 17].

Отличительной особенностью анализа установок высокого напряжения является необходимость учета наличия поверхности земли, потенциал которой принят равным

нулю. Учесть граничное условие для поверхности земли наиболее просто методом зеркальных изображений. Отражения в плоскости точечного заряда и заряда круговой нити хорошо известны [17]. Отражение сферы и электрического диполя осуществляются, как частные случаи отражения сферы, потенциал которой выражается через сферические гармоники [18]. Таким образом, для потенциала сферы-отражения из (1) получается формула

$$u_{\text{отт}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} P_k(\cos \Theta). \quad (5)$$

Для отражения диполя потенциал исходного диполя выражается через полиномы Лежандра [15]

$$u = \frac{p}{r^2} P_1(\cos \Theta), \quad (6)$$

где  $p$  – электрический момент диполя, Кл/м.

Тогда потенциал диполя отражения

$$u' = \frac{p}{r^2} P_1(\cos \Theta'). \quad (7)$$

Видно, что знак момента электрического диполя при отражении не меняется.

Предполагается, что источники электростатического поля находятся вне объемов сфер. Тогда в пространстве  $R^3$ , включающем как исходные, так и отраженные объекты, выделяются области:  $D_m$  – внутри металлических сфер,  $D_d$  – внутри диэлектрических сфер, а также область  $D = R^3 / D_m \cup D_d$ . В областях  $D_d$  потенциал электростатического поля рассчитывается по (3), если сфера состоит из диэлектрика, или по (4), если сфера металлическая с диэлектрическим покрытием. В области  $D$  существует суммарный потенциал, являющийся суперпозицией потенциалов полей всех объектов. Причем потенциал поля металлической сферы выражается по (1), а диэлектрической сферы – по (2). Требуется получить выражения для этих потенциалов и найти неизвестные коэффициенты рядов по сферическим функциям. Коэффициенты находятся так, чтобы выражения для потенциалов удовлетворяли граничным условиям на поверхностях раздела введенных выше областей.

Для проведения расчетов с центрами сфер и с точками расположения источников электростатического поля связываются локальные сферические системы координат. Для удовлетворения граничным условиям на внешней границе сферы  $\Gamma$  потенциалы поля остальных сфер и источников электрического поля выражаются в системе координат рассматриваемой сферы с помощью теорем сложения [10, 19].

Так, для потенциалов поля точечного заряда, диполя, сферы применяются теоремы сложения (202.3.3) при пересчете сверху вниз и (201.3.3) при пересчете снизу вверх [10, 19], так как эти теоремы справедливы при  $r < a$ , где  $a$  – расстояние между центрами двух сферических систем координат, сдвинутыми по оси  $z$  системы глобальных координат. При записи граничных условий на поверхностях сфер выполняется это условие применения теорем сложения.

Для заряженной круговой нити в [10] на основании теоремы сложения (200.3.3) [19] получено выражение, справедливое при  $r < \sqrt{a^2 + R_0^2}$ , где  $R_0$  – радиус нити,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\pi\tau R_0}{(\sqrt{a^2 + R_0^2})^{n+1}} P_n\left(\frac{a}{R_0}\right) r^n P_n(\cos \Theta), \quad (8)$$

где  $n$  – счетная переменная.

В формуле (8) линейная плотность заряда нормирована к  $1/4\pi\epsilon_a$ .

Полученные разложения записываются на граничной поверхности сферы  $\Gamma$  и подставляются в граничные условия. В результате преобразований методом усечения [20] получается система алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов рядов по сферическим функциям.

Следует отметить, что рассмотрение незамкнутых оболочек в предлагаемой методике возможно, но это приведет к необходимости решения интегральных уравнений, что потребует использования численных методов [8]. Поэтому для проверки программно-математического обеспечения, реализующего численные методы расчета электростатических полей, такие модели дают не столь убедительный результат, как модели с полностью аналитическими решениями.

**Пример постановки и решения задачи.**

В пространстве  $R^3$  с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon_0$  над бесконечной проводящей плоскостью поверхности земли, в котором введена система координат  $Oxyz$ , размещена электродинамическая система, состоящая из объектов (рисунки 1):

- металлическая сфера радиуса  $R_{01}$  с диэлектрическим покрытием, образующим сферу радиуса  $R_{02}$ ; центр сферы расположен над плоскостью на высоте  $a_2$ ; потенциал металлической сферы постоянен и равен  $V$  вольт.

- электрический диполь момента  $p$ , ориентированный по оси  $Oz$  и расположенный на высоте  $a_1$  над поверхностью земли.

Вводятся обозначения: область  $D = R^3 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$ ;  $\Gamma_1$  – поверхность металлической сферы  $D_1$ ;  $\Gamma_2$  – поверхность диэлектрического покрытия сферы  $D_2$ ;  $\Gamma_3$  – поверхность земли. Электростатическое поле в области  $D$  описывается потенциальными функциями:  $u_1$  – внешний потенциал поля сферы;  $u_2$  – потенциал поля диполя  $u = u_1 + u_2$  – суммарный потенциал поля в области  $D$ . Электростатическое поле в области  $D_2$  описывается потенциалом  $u_0$ .

Для поля в областях  $D$  и  $D_2$  формулируется краевая задача. Для потенциалов  $u$  и  $u_0$  справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } D; \quad \Delta u_0 = 0 \text{ в } D_2. \quad (9)$$

Граничные условия

$$u_0|_{\Gamma_1} = V, \quad (10)$$

$$u_0|_{\Gamma_2} = u|_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_2} \quad (11)$$

$$u|_{\Gamma_3} = 0. \quad (12)$$

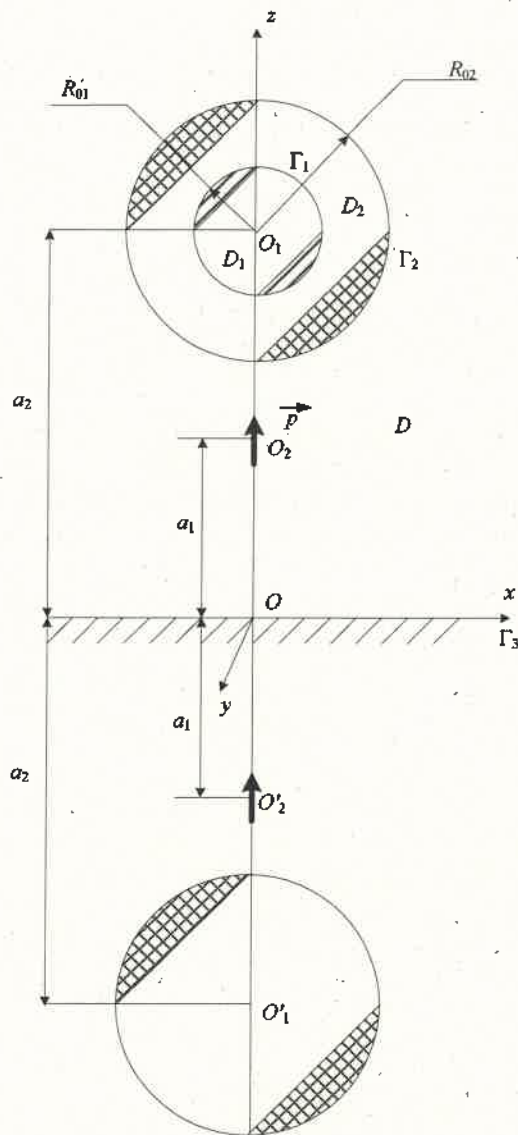


Рисунок 1 – Электродинамическая система к примеру расчета

Для решения задачи (9) потенциал поля сферы в области  $D$  ищется в виде (2) и представляется в сферической системе координат, связанной с точкой  $O_1$ . Потенциал диполя задается в виде (6) в сферической системе координат, связанной с точкой  $O_2$ . Потенциал поля сферы в области  $D_2$  ищется в виде (4) и представляется в сферической системе координат, связанной с точкой  $O_1$ . Условия на бесконечности и в центре сферы, таким образом, выполняются автоматически.

Для выполнения граничного условия (12) вводятся зеркальные отображения точек  $O_1$  и  $O_2$ . Тогда потенциал отражения сферы  $u_1$  задается в виде (5), потенциал отражения диполя  $u_2$  – в виде (7).

Для удовлетворения граничному условию (10) в формуле (4)  $r = r_1 = R_{01}$ ,  $P_k(\cos \Theta) = 1$  при  $k = 0$  и члены с  $P_k(\cos \Theta) = 0$  если  $k \neq 0$ . Тогда из (4) следует

$$c_{20} = V - c_{10} \quad c_{2k} = -c_{1k}. \quad (13)$$

Тогда выражение для  $u_0$  имеет вид и удовлетворяет граничному условию (10)

$$u_0 = V \frac{R_{01}}{r_1} + \left(1 - \frac{R_{01}}{r_1}\right) c_{01} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \left[ \left(\frac{r_1}{R_{01}}\right)^m - \left(\frac{R_{01}}{r_1}\right)^{m+1} \right] P_m(\cos \Theta_1), \quad (14)$$

где  $\Theta_1$  – угловая координата в сферической системе координат с центром в  $O_1$ ,  $m$  – счетная переменная.

Коэффициенты в (14) и в (2) применительно к данной задаче выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (11). Для чего потенциалы диполя, отражения диполя в земле и отражения сферы в земле переразлагаются в системе координат  $O_1$  по теореме сложения (201.3.3) [19]. В результате получаются разложения

$$u_2 = p \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+1)}{(a_2 - a_1)^{m+1}} r_1^m P_m(\cos \Theta_1), \quad (15)$$

$$u_2' = p \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+1)}{(a_2 + a_1)^{m+1}} r_1^m P_m(\cos \Theta_1), \quad (16)$$

$$u_1' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (R_{02})^{n-1} (-1)^{n+1} \times \\ \times \left( \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(n+m)}{n! m! (2a_2)^{n+m+1}} r_1^m P_m(\cos \Theta_1) \right). \quad (17)$$

Разложения (15)–(17) и выражения потенциалов сферы (2) и (14) подставляются в граничные условия (11). После преобразований и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках  $P_k(\cos \Theta)$  [10] получаются сумматорные уравнения для отыскания коэффициентов разложений

$$m = 0$$

$$a_0 \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{R_{02}^{n+2}}{(2a_2)^{n+1}} \right) + p \left( \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} + \frac{1}{(a_2 + a_1)^2} \right) = \\ = V \frac{R_{01}}{R_{02}} + \left( 1 + \frac{R_{01}}{R_{02}} \right) c_{10}; \quad (18)$$

$$\frac{a_0}{R_{02}} = -V \frac{R_{01}}{R_{02}^2} + \frac{R_{01}}{R_{02}^2} c_{10}; \quad (19)$$

$$m \neq 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m + p (-1)^m (m+1) R_{02}^m \left( \frac{1}{(a_2 - a_1)^{m+2}} + \frac{1}{(a_2 + a_1)^{m+2}} \right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_{02}^{2n+2m+1} (-1)^{n+m+1} \frac{(n+m)!}{n! m! (2a_2)^{n+m+1}} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \left[ \left(\frac{R_{02}}{R_{01}}\right)^m - \left(\frac{R_{01}}{R_{02}}\right)^{m+1} \right]; \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m + p (-1)^m (m+1) R_{02}^m \left( \frac{1}{(a_2 - a_1)^{m+2}} + \frac{1}{(a_2 + a_1)^{m+2}} \right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_{02}^{2n+2m+1} (-1)^{n+m+1} \frac{(n+m)!}{n! (m-1)! (2a_2)^{n+m+1}} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \left[ \frac{m R_{02}^{m-1}}{R_{01}^m} + R_{01}^{m+1} R_{02}^{-(m+2)} (m+1) \right]. \quad (21)$$

Из уравнений (18)–(21) методом усечения может быть получена система алгебраических уравнений для



отыскания коэффициентов разложений и получения рядов, в которых удержано необходимое для получения требуемой точности число членов [20].

Описание методики аналитического решения задач расчета электростатического поля в системах соосных металлических и диэлектрических сфер и пример расчета приводят к выводу, что предлагаемая методика позволяет поставить и решить большое число задач с различным числом сфер и источников электростатического поля. При этом учитывается существенный для технических задач фактор – наличие поверхности земли. Такие задачи с достаточной степенью точности приближения соответствуют конструкциям установок высокого напряжения. Поэтому эти задачи могут использоваться как для отладки программно-математического обеспечения расчета электростатических полей, так и для предварительного анализа электростатического поля в технических устройствах. Методика основана на современном и постоянно развивающемся математическом аппарате – теоремах сложения, поэтому допускает дальнейшее развитие и обобщение. В частности, методика может быть перенесена на случай низкочастотных квазистатических электрических полей. В этом случае решение задачи расчета электрического поля ищется в потенциальном приближении, рассматриваются сферы из несовершенного диэлектрика, на поверхности которых заданы усредненные граничные условия для потенциала поля [10]. Всё это делает возможным широкое использование предлагаемой методики в научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработках в области техники высоких напряжений.

Следует отметить, что сравнительная простота применяемых математических методов открывает возможность использования этой методики в учебных целях при изучении таких дисциплин, как «Теоретические основы электротехники», «Техника высоких напряжений», «Инженерная электрофизика».

#### Список литературы

- 1 Чайкина, Л. П. Техника высоких напряжений / Л. П. Чайкина. – М. : Учебно-методический центр по образованию на ж.-д. трансп. – 2005. – 229 с.
- 2 Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / И. П. Белоусова [и др.] ; под ред. Е. С. Колечникова. – М. : Издат. дом МЭИ, 2016. – 248 с.
- 3 Гримальский, О. В. Расчет электрических полей изоляционных конструкций / О. В. Гримальский, В. Л. Иванов. – Кишинев : Штинница, 1988. – 106 с.
- 4 Техника высоких напряжений: теоретические и практические основы применения / М. Бейер [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 553 с.
- 5 Cisneros, F. Analytic solutions for harmonic potentials involving concentric charged dielectric spheres: Master of science thesis / F. Cisneros. – Houston : Texas A&M University, 2018. – 54 p.
- 6 Шушкевич, Г. Ч. Экранирование электростатического поля системой экранов: сплюснутая незамкнутая эллипсоидальная оболочка – плоскость с круговым отверстием / Г. Ч. Шушкевич // Вестник Гродненского государственного университета им. Янки Купалы. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление. – 2018. – Т. 8, № 1. – С. 52–59.

Получено 01.04.2022

**D. V. Komnatny.** Analytical solution of electrostatic fields calculation problems of high voltage engineering by additional theorem method.

The obtaining of analytical solutions of electrostatic field calculations problems is considered. These problems are necessary for electrostatic fields calculations numerical methods software program debugging. Besides that, shown problems can be used for preliminary analysis of electrostatic fields in high-voltage installations. It is shown, that modern standard of variable separation method for Laplace equation gives the possibility of common methods for statement and solving model problems creation. The use of addition theorems for potential redecomposition in spherical coordinates systems is shown. Such redecomposition allows to satisfy boundary conditions, obtain the algebraic equations system for expansions into Legendre polynomial series coefficients. There fore, proposed methods can found a wide application in scientific-research and engineering development of high voltage engineering.