

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Техническая физика и теоретическая механика»

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. ЧАГАНОВА, И. Е. КРАКОВА

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2015

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Техническая физика и теоретическая механика»

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. ЧАГАНОВА, И. Е. КРАКОВА

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ИХ СИСТЕМ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
в качестве учебно-методического пособия
для студентов заочной формы обучения учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям
первой ступени высшего образования*

Гомель 2015

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213
Ч-49

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор, заведующий лабораторией «Математическое моделирование сложных систем» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины В. В. Можаровский;
канд. физ.-мат. наук, доцент, зам. декана заочного факультета Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого Д. Г. Кроль.

Черноус, Д. А.

Ч-49 Динамика твердых тел и их систем: учеб.-метод. пособие / Д. А. Черноус, О. С. Чаганова, И. Е. Кракова ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 115 с.
ISBN 978-985-554-388-7

Изложены краткие сведения из раздела «Динамика» курса теоретической механики в соответствии с программой технических вузов. Разобраны примеры решения задач по изучаемым темам. Приведены условия заданий контрольных работ по теоретической механике.

Предназначено для студентов технических специальностей заочного факультета. Также может использоваться при изучении курса «Теоретическая механика» студентами очной формы обучения.

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.213

ISBN 978-985-554-388-7

© Черноус Д. А., Чаганова О. С., Кракова И. Е., 2015
© Оформление. УО «БелГУТ», 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Варианты заданий для выполнения контрольной работы	5
Д-1 Динамические уравнения движения материальной точки	6
Некоторые положения теории	6
Условие задания Д-1	7
Пример выполнения задания	11
Д-2 Общие теоремы динамики материальной точки	17
Некоторые положения теории	17
Условие задания Д-2	19
Пример выполнения задания	24
Д-3 Динамика простейших движений твердого тела	30
Некоторые положения теории	30
Условие задания Д-3	31
Пример выполнения задания	36
Д-4 Динамика плоскопараллельного движения твердого тела	41
Некоторые положения теории	41
Условие задания Д-4	42
Пример выполнения задания	46
Д-5 Общие теоремы динамики материальной системы	50
Некоторые положения теории	50
Условие задания Д-5	52
Пример выполнения задания	57
Д-6 Применение принципа возможных перемещений для анализа механической системы	64
Некоторые положения теории	64
Условие задания Д-6	65
Пример выполнения задания	70
Д-7 Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей составной конструкции	74
Некоторые положения теории	74
Условие задания Д-7	74
Пример выполнения задания	78
Д-8 Применение общего уравнения динамики к описанию движения материальной системы	87
Некоторые положения теории	87
Условие задания Д-8	88
Пример выполнения задания	93
Д-9 Решение уравнений Лагранжа второго рода	98
Некоторые положения теории	98
Условие задания Д-9	100
Пример выполнения задания	105
Список рекомендуемой литературы	113
Приложение А Учебная программа раздела «Динамика» курса теоретической механики	114

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие содержит задания для контрольных работ по разделу «Динамика» курса теоретической механики. Каждое задание содержит 30 вариантов задач. Здесь же приводятся примеры решения задач и краткий обзор материала.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения к выполнению контрольных работ и сдаче экзамена (зачета) по разделу «Динамика». В процессе подготовки студент должен использовать не только материал пособия, но и учебники [1–4], а также конспект лекций и практических занятий.

Общие схемы и порядок решения экзаменационных (зачетных) задач и задач контрольных работ будут соответствовать одному из заданий данного пособия. Условия задач и значения исходных данных могут отличаться. При подготовке к выполнению контрольных работ и решению экзаменационных (зачетных) задач необходимо первоначально ознакомиться с теоретическим материалом и разобрать пример решения задачи соответствующего задания (Д-1–Д-9). Буква «Д» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Динамика». Затем студент должен самостоятельно решить минимум одну из 30 задач задания. Выбор примера рекомендуется осуществлять по двум последним цифрам учебного шифра согласно таблице на странице 5 пособия.

Содержание контрольной работы и экзаменационных (зачетных) задач определяется преподавателем на сессии, предшествующей выполнению контрольной и сдаче экзамена (зачета). При этом одна контрольная может содержать несколько задач различных типов (Д-1–Д-9).

С вопросами, возникающими в процессе самостоятельной подготовки, следует обращаться в дежурные дни на кафедру «Техническая физика и теоретическая механика» Белорусского государственного университета транспорта (аудитория 1416). Консультацию по решению задач и теоретическим вопросам можно получить у дежурного преподавателя. Вопросы, относящиеся к содержанию контрольной работы и экзаменационных (зачетных) задач, желательно выяснять у преподавателя, который выдавал задание на сессии.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий			Учебный шифр	Варианты заданий		
	Д-1, Д-4, Д-7	Д-2, Д-5, Д-8	Д-3, Д-6, Д-9		Д-1, Д-4, Д-7	Д-2, Д-5, Д-8	Д-3, Д-6, Д-9		Д-1, Д-4, Д-7	Д-2, Д-5, Д-8	Д-3, Д-6, Д-9		Д-1, Д-4, Д-7	Д-2, Д-5, Д-8	Д-3, Д-6, Д-9
01	7	3	16	26	24	4	22	51	1	7	19	76	11	5	19
02	26	14	8	27	30	22	11	52	9	15	26	77	24	19	9
03	11	27	29	28	22	17	3	53	4	25	28	78	22	29	11
04	18	2	17	29	8	8	20	54	16	2	13	79	2	8	15
05	22	25	1	30	5	19	26	55	11	28	30	80	15	18	29
06	4	16	20	31	14	20	13	56	6	30	17	81	21	26	17
07	1	6	14	32	9	9	24	57	17	26	4	82	18	3	12
08	14	28	2	33	20	23	7	58	30	11	22	83	26	27	9
09	21	11	8	34	12	5	16	59	14	29	8	84	9	25	30
10	8	9	15	35	7	28	25	60	26	17	11	85	4	10	13
11	16	22	10	36	15	14	9	61	27	13	5	86	16	23	28
12	25	12	23	37	25	30	4	62	30	28	1	87	13	1	23
13	29	24	7	38	2	10	18	63	13	24	9	88	23	16	6
14	15	4	19	39	23	24	1	64	24	6	30	89	6	7	20
15	23	20	4	40	10	12	14	65	7	22	14	90	29	13	2
16	12	13	24	41	17	29	7	66	28	26	3	91	3	26	21
17	19	30	3	42	19	16	23	67	15	9	12	92	17	21	10
18	10	7	18	43	29	1	19	68	12	20	25	93	28	22	5
19	3	27	12	44	6	21	12	69	19	8	6	94	14	2	26
20	9	10	22	45	13	6	21	70	2	21	21	95	5	29	17
21	27	5	14	46	16	27	2	71	3	12	24	96	10	17	25
22	5	23	16	47	21	25	10	72	25	19	5	97	1	24	15
23	13	18	10	48	18	11	27	73	8	3	18	98	27	15	6
24	20	1	28	49	4	3	15	74	20	15	27	99	20	30	11
25	6	14	27	50	11	18	13	75	28	4	16	00	12	23	29

Д-1 ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Некоторые положения теории

Динамические уравнения движения материальной точки устанавливают связи между координатами, скоростями и временем движения точки с учетом сил, действующих на нее. Эти уравнения являются следствием из основного закона динамики материальной точки: *произведение массы материальной точки m на ее линейное ускорение \bar{a} равно геометрической сумме сил, действующих на точку,*

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i, \quad (1.1)$$

где \bar{F}_i – i -я сила, действующая на точку. Здесь и далее суммирование производится по всем силам, приложенным к материальной точке.

Если траектория движения точки неизвестна, векторное равенство (1.1) проецируется на оси декартовой системы координат (x, y, z) :

$$ma_x = \sum F_{xi}, \quad ma_y = \sum F_{yi}, \quad ma_z = \sum F_{zi}, \quad (1.2)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения материальной точки на оси координат;

F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} – проекции i -й силы на соответствующие оси.

Проекции ускорения связаны с проекциями скорости и координатами точки следующим образом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.3)$$

Если траектория движения точки известна, то векторное выражение (1.1) удобно проецировать на естественные оси координат (τ – касательная ось, направляется по касательной к траектории движения точки в сторону ее движения, n – нормальная ось, направляется к центру кривизны траектории, b – бинормаль, направляется перпендикулярно первым двум так, чтобы оси образовывали правую тройку векторов):

$$ma_\tau = \sum F_{\tau i}, \quad ma_n = \sum F_{ni}, \quad ma_b = \sum F_{bi}, \quad (1.4)$$

где a_τ, a_n, a_b – проекции вектора ускорения на естественные оси координат.

Касательное и нормальное ускорения точки определяются следующим образом:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.5)$$

где $s(t)$ – дуговая координата точки;

ρ – радиус кривизны траектории движения точки.

Так как движение вдоль бинормали отсутствует, то $a_b = 0$.

Условие задания Д-1

Материальная точка массой m , имея в точке A скорость v_A , движется по траектории ABC . По прямолинейному участку AB точка движется под действием активной силы P в течение времени t_1 и проходит путь s_1 . По участку BC точка движется в течение времени t_2 (рисунок 1.1).

На основании исходных данных, приведенных в таблице 1.1, для участков AB и BC выполнить следующие действия:

1 Определить закон движения материальной точки.

2 Используя известный закон движения точки и зависимость от времени проекций скорости точки, дополнительно определить:

– для нечетных вариантов – путь s_1 ; скорости материальной точки в положениях B , C ; размер d ;

– для четных вариантов – начальную скорость; размер d ; скорость точки v_D через время t_3 после отрыва точки от наклонной плоскости.

Таблица 1.1 – Исходные данные к заданию Д-1

Вариант	m , кг	f	t_1 , с	t_3 , с	v_A , м/с	s_1 , м	h , м	P , Н	Угол, град	
									α	β
1	2	0,2	2	–	4	–	6	30	30	–
2	0,5	0,1	1	1	–	4	6	9	30	–
3	4	0,1	1	–	6	–	–	50	30	45
4	1	0,06	2	1,5	–	7	–	10	15	45
5	3,5	0,4	2,5	–	6	–	–	40	45	60
6	0,8	0,1	1	0,6	–	4	–	13	30	60
7	2	0,15	0,5	–	0	–	–	6	30	–
8	4	0,6	2	0,4	–	5	–	10	30	–
9	1,5	0,4	1	–	0	–	3	11	30	45
10	2	0,6	0,8	0,5	–	3	9	20	30	30

Продолжение таблицы 1.1

Вариант	m , кг	f	t_1 , с	t_3 , с	v_A , м/с	s_1 , м	h , м	P , Н	Угол, град.	
									α	β
11	2,5	0,2	1,5	–	2	–	1,4	15	60	–
12	2	0,1	3	1	–	7	8	5	60	–
13	1	0,25	2	–	1,2	–	4,5	17	30	–
14	4	0,15	1	2	–	2,5	5	55	30	–
15	1,5	0,1	2	–	1	–	–	20	30	15
16	1	0,2	1,5	0,5	–	6	–	14	30	45
17	1,2	0,3	1	–	2	–	3	3	15	45
18	3,5	0,4	0,5	0,3	–	1	4	7	30	45
19	0,6	0,25	2,5	–	1,5	–	20	1	45	30
20	2	0,2	1	1	–	5	11	10	30	45
21	3	0,5	2	–	4	–	1	60	30	30
22	0,6	0,1	2	1,2	–	10	4	9	30	45
23	1	0,1	0,8	–	1	–	–	5	30	–
24	1,5	0,2	2	0,6	–	12	–	12	30	–
25	2	0,25	0,5	–	2	–	0,5	15	60	–
26	5	0,3	1,5	2	–	4	6	40	60	–
27	0,8	0,3	3	–	1	–	2,5	8	30	45
28	1	0,2	1	0,2	–	1	2	5	45	60
29	3	0,15	2,5	–	10	–	–	20	30	45
30	5	0,1	2	1	–	3	5	10	60	–

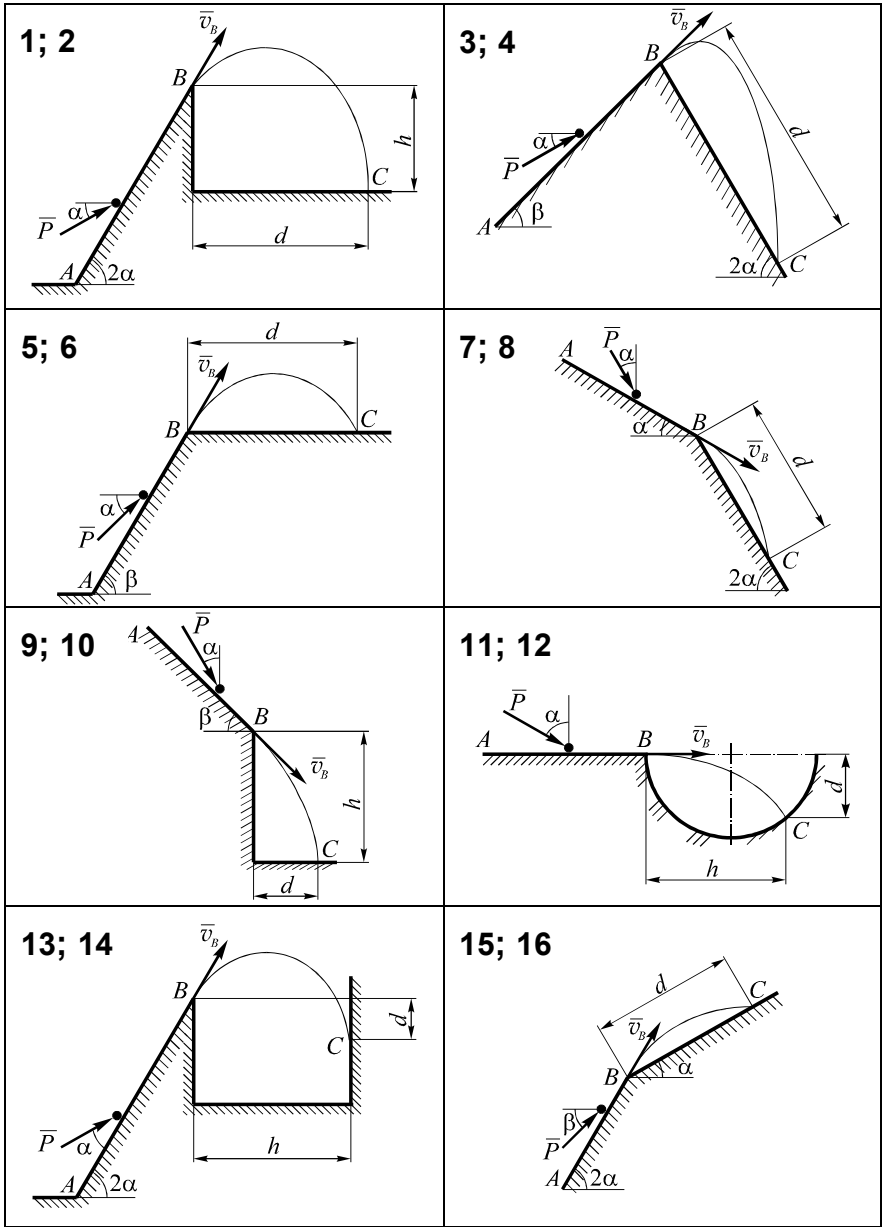


Рисунок 1.1 (начало)

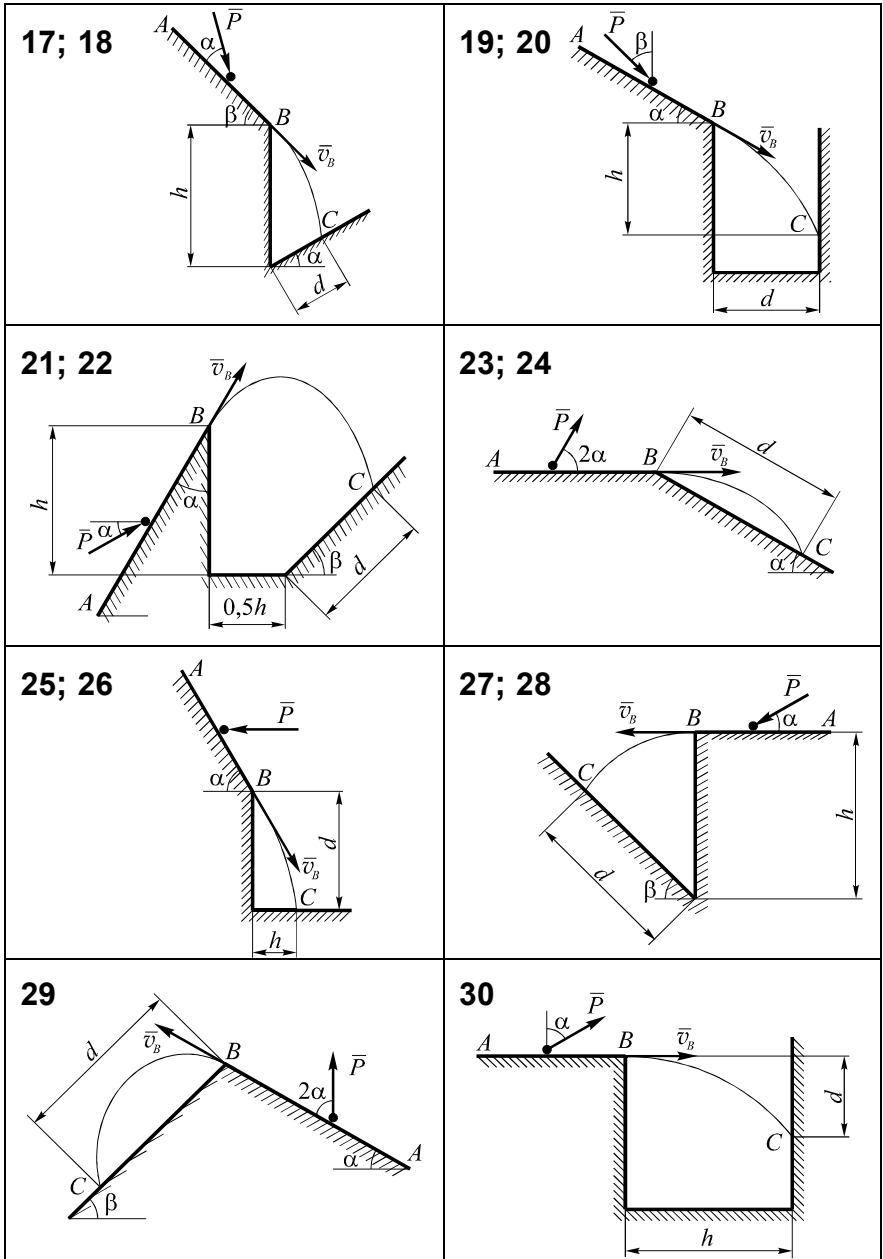


Рисунок 1.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Тело массой $m = 1$ кг, принимаемое за материальную точку, движется по траектории ABC , как показано на рисунке 1.2. На прямолинейном участке AB на нее действует сила $P = 12$ Н. Время движения по участку AB $t_1 = 3$ с, а расстояние между точками A и B $s_1 = 8,25$ м. Известно, что $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $h = 1$ м, коэффициент трения скольжения $f = 0,2$.

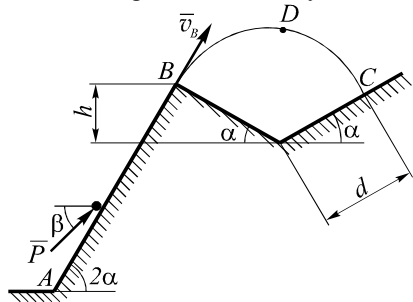


Рисунок 1.2

Определить: скорости v_A , v_B в положениях A , B и C ; длину отрезка d (см. рисунок 1.1); скорость материальной точки v_D через время $t_3 = 0,75$ с после начала полета. Сопротивлением воздуха на участке BC пренебречь.

Решение

1 Рассмотрим движение материальной точки на участке AB (рисунок 1.3).

1.1 Указываем векторы сил, действующих на тело: \vec{G} – сила тяжести; \vec{P} – заданная активная сила; \vec{N} – нормальная реакция; $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения.

1.2 Выбираем оси координат. На рассматриваемом участке движение точки прямолинейно, поэтому ось x направим в сторону движения точки.

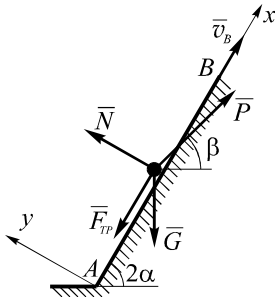


Рисунок 1.3

1.3 Запишем уравнение движения материальной точки в векторной форме

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{G} + \vec{N}.$$

В проекциях на оси координат

$$ma_x = -F_{\text{тр}} - G \sin 2\alpha + P \cos(2\alpha - \beta),$$

$$ma_y = N - G \cos 2\alpha - P \sin(2\alpha - \beta).$$

В связи с тем, что материальная точка движется прямолинейно, $a_x = a_\tau$, проекция ускорения на ось y равна нулю $a_y = 0$. Тогда динамические

уравнения примут вид

$$\begin{cases} ma_\tau = -F_{\text{тр}} - mg \sin 2\alpha + P \cos(2\alpha - \beta), \\ 0 = N - mg \cos 2\alpha - P \sin(2\alpha - \beta). \end{cases} \quad (1.6)$$

Для расчета силы трения скольжения воспользуемся законом Кулона $F_{\text{тр}} = fN$. Из второго уравнения системы (1.6) следует, что

$$N = mg \cos 2\alpha + P \sin(2\alpha - \beta).$$

Тогда из первого уравнения, с учетом связи проекции скорости и ускорения $a_{\tau} = \frac{dv_x}{dt}$, получим

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} [-fmg \cos 2\alpha - fP \sin(2\alpha - \beta) - mg \sin 2\alpha + P \cos(2\alpha - \beta)].$$

Подставим известные численные значения величин, входящих в найденное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{12}{1} (\cos 15^\circ - 0,2 \sin 15^\circ) - 9,8 (\sin 60^\circ + 0,2 \cos 60^\circ) = \\ &= 10,97 - 9,467 = 1,503. \end{aligned}$$

1.4 Решим полученное дифференциальное уравнение.

Получено дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Для его решения перенесем dt в правую часть

$$dv_x = 1,503 dt.$$

Интегрируем в пределах, соответствующих интервалу от начального момента времени ($t = 0$) до произвольного момента t

$$\int_{v_{x0}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t 1,503 dt.$$

Здесь v_{x0} – проекция начальной скорости точки на ось x . Так как материальная точка движется вдоль оси x , то v_{x0} совпадает с начальной скоростью $v_{x0} = v_0 = v_A$. После интегрирования получим

$$v_x(t) = 1,503t + v_A. \quad (1.7)$$

Для нахождения закона движения $x(t)$ решаем дифференциальное уравнение

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 1,503t + v_A,$$

$$dx = (1,503t + v_A) dt,$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (1,503t + v_A) dt.$$

Начало координат совпадает с точкой A . Следовательно, начальная координата $x_0 = 0$. После интегрирования имеем

$$x(t) = 1,503 \frac{t^2}{2} + v_A t = 0,752t^2 + v_A t. \quad (1.8)$$

1.5 Используя полученный закон движения на участке AB , определим искомые величины v_A, v_B . Из условия следует, что в положении B

$$t = t_1; \quad x(t_1) = x_B = s_1; \quad v_x(t_1) = v_B.$$

Тогда подстановка в уравнения (1.7) и (1.8) дает:

$$\begin{cases} v_B = 1,503t_1 + v_A, \\ s_1 = 0,752t_1^2 + v_A t_1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим скорости v_A и v_B . Из второго уравнения системы следует

$$v_A = \frac{1}{t_1} (s_1 - 0,752t_1^2).$$

Подставим известные численные значения

$$v_A = \frac{1}{3} (8,25 - 6,768) = 0,494 \text{ м/с}.$$

Тогда из первого уравнения системы для скорости v_B получим:

$$v_B = 1,503t_1 + 0,494 = 5,003 \text{ м/с}.$$

2 Рассмотрим движение материальной точки на участке BC (рисунок 1.4).

2.1 Точка движется только под действием силы тяжести \vec{G} .

2.2 Введем оси координат. В связи с тем, что траектория движения материальной точки заранее не известна, выберем декартовы оси координат с началом в точке B . На материальную точку действует только сила тяжести, поэтому

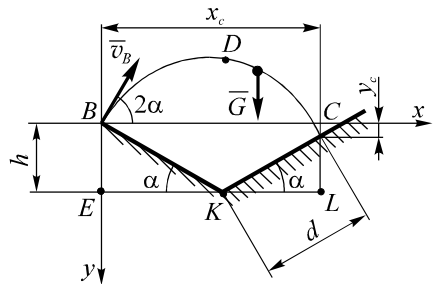


Рисунок 1.4

одну из осей (ось y) направим параллельно этой силе, а вторую – перпендикулярно ей.

2.3 Запишем динамические уравнения движения в проекциях на выбранные оси

$$\begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = G, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = mg. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$. Из второго

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = g.$$

2.4 Найдем законы изменения координат точки. Сначала определим зависимость от времени координаты x . Для этого решим дифференциальное уравнение $\frac{dv_x}{dt} = 0$. Поскольку производная от проекции скорости по времени равна нулю, то эта проекция не зависит от времени. Следовательно, для нее можно записать: $v_x(t) = v_{x0}$. Здесь v_{x0} – проекция начальной скорости на участке BC на ось x . Для участка BC начальной является точка B . Из рисунка 1.4 следует, что скорость материальной точки в положении B направлена вдоль AB . Тогда проекция этой скорости на ось x определяется следующим образом: $v_{xB} = v_B \cos 2\alpha$. Следовательно,

$$v_x(t) = v_B \cos 2\alpha. \quad (1.9)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для нахождения $x(t)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_B \cos 2\alpha.$$

Разделим переменные и проинтегрируем в пределах от начального момента движения на участке BC до произвольного момента t

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_B \cos 2\alpha dt.$$

Начало координат находится в точке B . Следовательно, начальная координата $x_0 = 0$. После интегрирования находим

$$x(t) = v_B \cos 2\alpha \cdot t. \quad (1.10)$$

Подставив в последнее равенство известные значения угла α и скорости v_B , получим зависимость координаты x материальной точки от времени

$$x(t) = 2,502t.$$

Для определения $y(t)$ найдем зависимость от времени проекции скорости точки на ось y . Для этого решим дифференциальное уравнение

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = g.$$

Разделяем переменные: $dv_y = gdt$. Интегрируем в пределах от начального момента движения на участке BC до произвольного момента t

$$\int_{v_{y0}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t gdt.$$

Здесь v_{y0} – проекция начальной скорости на ось y . Для участка BC начальной является точка B . Из рисунка 1.4 следует, что проекция скорости точки в положении B определяется следующим образом $v_{By} = -v_B \sin 2\alpha$. Следовательно,

$$v_y(t) = gt - v_B \sin 2\alpha. \quad (1.11)$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение для нахождения $y(t)$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt - v_B \sin 2\alpha.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$dy = (gt - v_B \sin 2\alpha)dt,$$
$$\int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t (gt - v_B \sin 2\alpha)dt.$$

Так как начало координат находится в положении B , то $y_0 = 0$. После интегрирования получим

$$y(t) = \frac{g}{2}t^2 - v_B \sin 2\alpha \cdot t. \quad (1.12)$$

Подставив в последнее равенство известное значение угла α и найденное ранее v_B , находим зависимость координаты y материальной точки от времени

$$y(t) = 4,9t^2 - 4,333t.$$

2.5 Используя полученные законы изменения координат точки на участке BC , определим искомые величины d , v_D . Из рисунка 1.4 следует, что в положении C

$$t = t_2; \quad x(t_2) = x_C = EK + KL = h \operatorname{ctg} \alpha + d \cos \alpha,$$

$$y(t_2) = y_C = BE - CL = h - d \sin \alpha.$$

Здесь t_2 – время движения на участке BC (время полета). Используя уравнения (1.10) и (1.12), получим

$$h \operatorname{ctg} \alpha + d \cos \alpha = v_B \cos 2\alpha \cdot t_2,$$

$$h - d \sin \alpha = \frac{g}{2} t_2^2 - v_B \sin 2\alpha \cdot t_2.$$

Подставим известные численные значения

$$\begin{cases} 1,732 + 0,866d = 2,502t_2, \\ 1 - 0,5d = 4,9t_2^2 - 4,333t_2. \end{cases}$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными: t_2 и d . Выразим из первого уравнения системы d :

$$d = \frac{2,502}{0,866} t_2 - \frac{1,732}{0,866} = 2,889t_2 - 2.$$

Подставим найденное выражение во второе уравнение системы

$$1 - 0,5(2,889t_2 - 2) = 4,9t_2^2 - 4,333t_2, \quad \text{или} \quad 4,9t_2^2 - 2,888t_2 - 2 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим

$$t_2 = \frac{1}{9,8} (2,888 \pm \sqrt{2,888^2 + 4 \cdot 4,9 \cdot 2}), \quad t_2^- = -0,409 \text{ с}; \quad t_2^+ = 0,998 \text{ с}.$$

Так как время не может принимать отрицательных значений, то оставим только положительный корень данного уравнения $t_2 = 0,998$ с (если оба корня окажутся положительными, то следует оставлять наименьший). Окончательно получаем

$$d = \frac{1}{0,866} (2,502t_2 - 1,732) = 0,883 \text{ м}.$$

Для определения скорости v_D необходимо в выражения для проекций скорости (1.9) и (1.11) подставить значение времени t_3 :

$$v_{xD} = v_x(t_3) = 2,502 \text{ м/с},$$

$$v_{yD} = v_y(t_3) = 9,8t_3 - 4,333 = 3,017 \text{ м/с}.$$

Тогда модуль скорости точки v_D определяется следующим образом:

$$v_D = \sqrt{v_{xD}^2 + v_{yD}^2} = 3,919 \text{ м/с}.$$

Д-2 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Некоторые положения теории

Общие теоремы динамики представляют собой преобразованные выражения основного закона динамики материальной точки, которые позволяют облегчить решение некоторых частных задач. К ним относятся: теорема об изменении количества движения материальной точки, теорема об изменении момента количества движения материальной точки, теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Теорема об изменении количества движения материальной точки формулируется так: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на точку сил за тот же промежуток времени,*

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}(\bar{F}_i),$$

где \bar{v}_0, \bar{v}_1 – скорость точки в начальный и конечный момент времени соответственно.

Количество движения материальной точки – векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость

$$\bar{Q} = m\bar{v}.$$

Импульс силы за некоторый промежуток времени τ определяется как интеграл от силы по времени в пределах от нуля до τ :

$$\bar{S}(\bar{F}) = \int_0^{\tau} \bar{F} dt.$$

При решении задач векторное выражение теоремы проецируется на оси координат.

Суть теоремы об изменении момента количества движения материальной точки состоит в следующем: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно центра O равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра*

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i).$$

Моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра O называется векторная величина \bar{L}_O , определяемая векторным произведением радиус-вектора точки \bar{r} на вектор ее количества движения

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times \bar{Q} = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии формулируется следующим образом: *изменение кинетической энергии материальной точки при перемещении ее из начального положения в конечное равно сумме работ действующих на нее сил $A(\bar{F})$ на том же перемещении*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_i).$$

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости,

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы характеризует действие силы на тело в зависимости от перемещения точки приложения силы. Различают элементарную работу силы $dA(\bar{F})$ и работу силы на конечном перемещении $A(\bar{F})$.

Элементарной работой силы \bar{F} называют скалярное произведение вида $dA(\bar{F}) = \bar{F} \cdot d\bar{r}$.

Здесь $d\bar{r}$ – вектор элементарного перемещения точки приложения силы \bar{F} , направленный по касательной к траектории точки. В соответствии с определением скалярного произведения для определения элементарной работы силы можно записать следующее выражение:

$$dA(\bar{F}) = F_\tau ds \cos \alpha,$$

где F_τ – проекция силы \bar{F} на направление вектора скорости точки приложения силы;

ds – элементарное перемещение точки приложения силы \bar{F} ;

α – угол между вектором силы и вектором скорости.

Работа силы на конечном перемещении получается в результате интегрирования

$$A(\bar{F}) = \int_{s_0}^{s_1} dA = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds,$$

где s_0, s_1 – дуговая координата начального и конечного положений точки соответственно.

Работа силы положительна, если эта сила способствует движению точки, в противном случае работа силы отрицательна.

Рассмотрим некоторые случаи определения работ сил.

Постоянная сила. Если на материальную точку действует постоянная по модулю и направлению сила, то работа такой силы на конечном перемещении определяются следующим образом:

$$A(\overline{F}) = Fs \cos \alpha = F_{\tau} s,$$

где s – перемещение точки приложения силы;

F_{τ} – проекция силы F на касательную к траектории движения точки;

α – угол между вектором силы и направлением перемещения.

Сила тяжести. При перемещении материальной точки из начального в конечное положение работа силы тяжести \overline{G} определяется по формуле

$$A(\overline{G}) = mg(h_0 - h_1) = mg\Delta h.$$

Здесь h_0, h_1 – вертикальная координата начального и конечного положений точки соответственно; Δh – разница высот начального и конечного положений точки;

Сила упругости. Если при движении точки на нее действует сила упругости пружины с коэффициентом жесткости c (Н/м), то работа этой силы

$$A(F_{\text{упр}}) = \frac{c}{2} [\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2],$$

где $\Delta l_0, \Delta l_1$ – деформация пружины в начальном и конечном положениях материальной точки соответственно.

Области применения теорем.

Если по условию задачи заданы: начальная скорость, *перемещение*, силы, то для определения конечной скорости движения точки применяется теорема об изменении кинетической энергии.

Если в задаче в качестве исходных данных выступают: начальная скорость, силы и *время движения*, то для определения конечной скорости применяется теорема об изменении количества движения материальной точки.

Условие задания Д-2

Шарик массой m , принимаемый за материальную точку, приобретает в начальном положении скорость v_A , движется по изогнутой трубке $ABCD$, расположенной в вертикальной плоскости. На прямолинейном участке AB длины L установлена пружина с коэффициентом жесткости c . Пружина в начальном положении сжата на Δl_A по сравнению с недеформированным состоянием. После возвращения пружины в недеформированное состояние шарик отделяется от нее. Время движения по участку CD равно t_{CD} . На прямолинейных участках коэффициент трения скольжения шарика по трубке f ,

на криволинейных участках трение не учитывать. На основании исходных данных, приведенных в таблице 2.1, определить скорости шарика в положениях B , C , D (рисунок 2.1).

Таблица 2.1 – Исходные данные к заданию Д-2

Вариант	m , кг	Угол, град		f	c , Н/см	v_A , м/с	Δl_A , см	L , см	R , м	t_{CD} , с
		α	β							
1	1	60	45	0,4	2	3	10	38	0,4	0,5
2	2	30	–	0,2	0,3	1	5	10	0,9	1
3	1,5	30	60	0,1	0,3	5	15	66	0,3	0,2
4	1	60	–	0,6	1	2	20	25	0,2	1
5	1	30	–	0,3	0,2	5	9	49	0,1	0,3
6	2	60	–	0,1	1,5	7	18	18	0,5	0,6
7	3	30	45	0,1	0,2	4	10	33	1,2	0,5
8	3	60	–	0,2	0,6	6	20	40	0,6	0,3
9	2	60	–	0,5	0,2	4	11	41	0,1	0,1
10	1	60	–	0,1	1	3	19	59	1	1,5
11	1	60	–	0,1	0,4	5	31	41	1,4	1,2
12	2,5	45	–	0,2	1,5	0	20	50	1,1	0,8
13	2	60	45	0,4	0,3	2	44	64	1,5	2
14	0,5	45	30	0,3	0,5	1	25	45	1,6	0,4
15	1	30	–	0,2	0,6	3	15	19	0,2	0,2
16	3	60	–	0,5	0,5	4	13	23	0,5	3
17	2,5	45	–	0,1	1,2	2	16	20	0,4	0,1
18	1,2	45	30	0,4	0,3	1	22	42	1	1
19	1	60	–	0,6	2	4	17	17	0,3	0,2
20	2	60	–	0,5	0,2	0	7	17	1	2
21	0,8	30	–	0,1	0,4	1	25	35	0,5	5
22	1	–	–	0,3	0,1	1	10	10	0,7	0,5
23	1	30	–	0,2	0,4	3	20	26	0,8	1
24	3	30	–	0,5	3	3	35	39	0,2	2
25	2	60	–	0,1	0,5	0	14	24	1,2	2
26	2,5	60	–	0,2	2,5	5	15	15	0,5	0,6
27	1	30	–	0,6	0,6	3	10	20	1,3	1
28	0,5	30	–	0,4	0,1	2	8	10	0,1	0,1
29	1	60	–	0,1	0,3	3	50	54	0,4	2
30	2	–	–	0,3	0,3	2	25	40	1,2	1,5

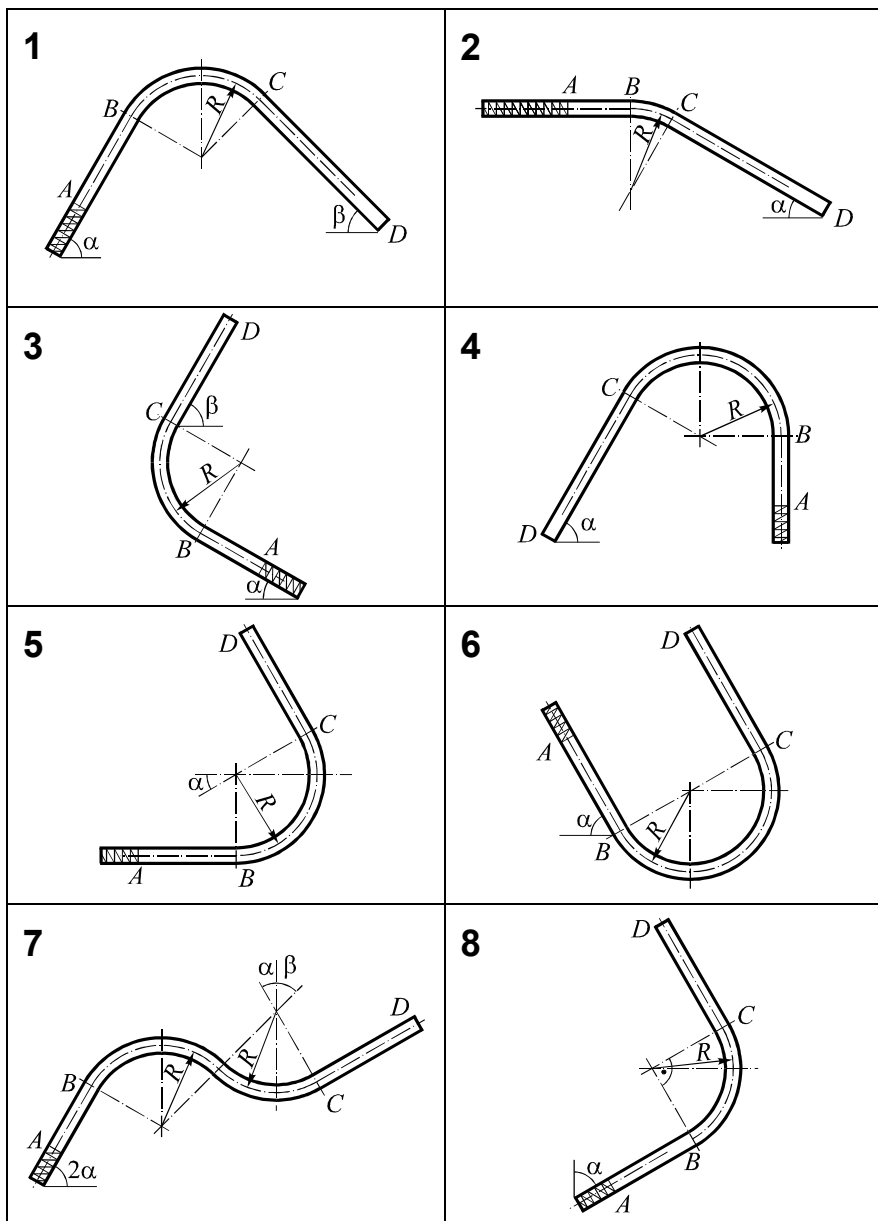


Рисунок 2.1 (начало)

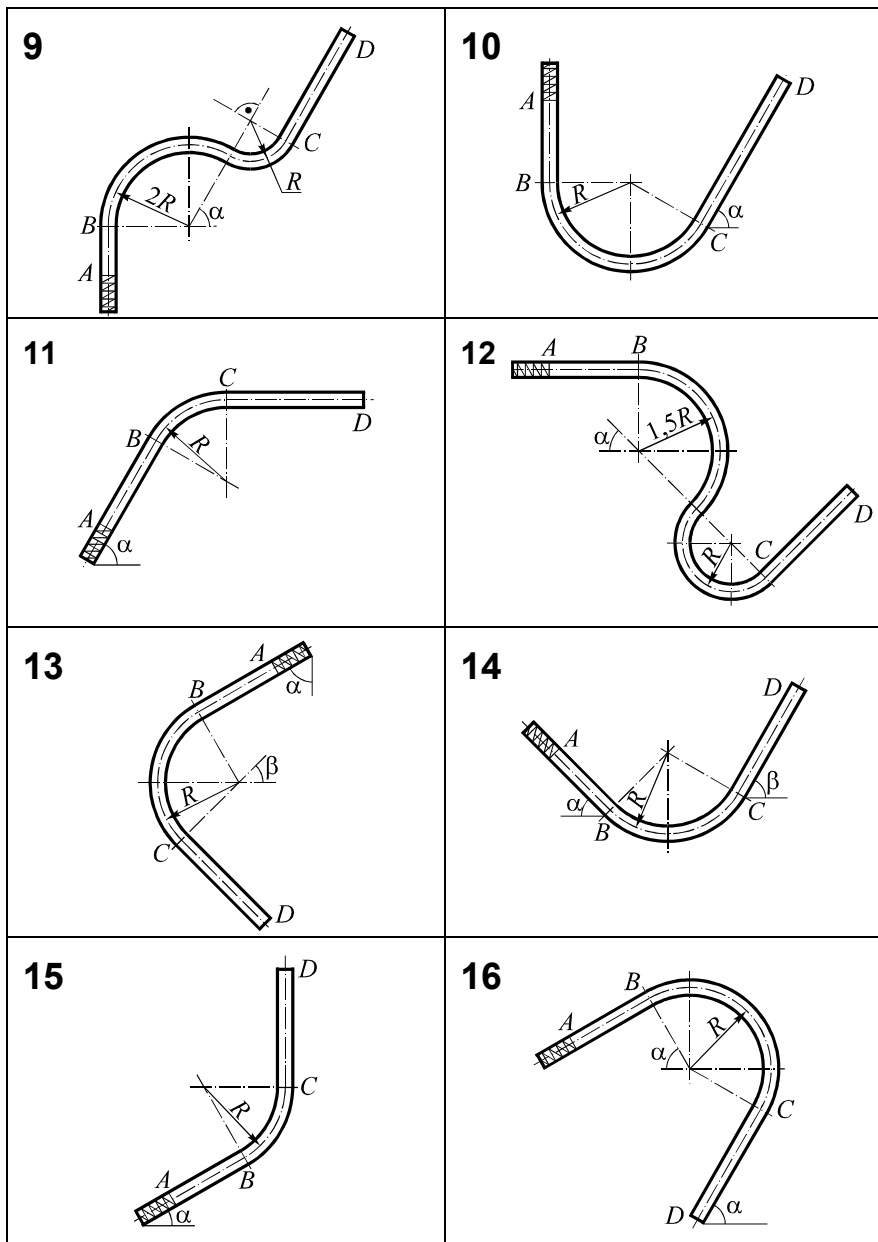


Рисунок 2.1 (продолжение)

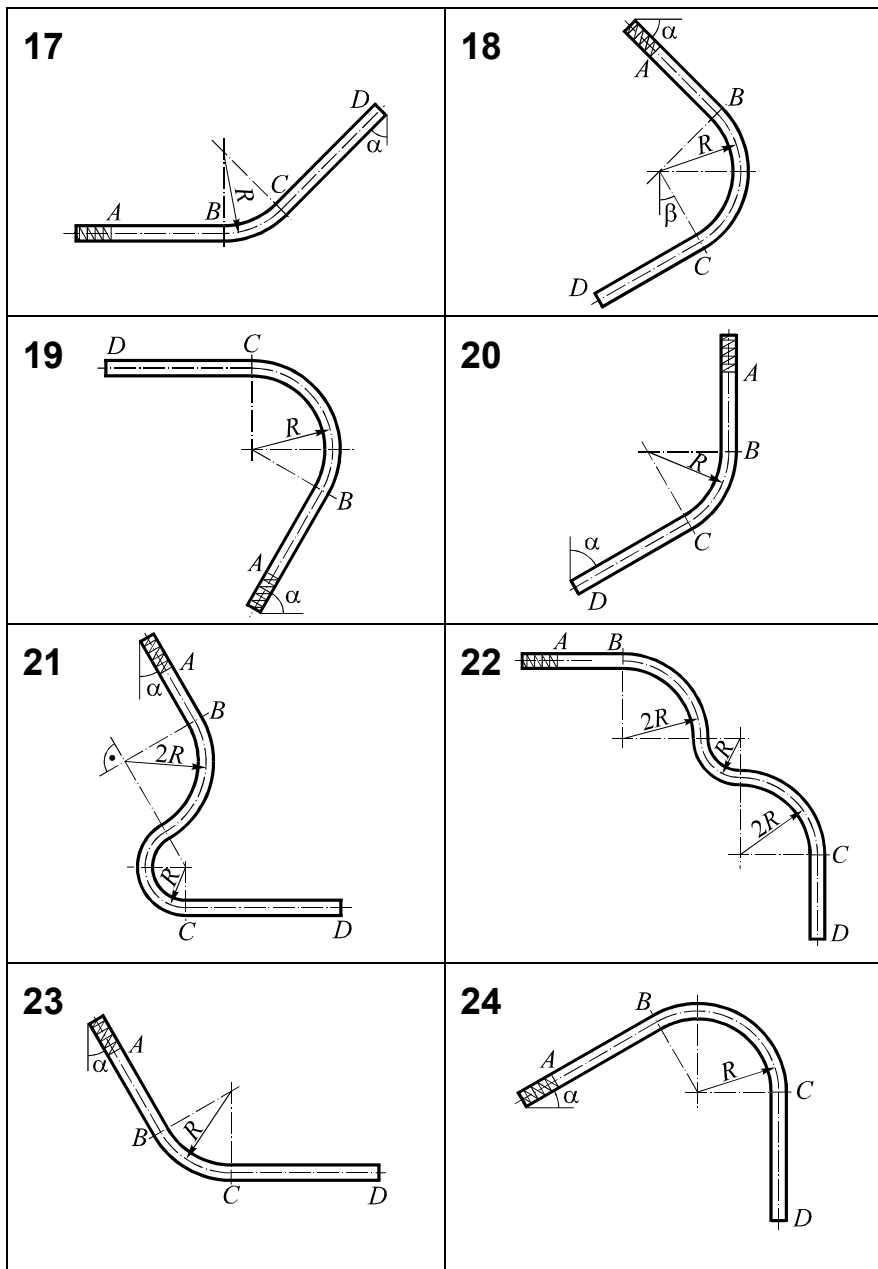


Рисунок 2.1 (продолжение)

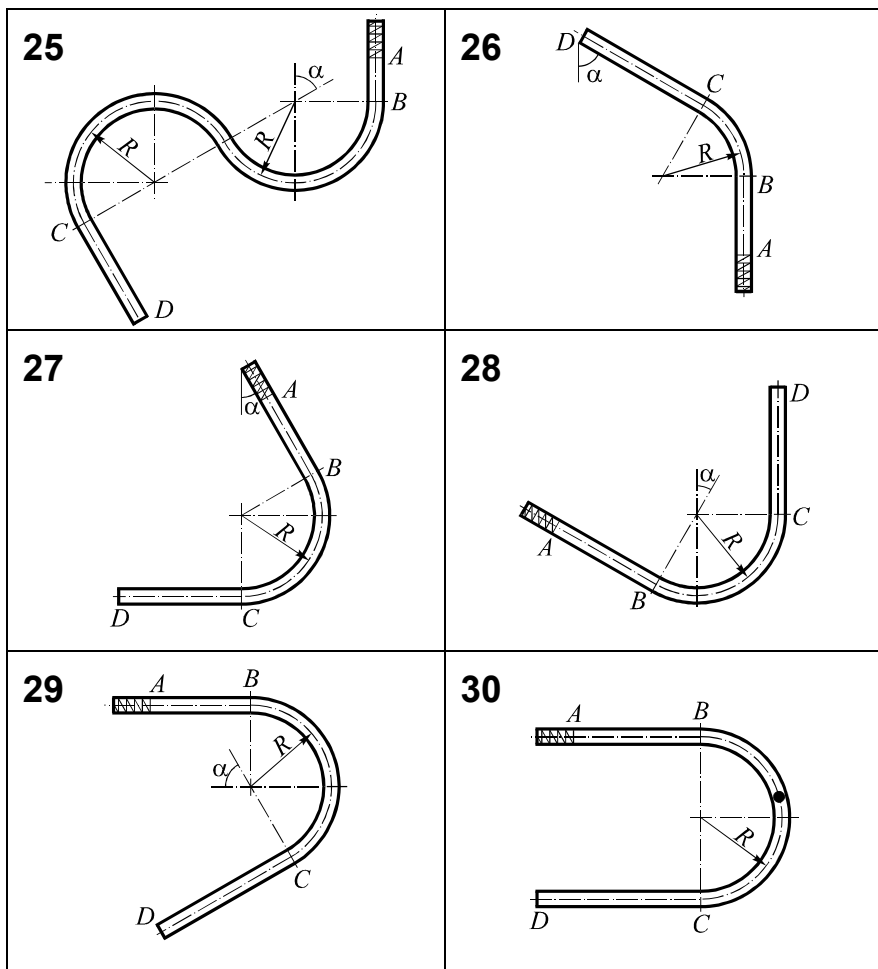


Рисунок 2.1 (окончание)

Пример выполнения задания.

Шарик массой $m = 1$ кг, имея в начальном положении скорость $v_A = 4$ м/с, движется по изогнутой трубке $ABCD$ (рисунок 2.2). На прямолинейном участке AB длиной $L = 1$ м установлена пружина с коэффициентом жесткости $c = 2$ Н/см. В начальном положении пружина сжата на $\Delta l_A = 12$ см. Время движения по участку CD составляет $t_{CD} = 2$ с. Радиус $R = 0,3$ м. Коэффициент трения скольжения для участков AB и CD равен

$f = 0,2$. Углы $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 60^\circ$. Определить скорости шарика в положениях B, C, D .

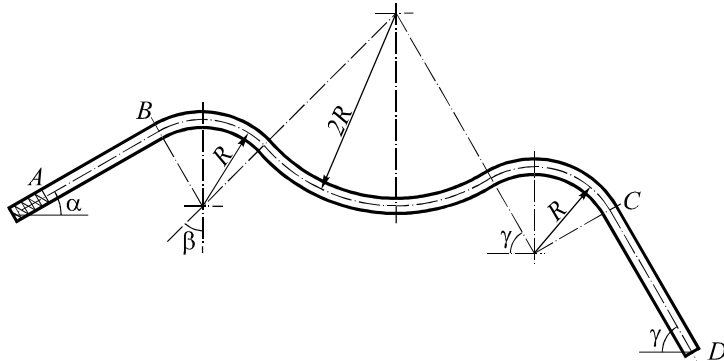


Рисунок 2.2

Решение

1 Рассмотрим движение шарика на участке AB .

1.1 Делаем рисунок и изображаем материальную точку в произвольном положении между A и B (рисунок 2.3).

1.2 Указываем векторы сил, действующих на точку. На участке AB на материальную точку действуют: сила тяжести \vec{G} , нормальная реакция \vec{N} со стороны стенок трубки, сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$.

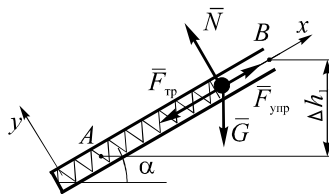


Рисунок 2.3

1.3 Так как известно расстояние между начальным и конечным положениями точки, то применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n A(\vec{F}_i).$$

В данном случае $v_0 = v_A$, $v_1 = v_B$.

1.4 Расписав сумму в правой части последнего равенства, получим

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A(\vec{G}) + A(\vec{N}) + A(\vec{F}_{\text{тр}}) + A(\vec{F}_{\text{упр}}). \quad (2.1)$$

1.5 Определим работу каждой силы:

а) так как начальное положение точки находится «ниже» конечного, то работа силы тяжести отрицательна

$$A(\bar{G}) = -G\Delta h_1,$$

где Δh – разность высот начального и конечного положений точки.

Из рисунка 2.3 видно, что $\Delta h_1 = AB \sin \alpha = L \sin \alpha$. Тогда работа силы тяжести равна

$$A(\bar{G}) = -mgL \sin \alpha.$$

б) работу силы упругости определим по формуле

$$A(\bar{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2} [\Delta l_B^2 - \Delta l_A^2].$$

Так как по условию задачи $L > \Delta l_A$, в точке B пружина на шарик не действует. Значит $\Delta l_B = 0$. Тогда

$$A(\bar{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2} [0 - \Delta l_A^2] = \frac{c}{2} \Delta l_A^2;$$

в) так как сила \bar{N} направлена перпендикулярно смещению точки своего приложения, то работа этой силы равна нулю, поэтому

$$A(\bar{N}) = NL \cos 90^\circ = 0.$$

г) определим работу силы трения. В соответствии с законом Кулона для силы трения $F_{\text{тр}} = fN$. Следовательно, для определения силы трения необходимо найти нормальную реакцию N . Введем оси координат и запишем уравнение движения материальной точки в проекциях на ось y (см. рисунок 2.3):

$$ma_y = N - G \cos \alpha.$$

Так как точка движется вдоль оси x , то проекция ускорения на ось y равна нулю.

$$N = mg \cos \alpha.$$

Сила трения не изменяет своего направления и модуля, препятствует движению, значит, работа отрицательна и равна

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}L = -fmg \cos \alpha \cdot L.$$

Подставим полученные выражения для работ сил в выражение (2.1)

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -mgL \sin \alpha - fmgL \cos \alpha + \frac{c}{2} \Delta l_A^2.$$

1.6 Решаем приведенное уравнение относительно скорости v_B

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gL(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \frac{c}{m} \Delta l_A^2}.$$

Коэффициент жесткости пружины равен $c = 2 \text{ Н/см} = 200 \text{ Н/м}$. Подставим известные численные значения входящих в данное выражение величин

$$v_B = \sqrt{16 - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5(\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ) + 200 \cdot 0,12^2} = 2,384 \text{ м/с}.$$

2 Рассмотрим движение материальной точки на участке BC.

2.1 Делаем рисунок и изображаем материальную точку в произвольном положении между B и C (рисунок 2.4).

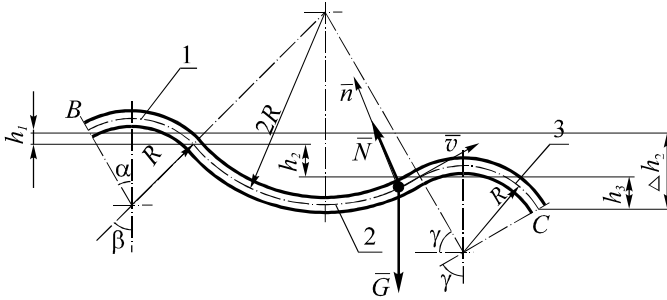


Рисунок 2.4

2.2 Указываем векторы сил, действующих на точку. На участке BC на точку действуют сила тяжести \vec{G} и нормальная реакция \vec{N} , направленная к центру кривизны траектории.

2.3 Записываем теорему динамики материальной точки. Так как на рассматриваемом участке задано перемещение (его можно найти через заданные радиусы и углы), то следует использовать теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_i).$$

В данном случае $v_0 = v_B$, $v_1 = v_C$.

2.4 Расписав сумму работ сил в правой части последнего равенства, получим

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = A(\vec{G}) + A(\vec{N}). \quad (2.2)$$

Определим работу каждой силы при перемещении точки из положения B в положение C:

а) для работы силы тяжести запишем $A(\bar{G}) = G\Delta h_2$. Здесь Δh_2 – разница высот между начальным и конечным положениями точки. Разделим участок BC на три дуги окружности BK , KL и LC , определим разницу высот для каждой из них (см. рисунок 2.4):

$$h_1 = R \cos \alpha - R \cos \beta, h_2 = 2R \sin \gamma - 2R \cos \beta, h_3 = R \sin \gamma - R \cos \gamma.$$

Тогда

$$\Delta h_2 = h_1 + h_2 + h_3 = R(\cos \alpha - 3 \cos \beta + 3 \sin \gamma - \cos \gamma).$$

Работа силы тяжести будет определяться следующим образом:

$$A(\bar{G}) = mgR(\cos \alpha - 3 \cos \beta + 3 \sin \gamma - \cos \gamma);$$

б) так как нормальная реакция \bar{N} направлена перпендикулярно смещению материальной точки, то работа этой силы равна нулю $A(\bar{N}) = 0$.

Подставим выражения работ сил в формулу (2.2)

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = (\cos \alpha - 3 \cos \beta + 3 \sin \gamma - \cos \gamma)mgR.$$

2.5 Решаем полученное уравнение относительно скорости v_C

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2(\cos \alpha - 3 \cos \beta + 3 \sin \gamma - \cos \gamma)gR}.$$

С учетом известных численных значений находим

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{2,384^2 + 2 \cdot 0,843 \cdot 9,8 \cdot 0,3} = \\ &= \sqrt{5,683 + 4,957} = 3,262 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

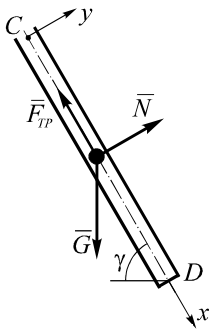


Рисунок 2.5

3 Рассмотрим движение материальной точки на участке CD .

3.1 Делаем рисунок (рисунок 2.5).

3.2 Указываем векторы сил. На участке CD на материальную точку действуют: сила тяжести \bar{G} ; нормальная реакция \bar{N} ; сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$.

3.3 Записываем теорему динамики материальной точки. Так как известно время движения точки на участке CD , то следует использовать теорему об изменении количества движения материальной точки.

$$m\bar{v}_D - m\bar{v}_C = \sum \bar{S}(\bar{F}_i) = \sum \int_0^{\tau} \bar{F}_i dt.$$

3.4 Выберем оси координат. На CD траектория точки прямолинейна, поэтому ось x направим в сторону движения, а ось y – перпендикулярно ей.

В проекциях на оси

$$mv_D - mv_C = \sum_0^{\tau} \int F_{ix} dt, \quad 0 = \sum_0^{\tau} \int F_{iy} dt. \quad (2.3)$$

3.5 Определяем сумму импульсов сил на оси координат

$$\sum_0^{\tau} \int F_{ix} dt = \int_0^{t_0} G \sin \gamma dt - \int_0^{t_0} F_{\text{тр}} dt,$$

$$\sum_0^{\tau} \int F_{iy} dt = \int_0^{t_0} N dt - \int_0^{t_0} G \cos \gamma dt.$$

Вспользуемся законом Кулона для силы трения $F_{\text{тр}} = fN$.

Определим нормальную реакцию из уравнения проекций импульсов сил

на ось y с учетом, что $\sum_0^{\tau} \int F_{iy} dt = 0$ (2.3) или $\sum F_{iy} = 0$;

$$N = G \cos \gamma.$$

Произведем интегрирование

$$\sum_0^{\tau} \int F_{ix} dt = mg \sin \gamma \cdot t_0 - f \int_0^{t_0} G \cos \gamma dt = mg \sin \gamma \cdot t_0 - fmg \cos \gamma \cdot t_0.$$

3.6 Подставляем в уравнение (2.3)

$$mv_D - mv_C = mgt_0(\sin \gamma - f \cos \gamma).$$

Для искомой скорости точки в положении D получим

$$v_D = v_C + gt_0(\sin \gamma - f \cos \gamma).$$

С учетом известных численных значений определяем

$$v_D = 3,262 + 9,8 \cdot 2(\sin 60^\circ - 0,2 \cos 60^\circ) = 3,262 + 15,014 = 18,276 \text{ м/с.}$$

Д-3 ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Некоторые положения теории

Динамические уравнения движения твердого тела устанавливают связь между кинематическими характеристиками движения тела и действующими на него силами.

Поступательное движение тела. В этом случае динамическое уравнение в соответствии с теоремой о движении центра масс записывается в виде:

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i,$$

где m – масса тела;

\bar{a}_C – ускорение центра масс тела;

\bar{F}_i – i -я сила, действующая на тело.

При решении задач динамическое уравнение поступательного движения тела проецируют на оси координат.

Вращательное движение тела. Для него динамическое уравнение имеет вид:

$$J_z \varepsilon = \sum M_{iz},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z ;

ε – угловое ускорение тела;

M_{iz} – момент i -й силы относительно оси вращения.

При составлении динамического уравнения вращательного движения тела целесообразно выбирать направление отсчета угла поворота φ , так чтобы оно совпадало с направлением угловой скорости тела. Тогда моменты сил, способствующих движению тела, будут положительны, а препятствующих движению – отрицательны.

Момент инерции J_z является мерой инертности тела при вращательном движении. Момент инерции материальной системы относительно оси Oz определяется как сумма произведений масс всех точек системы на квадраты их расстояний до этой оси:

$$J_z = \sum m_i h_i^2.$$

Момент инерции J_C тела относительно оси Cz , проходящей через центр масс C , называют *центральный моментом инерции*. Если для тела известен *радиус инерции i* , то момент инерции

$$J_C = mi^2.$$

Центральный момент инерции однородного диска с массой m и радиусом R вычисляется по формуле

$$J_C = \frac{1}{2} mR^2.$$

Центральный момент инерции тонкого кольца с массой m и радиусом R определяем из выражения

$$J_C = mR^2.$$

Центральный момент инерции тонкого стержня с массой m и длины l

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2.$$

Условие задания Д-3

Система трех тел движется под действием силы P или пары сил с моментом M (рисунок 3.1). Кроме того, на одно из тел системы действует пара сил, создающая момент сопротивления $M_{\text{сопр}}$. Массы тел: m_1, m_2, m_3 . Радиусы колес: R_2, R_3, r_2, r_3 . Принять, что радиусы инерции ступенчатых

блоков, рассчитываются по формуле: $i = \sqrt{\frac{Rr}{2}}$. Коэффициент трения

скольжения f . На основании исходных данных, приведенных в таблице 3.1, определить ускорение груза 1 и натяжение в нити, связанной с данным грузом.

Таблица 3.1 – Исходные данные к заданию Д-3

Вариант	Масса тела, кг			Радиус, см				α , град	f	P , кН	M , кН·м	$M_{\text{сопр}}$, кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_2	r_2	R_3	r_3					
1	90	120	100	30	20	50	20	–	–	3	–	0,05
2	60	80	120	60	40	40	–	60	0,2	–	0,7	0,16
3	100	100	150	50	25	70	20	30	0,1	5	–	0,02
4	100	130	160	60	45	50	25	30	0,2	1	–	0,9
5	65	200	100	40	20	40	10	–	–	10	–	0,1
6	80	150	170	50	30	60	–	45	0,3	–	1	0,04
7	100	120	110	80	30	60	20	–	–	12	–	0,07
8	50	125	150	70	40	40	20	–	0,5	2	–	0,88
9	90	100	170	40	20	–	30	60	0,15	–	2	0,5
10	60	110	150	50	20	60	45	30	0,2	3	–	0,3
11	100	130	130	40	30	40	25	45	0,4	4	–	1,5

Продолжение таблицы 3.1

Вариант	Масса тела, кг			Радиус, см				α , град	f	P , кН	M , кН·м	$M_{\text{сопр}}$, кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_2	r_2	R_3	r_3					
12	55	100	80	60	15	30	—	60	0,1	—	1	2
13	70	130	165	50	20	70	30	—	0,05	5	—	0,25
14	100	170	120	80	60	60	30	30	0,25	6	—	0,7
15	130	90	180	40	10	80	40	—	—	4	—	1
16	60	100	40	60	45	90	50	60	0,3	1	—	0,2
17	90	180	110	80	40	50	—	30	0,1	—	0,8	0,8
18	80	100	100	80	50	80	40	—	0,2	2	—	0,5
19	100	130	90	60	30	40	20	30	0,05	1	—	0,2
20	110	160	70	80	40	30	25	45	0,15	5	—	1,2
21	50	120	100	80	55	60	—	60	0,3	—	1,5	0,7
22	100	140	60	100	70	50	30	—	—	2,5	—	1,1
23	75	100	65	70	35	40	20	—	0,15	1,8	—	2
24	60	130	100	90	40	—	30	60	0,1	—	1	1
25	45	100	85	80	30	—	35	45	0,2	—	0,9	0,2
26	100	90	130	70	55	100	40	—	—	2	—	1,5
27	75	100	60	80	40	40	30	30	0,1	2,2	—	0,12
28	80	110	110	60	30	60	35	45	0,2	4,4	—	0,2
29	100	160	200	50	20	70	45	—	0,22	5	—	0,33
30	90	180	210	60	25	90	40	—	—	1,7	—	0,1

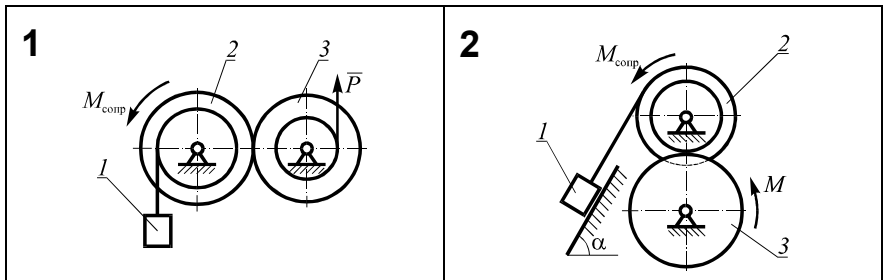


Рисунок 3.1 (начало)

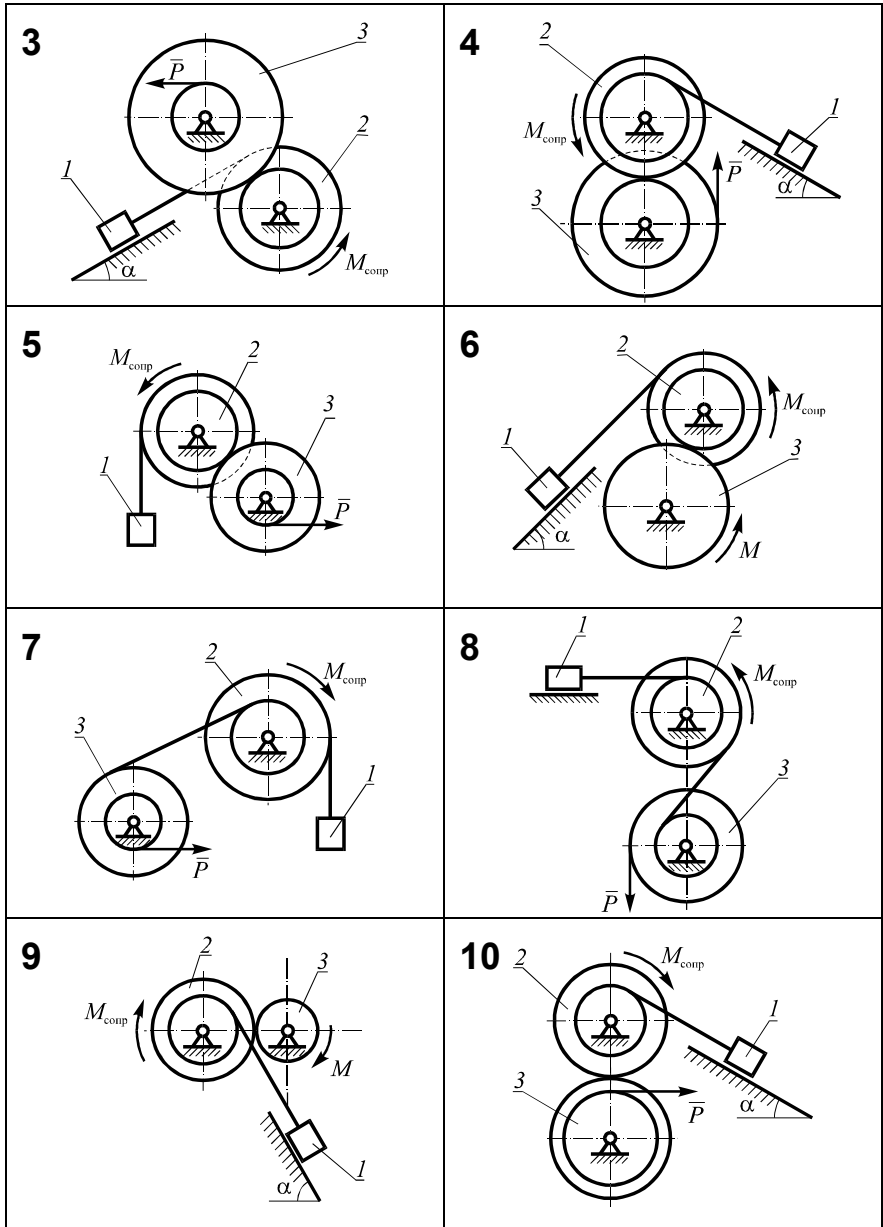


Рисунок 3.1 (продолжение)

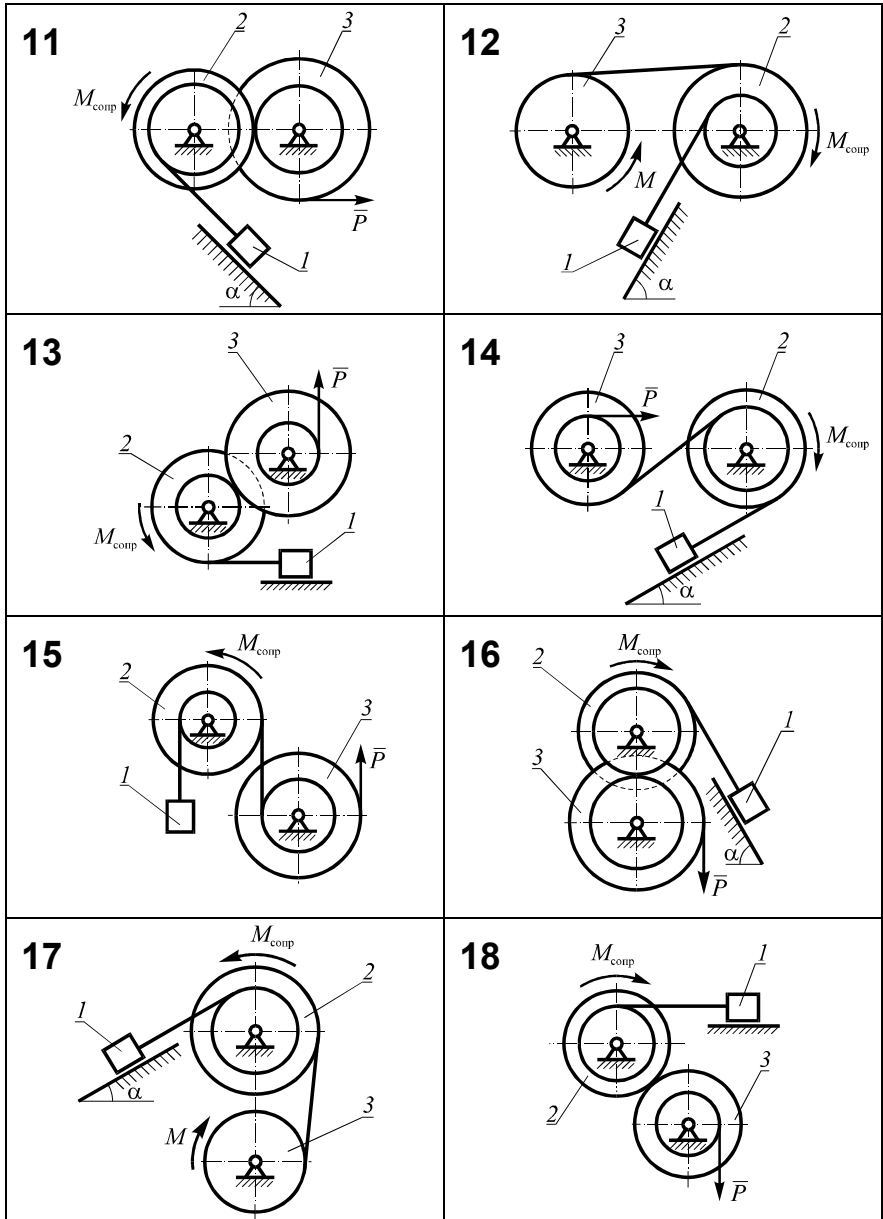


Рисунок 3.1 (продолжение)

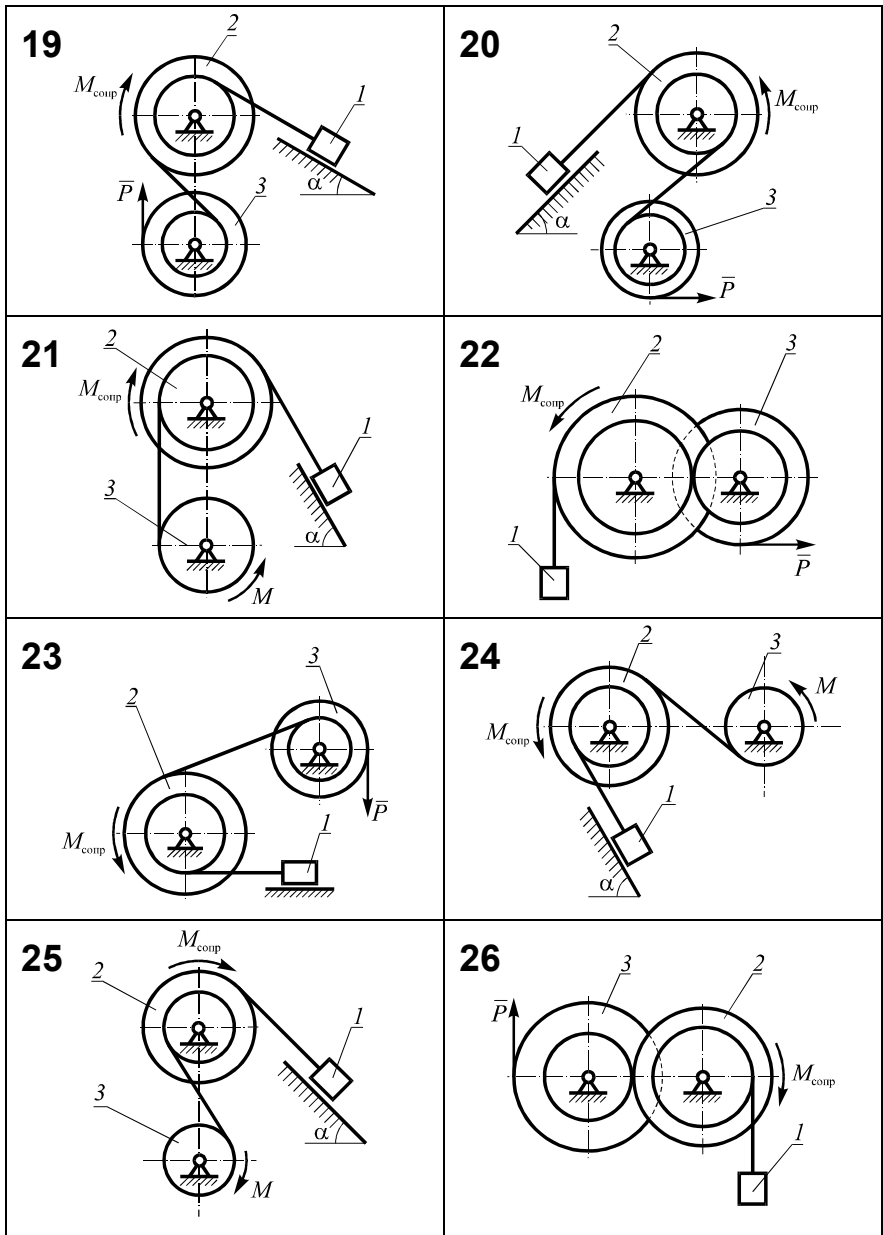


Рисунок 3.1 (продолжение)

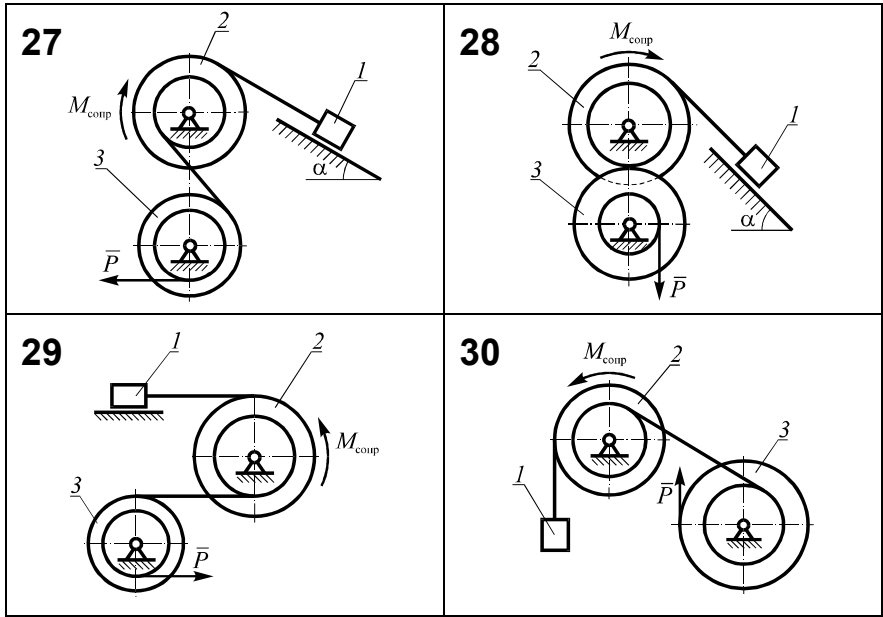


Рисунок 3.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Система трех тел (рисунок 3.2) движется под действием силы $P = 4$ кН. К телу 2 приложена пара сил, создающая момент сопротивления $M_{\text{сопр}} = 0,05$ кН·м. Массы тел: $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 150$ кг, $m_3 = 120$ кг. Радиусы колес: $R_2 = 20$ см, $R_3 = 30$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 15$ см. Радиусы инерции тел: $i_2 = 15$ см, $i_3 = 20$ см. Коэффициент трения скольжения тела 1 о плоскость $f = 0,2$. Угол $\alpha = 60^\circ$. Определить ускорение груза 1 и натяжение в нити, связанной с данным грузом.

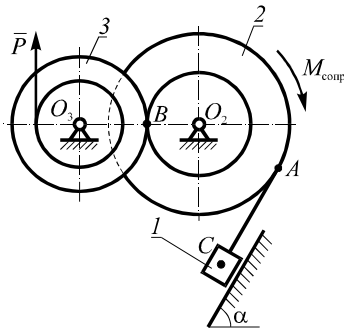


Рисунок 3.2

Решение

1 Делаем рисунок к задаче (см. рисунок 3.2). Определяем направления движения тел системы. Момент сопротивления, приложенный к телу 2, направлен по ходу часовой стрелки. Значит, тело 2 вращается против хода часовой стрелки. Тогда тело 3 будет вращаться по ходу часовой стрелки, а тело 1 – скользить вверх по наклонной плоскости.

2 Составляем динамические уравнения движения каждого тела системы. Для этого изображаем каждое тело системы отдельно и показываем векторы действующих сил (рисунки 3.3–3.5).

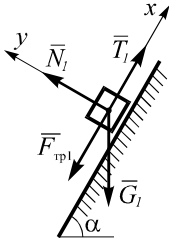


Рисунок 3.3

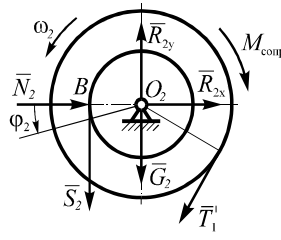


Рисунок 3.4

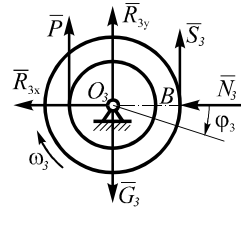


Рисунок 3.5

Рассматриваем движение тела 1 (рисунок 3.3):

а) На тело действуют: сила тяжести \vec{G}_1 ; нормальная реакция \vec{N}_1 ; сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$; сила натяжения нити \vec{T}_1 . Так как тело 1 движется вверх по наклонной плоскости, то силу трения надо направить вниз параллельно наклонной плоскости;

б) выбираем оси координат. Тело 1 движется поступательно. Следовательно, надо выбрать декартовы оси координат. При этом ось x направить по движению, ось y – перпендикулярно x ;

в) составляем динамические уравнения движения. Динамические уравнения поступательного движения в проекциях на выбранные оси имеют вид:

$$m_1 a_{C_1x} = \sum F_{ix};$$

$$m_1 a_{C_1y} = \sum F_{iy},$$

$$m_1 a_{C_1x} = T_1 - F_{\text{тр}1} - G_1 \sin \alpha;$$

$$m_1 a_{C_1y} = N_1 - G_1 \cos \alpha,$$

где a_{C_1x} , a_{C_1y} – проекции ускорения центра масс тела 1 (точки C_1) на оси x и y соответственно. Здесь учтено, что при поступательном движении ускорения всех точек тела одинаковы.

Поскольку тело 1 движется вдоль оси x , то $a_{C_1y} = 0$. Следовательно, проекция a_{C_1x} совпадает с полным ускорением центра масс тела 1 a_{C_1} . В соответствии с законом Кулона $F_{\text{тр}} = fN_1$, для силы тяжести – $G_1 = m_1 g$. Подставим полученные выражения в динамические уравнения поступательного движения

$$\begin{cases} m_1 a_{C_1} = T_1 - fN_1 - m_1 g \sin \alpha; \\ 0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения полученной системы нормальную реакцию N_1 и подставляем в первое:

$$m_1 a_{C_1} = T_1 - m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (3.1)$$

Рассматриваем движение тела 2:

а) На тело 2 (рисунок 3.4) действуют: сила тяжести \overline{G}_2 ; реакция цилиндрического шарнира в точке O_2 , раскладываемая на две составляющие \overline{R}_{2x} и \overline{R}_{y2} ; сила натяжения нити \overline{T}'_1 ; пара сил с моментом $M_{\text{сопр}}$. В точке сцепления колес 2 и 3 (точка B) на тело 2 действуют нормальная реакция \overline{N}_2 и окружная сила \overline{S}_2 . Нормальная реакция направлена перпендикулярно касательной к поверхности колеса. Следовательно, линия действия силы \overline{N}_2 должна проходить через центр масс тела 2 (точку O_2). Окружная сила \overline{S}_2 направлена перпендикулярно силе \overline{N}_2 ;

б) *выбираем* направление отсчета угла поворота φ_2 . Как было установлено ранее, тело 2 вращается против хода часовой стрелки, что указывает на положительное направление отсчета этого угла;

в) *записываем динамическое уравнение движения*. Тело 2 вращается вокруг оси, проходящей через точку O_2 . Следовательно, динамическое уравнение будет иметь вид:

$$J_{O_2} \varepsilon_2 = \sum M_{O_2}(\overline{F}_i) = -T'_1 R_2 + S_2 r_2 - M_{\text{сопр}}.$$

Здесь J_{O_2} – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через точку O_2 ; ε_2 – угловое ускорение тела 2.

Моменты силы тяжести, реакции цилиндрического шарнира и силы нормальной реакции N_2 относительно оси вращения (точки O_2) равны нулю.

Для тела 2 задан радиус инерции i_2 . Значит момент инерции будем определять по формуле: $J_{O_2} = m_2 i_2^2$. Силы натяжения нити \overline{T}_1 и \overline{T}'_1 противоположны по направлению, но равны по величине. Поэтому динамическое уравнение движения тела 2 можно переписать в виде

$$m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = -T_1 R_2 + S_2 r_2 - M_{\text{сопр}}. \quad (3.2)$$

Рассматриваем тело 3:

а) На тело 3 (рисунок 3.5) действуют: сила тяжести \overline{G}_3 ; реакция цилиндрического шарнира в точке O_3 , включающая две составляющие \overline{R}_{3x} и

\bar{R}_{3y} ; активная сила \bar{P} ; нормальная реакция \bar{N}_3 и окружная сила \bar{S}_3 ;

б) *указываем направление движения* (см. рисунок 3.5). Направление вращения – по ходу часовой стрелки. Таково и положительное направление отсчета угла φ_3 и моментов.

в) *записываем динамическое уравнение движения*. Тело 3 движется вращательно вокруг оси, проходящей через точку O_3 . Следовательно, динамическое уравнение

$$J_{O_3} \varepsilon_3 = \sum M_{O_3}(\bar{F}_i) = -S_3 R_3 + Pr_3,$$

где J_{O_3} – момент инерции тела 3 относительно оси O_3 ;

ε_3 – угловое ускорение тела 3.

Моменты силы тяжести, реакции цилиндрического шарнира и нормальной реакции N_2 равны нулю относительно оси вращения.

Момент инерции тела 3 определим по формуле: $J_{O_3} = m_3 i_3^2$. Окружные силы \bar{S}_2 и \bar{S}_3 равны по модулю и противоположны по направлению. Динамическое уравнение движения тела 3 можно переписать в виде

$$m_3 i_3^2 \varepsilon_3 = -S_2 R_3 + Pr_3. \quad (3.3)$$

3 *Устанавливаем связь между ускорениями звеньев* a_C , ε_2 , ε_3 . Воспользуемся методом общей точки. Вследствие нерастяжимости нити, соединяющей тела 1 и 2, скорость тела 1 (см. рисунок 3.2) равна скорости точки A $v_1 = v_A$, а также одинаковы соответствующие ускорения $a_A^\tau = a_1$.

С другой стороны, касательная составляющая ускорения точки A

$$a_A^\tau = \varepsilon_2 R_2. \quad (3.4)$$

Общей для тел 2 и 3 является точка B (см. рисунок 3.2). Точка B принадлежит двум вращательно движущимся телам. Из равенства скоростей общей точки следует равенство касательных составляющих этой точки

$$a_{B1}^\tau = a_{B2}^\tau \text{ или } \varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 R_3. \quad (3.5)$$

По условию задачи требуется определить ускорение груза 1. Выразим угловые ускорения тел 2 и 3 через ускорение a_1 . Из равенства (3.4) следует:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}. \quad (3.6)$$

Из равенства (3.5) выразим угловое ускорение тела 3 и подставим сюда выражение для ε_2

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{R_3}{r_2} = a_1 \frac{R_3}{R_2 r_2}. \quad (3.7)$$

4 Решаем систему динамических уравнений. Для этого в динамические уравнения движения тел (3.1)–(3.3) подставляем выражения соответствующих ускорений (3.6–3.7) и составляем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha); \\ m_2 i_2^2 \frac{a_1}{R_2} = -T_1 R_2 + S_2 r_2 - M_{\text{сопр}}; \\ m_3 i_3^2 a_1 \frac{R_3}{R_2 r_2} = -S_2 R_3 + P r_3. \end{cases} \quad (3.8)$$

В данной системе три неизвестные: ускорение a_1 ; силы T_1 и S_2 . Из первого уравнения системы (3.8) выражаем силу

$$T_1 = m_1 a_1 + m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (3.9)$$

Из третьего уравнения системы (3.8) находим

$$S_2 = P \frac{r_3}{R_3} - m_3 i_3^2 a_1 \frac{R_3}{R_2 r_2}.$$

Подставляем выражения для сил во второе уравнение системы (3.8)

$$m_2 i_2^2 \frac{a_1}{R_2} = -m_1 a_1 R_2 - m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) R_2 + P \frac{r_3}{R_3} r_2 - m_3 i_3^2 \frac{a_1}{R_2} - M_{\text{сопр}};$$

$$m_2 i_2^2 \frac{a_1}{R_2} + m_1 a_1 R_2 + m_3 i_3^2 \frac{a_1}{R_2} = -m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) R_2 + P \frac{r_3}{R_3} r_2 - M_{\text{сопр}}.$$

Из полученного уравнения найдем ускорение груза

$$a_1 = \frac{P \frac{r_3}{R_3} r_2 - m_1 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) R_2 - M}{m_1 R_2 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2} + m_3 \frac{i_3^2}{R_2}}.$$

Подставляем известные численные значения

$$a_1 = \frac{4000 \cdot \frac{0,15}{0,3} \cdot 0,1 - 50 \cdot 9,8 \cdot (\sin 60^\circ + 0,2 \cos 60^\circ) \cdot 0,2 - 50}{50 \cdot 0,2 + 150 \cdot \frac{0,15^2}{0,2} + 120 \cdot \frac{0,2^2}{0,2}} = 1,088 \text{ м/с}^2.$$

С учетом полученного значения ускорения a_1 подстановка в выражение (3.9) для силы натяжения дает

$$T_1 = 50 \cdot 1,088 + 50 \cdot 9,8 \cdot (\sin 60^\circ + 0,2 \cos 60^\circ) = 527,74 \text{ Н}.$$

Д-4 ДИНАМИКА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Некоторые положения теории

Для плоскопараллельно движущегося тела, как и для любой материальной системы, выполняется теорема о движении центра масс

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i,$$

где m , \bar{a}_C – масса и ускорение центра масс тела;

\bar{F}_i – i -я сила, действующая на тело.

Для рассматриваемого тела выполняется также теорема об изменении момента количества движения. Эту теорему в данном случае можно привести к виду

$$J_C\varepsilon = \sum M_{iC},$$

где J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

ε – угловое ускорение тела;

M_{iC} – момент i -й силы относительно оси, проходящей через центр масс.

Записав формулу теоремы о движении центра масс в проекциях на оси координат, приходим к системе трех уравнений

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_{ix}, \\ ma_{Cy} = \sum F_{iy}, \\ J_C\varepsilon = \sum M_{iC}. \end{cases}$$

Данная система представляет собой *динамические уравнения плоскопараллельного движения твердого тела*.

При решении задач динамики для катящегося колеса следует учитывать, что при качении одного тела по поверхности другого возникает пара сил, препятствующая качению. Момент этой пары M_c называется моментом сопротивления качению

$$M_c = \delta N,$$

где δ – коэффициент сопротивления качению;

N – нормальная реакция.

На катящееся тело также действует сила сцепления $\bar{F}_{\text{сц}}$. Если качение колеса происходит без проскальзывания, то направление и модуль силы сце-

пления определяются активными силами, приложенными к колесу. При этом мгновенный центр скоростей колеса находится в точке касания с неподвижной поверхностью. Если модуль силы сцепления достигает предельного значения $F_{\text{сц}}^*$, то сцепление с поверхностью нарушается и колесо катится с проскальзыванием. Предельное значение силы сцепления определяется по закону Кулона

$$F_{\text{сц}}^* = f_{\text{сц}} N,$$

где $f_{\text{сц}}$ – коэффициент трения покоя (сцепления).

Условие задания Д-4

Колесо массой m катится по шероховатой поверхности под действием силы тяжести и активной силы F (рисунок 4.1). Радиусы колеса равны соответственно R и r . Радиус инерции колеса i_C . Коэффициент сопротивления качению δ , коэффициент трения сцепления f . На основании исходных данных, приведенных в таблице 4.1, определить ускорение центра масс и угловое ускорение колеса.

Таблица 4.1 – Исходные данные к заданию Д-4

Вариант	m , кг	Радиус, см			Угол, град		f	δ , см	F , кН
		R	r	i_C	α	β			
1	250	65	20	40	30	—	0,7	1,5	1
2	370	45	10	20	60	—	0,8	2,5	2
3	100	65	30	40	30	—	0,5	3	0,5
4	210	60	20	35	45	60	0,65	4	0,9
5	335	35	—	30	30	—	0,4	3,5	1,1
6	450	70	15	45	45	30	0,5	5	1
7	300	55	40	50	30	—	0,7	1,5	0,8
8	420	50	30	40	60	30	0,9	3	1,2
9	280	75	25	50	45	—	0,2	1	0,7
10	400	50	40	45	30	60	0,4	0,9	1,5
11	300	55	30	45	45	30	0,8	3,5	2
12	350	70	35	50	30	—	0,5	3	1
13	235	40	20	30	60	30	0,3	2	0,6
14	360	80	45	60	60	—	0,45	5	1,1
15	270	65	—	55	30	45	0,1	2	2,1
16	190	40	20	30	30	45	0,75	4	0,7
17	400	70	25	60	60	—	0,3	3	3
18	160	55	30	40	45	30	0,4	2,5	0,8
19	315	30	15	25	30	60	0,5	1	1,7
20	380	60	35	50	60	—	0,2	2,5	2,2
21	120	55	10	30	60	—	0,7	3,5	0,4
22	100	70	45	55	30	—	0,4	6	0,9
23	370	65	—	45	45	30	0,25	3,5	2,5

Продолжение таблицы 4.1

Вариант	m , кг	Радиус, см			Угол, град		f	δ , см	F , кН
		R	r	i_c	α	β			
24	275	75	40	60	60	30	0,5	4,5	1,8
25	480	30	15	20	30	—	0,3	2	2
26	150	40	15	25	30	45	0,15	3	1,2
27	430	45	20	30	45	60	0,5	1,5	2,6
28	180	35	10	20	60	30	0,3	2,5	0,8
29	430	70	—	50	30	45	0,4	5	1
30	165	60	30	40	30	60	0,2	1	0,6

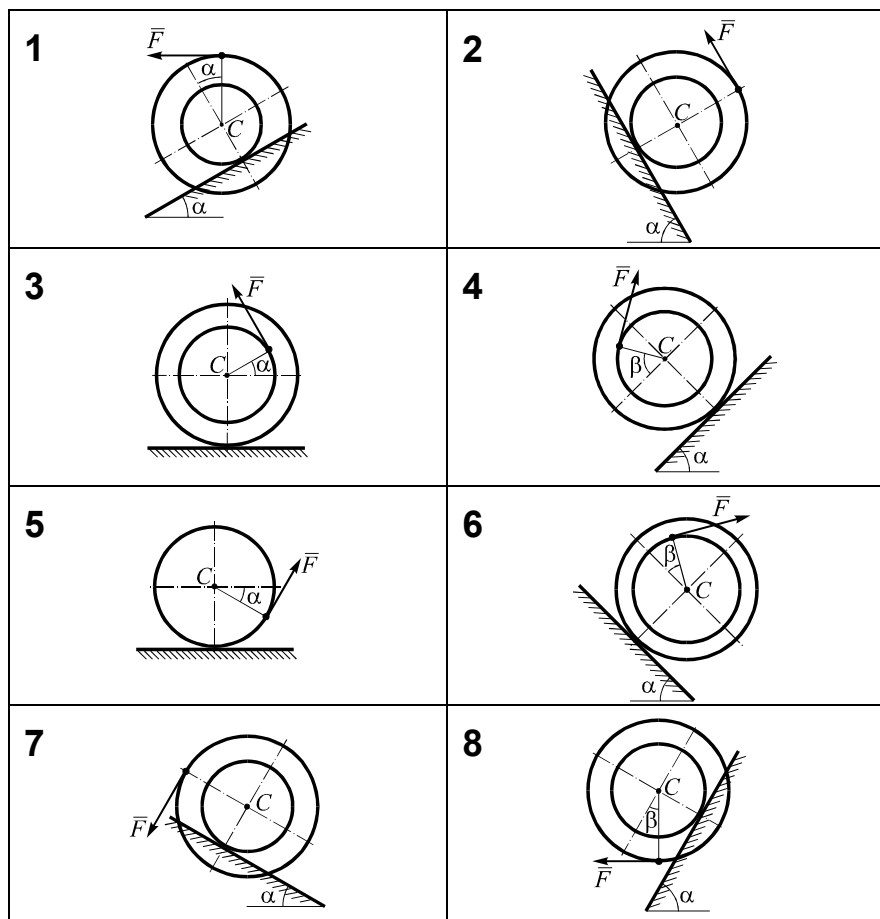


Рисунок 4.1 (начало)

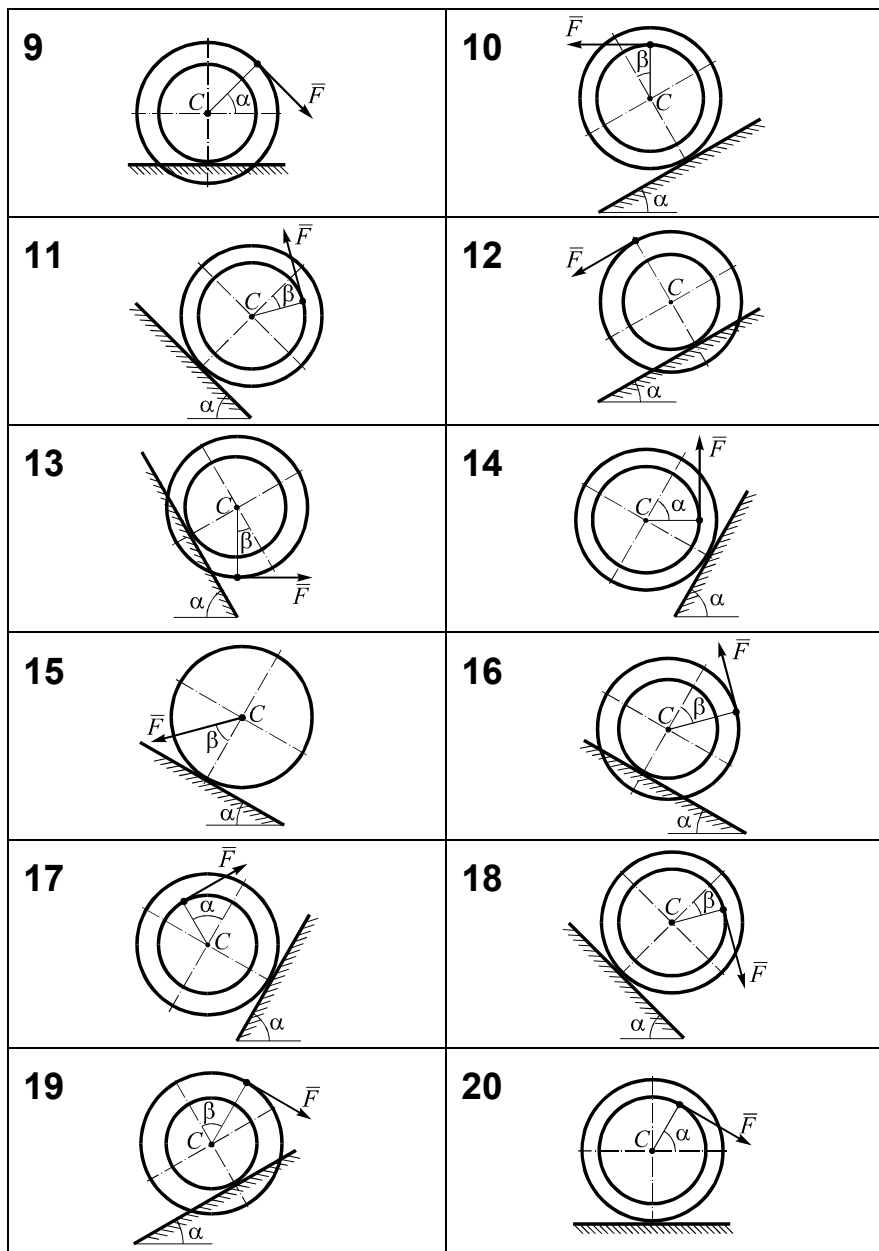


Рисунок 4.1 (продолжение)

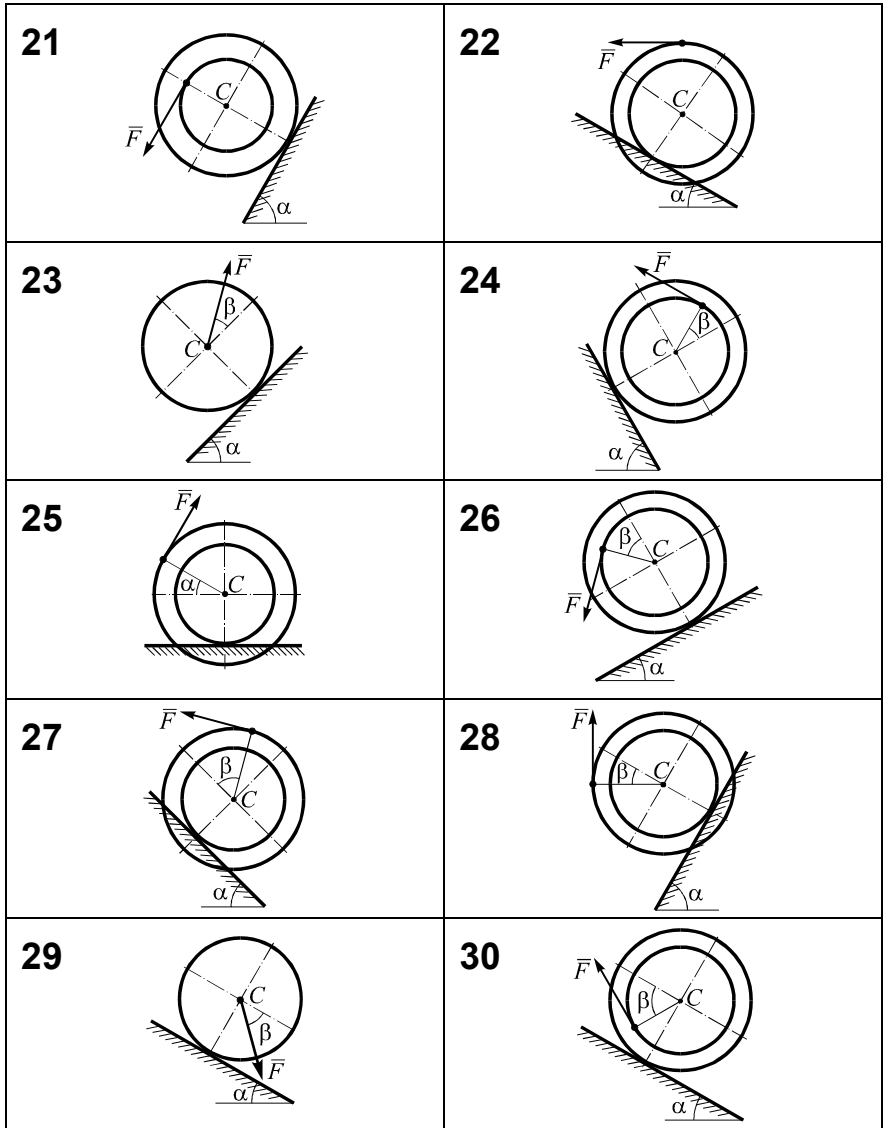


Рисунок 4.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Колесо массой $m = 300$ кг катится по шероховатой поверхности под действием силы тяжести и активной силы $F = 1$ кН (рисунок 4.2). Радиусы колеса равны $R = 40$ см, $r = 20$ см. Радиус инерции $i_C = 30$ см. Коэффициент сопротивления качению $\delta = 3$ см, коэффициент трения сцепления $f = 0,2$. Углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Определить ускорение центра масс колеса и его угловое ускорение.

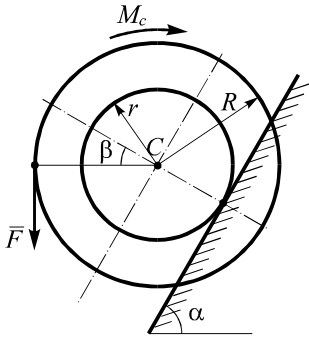


Рисунок 4.2

Решение

1 Делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело (рисунок 4.3). На тело действуют: активная сила \vec{F} ; сила тяжести \vec{G} ; нормальная реакция \vec{N} ; сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$; момент сопротивления качению M_c . Под действием сил колесо будет катиться вниз по наклонной

плоскости, а вращение будет происходить против хода часовой стрелки. Момент сопротивления качению M_c направлен противоположно вращению. Сила сцепления может быть направлена как по движению центра масс колеса, так и противоположно движению. Примем, что сила $F_{\text{сц}}$ направлена вниз по наклонной плоскости.

2 Выбираем оси координат. Ось x направим вдоль наклонной плоскости, ось y – перпендикулярно x . Укажем также направление вращения тела (см. рисунок 4.3).

3 Записываем динамические уравнения движения тела. Запишем динамические уравнения плоскопараллельного движения

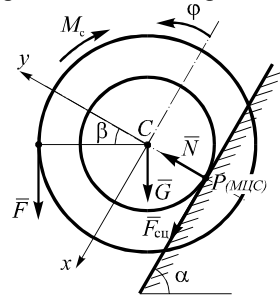


Рисунок 4.3

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_{ix}, \\ ma_{Cy} = \sum F_{iy}, \\ J_C \varepsilon = \sum M_{iC}; \end{cases} \quad \begin{cases} ma_{Cx} = F \cos \beta + G \sin \alpha + F_{\text{сц}}, \\ ma_{Cy} = N - G \cos \alpha + F \sin \beta, \\ J_C \varepsilon = FR + F_{\text{сц}} r - M_c. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь a_{Cx} , a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на оси x и y ; J_C – центральный момент инерции тела.

Так как точка C движется параллельно оси x , то $a_{Cy} = 0$. Следовательно, $a_C = a_{Cx}$. Сила тяжести $G = mg$. Момент сопротивления качению связан с нормальной реакцией $M_c = \delta N$. Так как известен радиус инерции, то для мо-

мента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать: $J_C = mi_C^2$.

4 Устанавливаем связь между угловым ускорением тела и ускорением центра масс. Предположим, что тело движется без проскальзывания. Тогда точка касания с неподвижной поверхностью (точка P) является мгновенным центром скоростей, а для скорости точки C можно записать $v_C = \omega CP$. Здесь ω – угловая скорость тела; CP – расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей тела. В рассматриваемом случае $CP = r$. Отсюда $\omega = v_C/r$. Дифференцируя данное равенство по времени, получаем связь между угловым ускорением тела и линейным ускорением его центра масс

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv_C}{dt} = \frac{a_C}{r}. \quad (4.2)$$

Подставляя полученные соотношения для силы тяжести, момента сопротивления качению, момента инерции и углового ускорения в систему (4.1), получаем

$$\begin{cases} ma_C = F \cos \beta + mg \sin \alpha + F_{\text{цл}}, \\ 0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \beta, \\ mi_C^2 \frac{a_C}{r} = FR - F_{\text{цл}}r - \delta N. \end{cases} \quad (4.3)$$

5 Решаем полученную систему уравнений (4.3). Из второго уравнения выражаем нормальную реакцию

$$N = mg \cos \alpha + F \sin \beta. \quad (4.4)$$

Из первого уравнения системы находим силу сцепления

$$F_{\text{цл}} = -F \cos \beta - mg \sin \alpha + ma_C. \quad (4.5)$$

Подставляем полученные выражения сил N и $F_{\text{цл}}$ в третье уравнение системы (4.3):

$$mi_C^2 \frac{a_C}{r} = FR + Fr \cos \beta + mgr \sin \alpha - ma_C r - \delta F \sin \beta - \delta mg \cos \alpha.$$

Из последнего равенства можно найти ускорение центра масс

$$a_C = \frac{F(R + r \cos \beta - \delta \sin \beta) + mg(r \sin \alpha - \delta \cos \alpha)}{m \left(\frac{i_C^2}{r} + r \right)}.$$

Подставляем это выражение в формулу (4.5):

$$F_{\text{сц}} = -F \cos \beta - mg \sin \alpha + \\ + \frac{r}{i_C^2 + r^2} [F(R + r \cos \beta - \delta \sin \beta) + mg(r \sin \alpha - \delta \cos \alpha)].$$

Определяем численное значение силы сцепления

$$F_{\text{сц}} = -1000 \cos 30^\circ - 294 \sin 60^\circ + \frac{0,2}{0,04 + 0,09} \times [1000 \cdot (0,4 + 0,2 \cos 30^\circ - \\ - 0,03 \sin 60^\circ) + 294 \cdot (0,2 \sin 30^\circ - 0,03 \cos 60^\circ)] = -240,31 \text{ Н.}$$

Знак минус означает, что сила сцепления $\bar{F}_{\text{сц}}$ направлена вверх по наклонной плоскости.

6 *Проверяем выполнение условия качения без проскальзывания.* Для этого из выражения (4.4) определяем численное значение нормальной реакции

$$N = 1000 \sin 30^\circ + 300 \cdot 9,8 \cos 60^\circ = 647 \text{ Н.}$$

Затем вычисляем предельное значение силы сцепления

$$F_{\text{сц}}^* = fN = 0,2 \cdot 647 = 129,4 \text{ Н.}$$

Таким образом, расчетное значение силы сцепления оказалась по модулю выше ее предельного значения ($F_{\text{сц}} > F_{\text{сц}}^*$). Значит, колесо катится с проскальзыванием и связь между угловым ускорением тела и ускорением центра масс (4.2) не выполняется.

7 *Определяем ускорения.* Так как условие качения без проскальзывания не выполняется, то необходимо вернуться к системе динамических уравнений (4.1). В эти уравнения можно подставить выражения для силы тяжести ($G = mg$); момента инерции ($J_C = mi_C^2$); проекций ускорения центра масс ($a_{Cy} = 0, a_{Cx} = a_C$). Но $\varepsilon \neq \frac{a_C}{r}$. Воспользуемся тем, что при качении с проскальзыванием модуль силы сцепления определяется по закону Кулона $|F_{\text{сц}}| = fN$. Так как ранее определенная сила сцепления отрицательна, то $-F_{\text{сц}} = fN$. С учетом этого система уравнений (4.1) принимает вид

$$\begin{cases} ma_C = F \cos \beta + mg \sin \alpha - fN, \\ 0 = N - F \sin \beta - mg \cos \alpha, \\ mi_C^2 \varepsilon = FR + fNr - \delta N. \end{cases} \quad (4.6)$$

В этой системе уравнений три неизвестные величины: N, a_C, ε . Из второго уравнения (4.6) следует, что $N = 647 \text{ Н}$. Из первого уравнения находим ускорение точки C , а из третьего – угловое ускорение тела:

$$a_C = \frac{F}{m} \cos \beta + g \sin \alpha - f \frac{N}{m},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{mi_C^2} [FR + N(fr - \delta)].$$

Подставляем известные численные значения

$$a_C = \frac{1000}{300} \cos 30^\circ + 9,8 \sin 60^\circ - 0,2 \cdot \frac{647}{300} = 10,93 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{300 \cdot 0,09} \cdot [1000 \cdot 0,4 + 647 \cdot (0,04 - 0,03)] = 15,05 \text{ рад/с}^2.$$

Замечание – Если бы качение происходило без проскальзывания, то ускорения a_C и ε следовало бы определять из системы уравнений (4.3).

Д-5 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Некоторые положения теории

Количеством движения материальной системы \bar{Q} называют векторную величину, равную геометрической сумме количеств движения всех точек системы,

$$\bar{Q} = \sum m_i \bar{v}_i,$$

где m_i , v_i – масса и скорость i -й материальной точки соответственно. Количество движения системы можно найти так же, как произведение массы системы на скорость ее центра масс:

$$\bar{Q} = m_{\Sigma} \bar{v}_C.$$

Для материальной системы выполняется теорема об изменении количества движения. Данная теорема в дифференциальной форме формулируется так: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_j^{\text{внеш}}.$$

Теорема об изменении количества движения системы имеет также интегральную форму: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени t_1 равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени,*

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_j^{\text{внеш}},$$

где $\bar{S}_j^{\text{внеш}}$ – импульс внешней силы $\bar{F}_j^{\text{внеш}}$ за промежуток времени t_1 ,

$$\bar{S}_j^{\text{внеш}} = \int_0^{t_1} \bar{F}_j^{\text{внеш}} dt.$$

Главным моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной системы относительно данного центра O называют векторную величину, равную геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра,

$$\bar{L}_O = \sum \bar{L}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i ,$$

где \bar{r}_i – радиус-вектор i -й точки.

Смысл теоремы об изменении кинетического момента материальной системы состоит в следующем: *производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра*

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{jO}^{\text{внеш}} ,$$

где $\bar{M}_{jO}^{\text{внеш}}$ – вектор момента внешней силы $\bar{F}_j^{\text{внеш}}$ относительно центра O ,

$$\bar{M}_j^{\text{внеш}} = \bar{r}_j \times \bar{F}_j^{\text{внеш}} ,$$

где \bar{r}_j – радиус-вектор точки приложения внешней силы $\bar{F}_j^{\text{внеш}}$.

Кинетическая энергия материальной системы, состоящей из n точек, определяется в результате суммирования их кинетических энергий:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} .$$

Поскольку при поступательном движении скорости всех точек тела одинаковы, то кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела равна половине произведения массы тела m на квадрат скорости v любой его точки:

$$T = \frac{mv^2}{2} .$$

При вращательном движении кинетическую энергию тела можно рассчитать по формуле

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} ,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость.

Плоскопараллельное движение можно представить как комбинацию поступательного движения вместе с центром масс и вращения вокруг центра масс. Поэтому кинетическую энергию плоскопараллельно движущегося тела можно записать в виде

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} ,$$

где v_C – скорость центра масс тела;

J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Кинетическая энергия системы, состоящей из нескольких тел, определяется суммированием их кинетических энергий:

$$T = \sum T_i .$$

Для материальной системы справедлива теорема об изменении кинетической энергии: *изменение кинетической энергии материальной системы на перемещении из начального положения в конечное равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на эту систему,*

$$T - T_0 = \sum A_j^{\text{внеш}} + \sum A_j^{\text{внут}} ,$$

где T_0, T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно;

$\sum A_j^{\text{внеш}}$ – сумма работ внешних сил и моментов;

$\sum A_j^{\text{внут}}$ – сумма работ внутренних сил и моментов.

В системе, состоящей из твердых тел и нерастяжимых связей, сумма работ внутренних сил равна нулю. Если в процессе движения системы изменяются расстояния между ее взаимодействующими точками, то сумма работ внутренних сил не равна нулю.

Условие задания Д-5

На основании исходных данных, приведенных в таблице 5.1, определить зависимость скорости центра масс тела 1 (рисунок 5.1) от пройденного пути s . Массы тел равны соответственно m_1, m_2, m_3 а радиусы – R_2, r_2, R_3, r_3 . Для ступенчатых колес принять: больший радиус связан с меньшим соотношением $R = \frac{3}{2}r$ (для вариантов 2, 3, 4, 6, 9–14, 17–23, 25) и $R = 2r$

(для вариантов 5, 7, 8, 15, 16, 24, 26, 27, 29, 30), радиус инерции $i = \sqrt{2}r$. В остальных случаях шкивы и катки считать сплошными однородными цилиндрами. Коэффициент трения скольжения тел по наклонной плоскости равен f . К вращающимся телам приложены либо вращающие моменты $M_{\text{вр}}$, либо моменты сопротивления M_c . В начальный момент система находилась в покое.

Таблица 5.1 – Исходные данные к заданию Д-5

Вариант	Масса тела			Радиус вала, см		Момент		f	α , град
	m_1	m_2	m_3	r_2	r_3	$M_{\text{вр}}$	M_c		
1	$3m$	$3m$	m	30	24	—	mgr_2	0,1	60
2	$2m$	$2m$	$3m$	15	10	$5mgr_2$	—	—	30

Окончание таблицы 5.1

Вариант	Масса тела			Радиус вала, см		Момент		f	α , град
	m_1	m_2	m_3	r_2	r_3	$M_{вп}$	M_c		
3	3m	4m	m	12	10	—	mgr_3	—	45
4	4m	m	3m	20	—	mgr_2	—	—	30
5	3m	3m	2m	20	20	$2mgr_2$	—	—	—
6	5m	m	3m	15	18	—	$2mgr_3$	0,2	45
7	5m	3m	2m	20	20	—	$2mgr_3$	0,1	60
8	2m	4m	m	20	8	—	mgr_3	—	—
9	2m	3m	m	12	9	mgr_2	—	—	45
10	6m	3m	2m	16	24	—	$0,5mgr_3$	0,3	30
11	2m	5m	4m	14	8	—	mgr_3	0,1	60
12	4m	2m	3m	15	10	mgr_2	$2mgr_3$	—	—
13	4m	2m	m	20	15	—	mgr_4	0,2	60
14	3m	3m	2m	20	30	$2mgr_2$	mgr_3	—	—
15	2m	4m	2m	15	—	$2mgr_2$	—	0,1	30
16	2m	3m	2m	—	16	—	$2mgr_3$	—	—
17	4m	3m	m	14	10	—	mgr_3	0,3	45
18	4m	3m	2m	16	18	mgr_2	—	0,2	60
19	2m	2m	3m	12	16	$3mgr_2$	—	—	—
20	2m	3m	2m	14	18	—	mgr_3	—	—
21	6m	2m	4m	20	16	—	$4mgr_3$	—	60
22	m	4m	2m	14	10	—	$2mgr_3$	—	—
23	3m	4m	2m	18	12	mgr_2	$0,5mgr_3$	—	—
24	4m	3m	4m	10	30	—	mgr_3	0,2	45
25	4m	3m	2m	14	20	—	mgr_3	—	—
26	m	3m	m	12	10	mgr_2	—	0,4	60
27	6m	2m	4m	15	8	—	mgr_3	0,1	30
28	5m	m	2m	20	24	mgr_2	—	0,2	60
29	4m	3m	2m	16	—	—	mgr_2	0,3	60
30	6m	m	2m	12	14	—	mgr_4	—	45

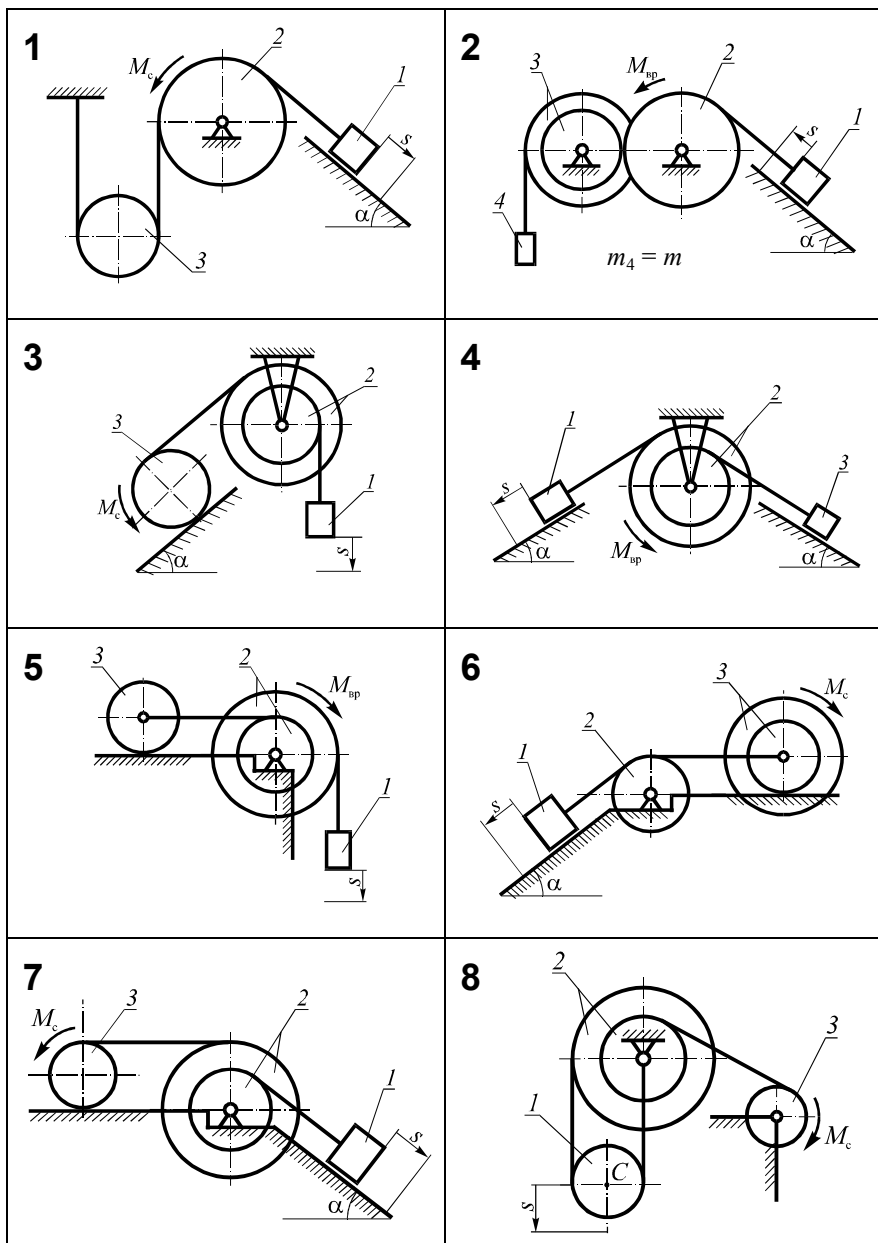


Рисунок 5.1 (начало)

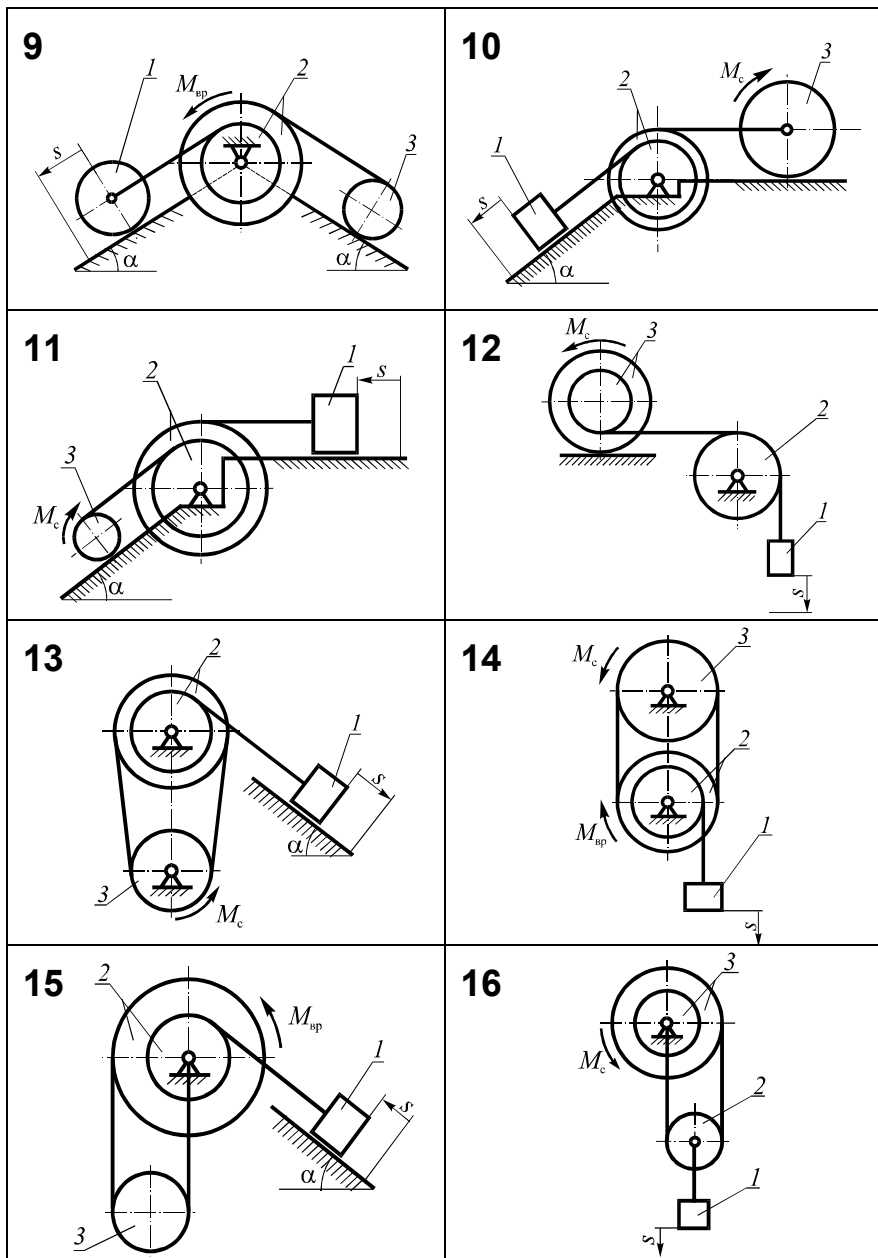


Рисунок 5.1 (продолжение)

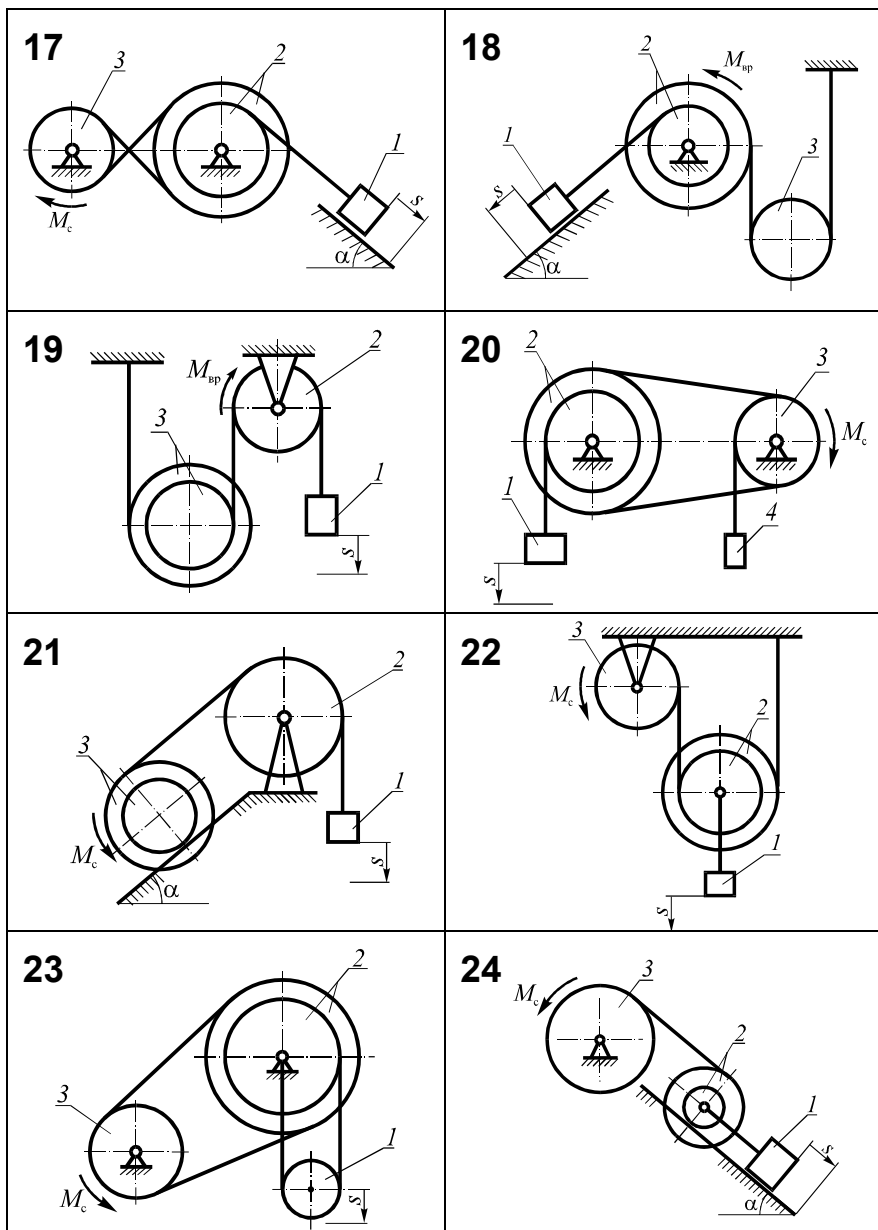


Рисунок 5.1 (продолжение)

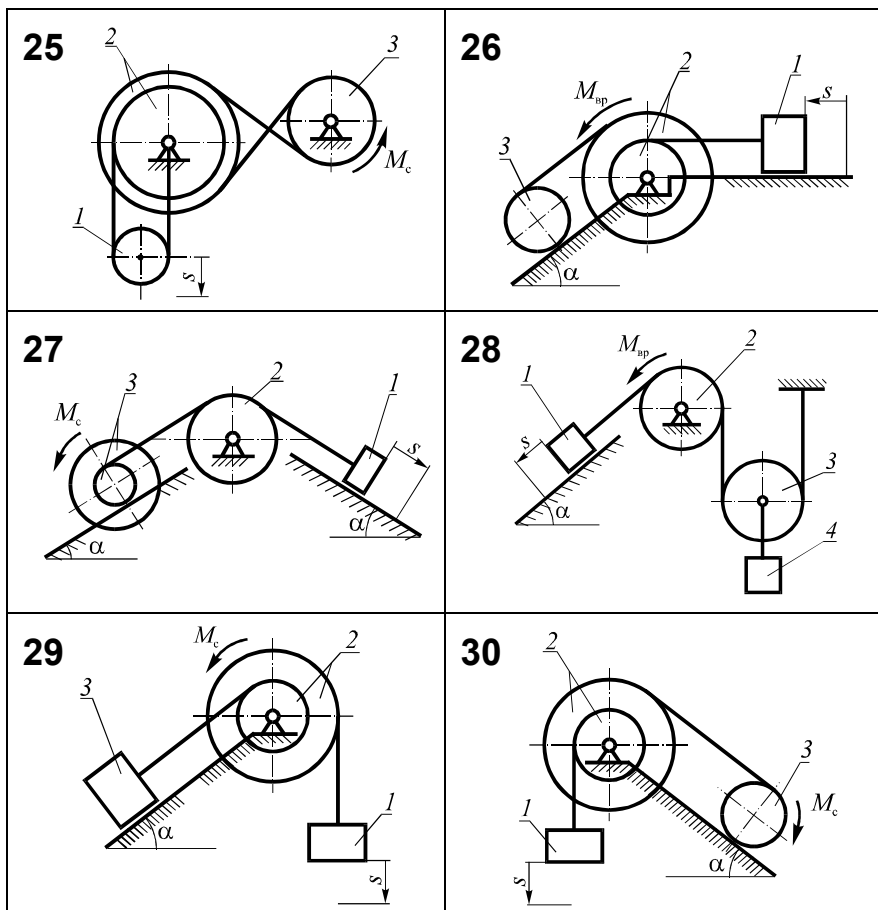


Рисунок 5.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Определить зависимость скорости центра масс тела 1 (рисунок 5.2) от пройденного пути s , если массы тел: $m_1 = 4m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, а радиусы: $r_2 = 0,1$ м; $r_3 = 0,2$ м. Для тел 2, 3 больший радиус $R_2 = 2r_2$, $R_3 = 2r_3$, а радиусы инерции колес: $i_2 = \sqrt{2}r_2$, $i_3 = \sqrt{2}r_3$. Коэффициент трения скольжения тела 1 по наклонной плоскости $f = 0,2$. Углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. К телу 2 приложен вращающий момент $M_{вп} = mgr_2$. На тело 3 действует момент сил сопротивления $M_c = 2mgr_3$. В начальный момент система находилась в покое.

Решение

1 *Изображаем исследуемую систему* (см. рисунок 5.2). По условию задачи в начальном положении система находилась в покое, поэтому ее начальная кинетическая энергия

$$T_0 = 0. \quad (5.1)$$

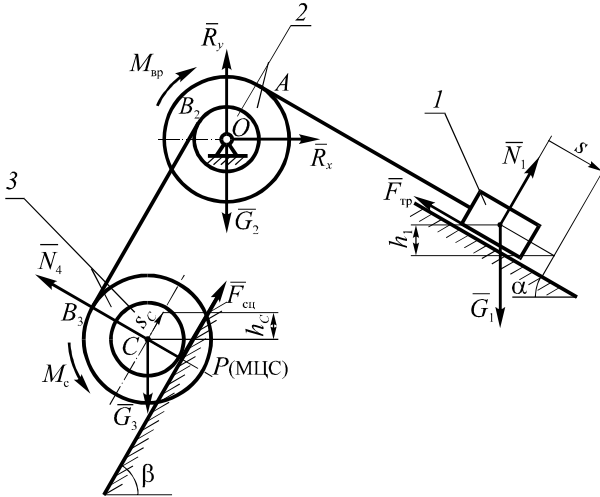


Рисунок 5.2

2 *Определяем конечное положение системы.* Это положение определяется расстоянием s . Из схемы видно, что соотношения между скоростями точек системы не изменяются в процессе ее движения, поэтому дополнительное изображение конечного положения системы не требуется.

3 *Определяем кинетическую энергию системы в конечном положении.* Так как система состоит из трех тел, то

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

Определим кинетические энергии каждого тела системы в конечном положении, т. е. в тот момент, когда тело 1 будет иметь скорость v_1 .

Тело 1 движется поступательно. Следовательно,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Тело 2 движется вращательно:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2},$$

где J_2 – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс (точку O);

ω_2 – угловая скорость тела 2.

Так как для тела 2 задан радиус инерции, то

$$J_2 = m_2 i_2^2 = m_2 (\sqrt{2} r_2)^2 = 2 m_2 r_2^2.$$

Угловая скорость ω_2 связана со скоростью первого тела. Для определения этой связи запишем условие передачи движения. В силу нерастяжимости нитей скорость точки A (см. рисунок 5.2) совпадает со скоростями всех точек поступательно движущегося тела 1, т. е. $v_A = v_1$. Так как точка A принадлежит вращательно движущемуся телу 2, то $v_A = \omega_2 AO = \omega_2 R_2$. Значит,

$$v_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (5.2)$$

Подставляем полученные выражения в формулу для кинетической энергии второго тела

$$T_2 = \frac{1}{2} 2 m_2 r_2^2 \frac{v_1^2}{R_2^2} = m_2 r_2^2 \frac{v_1^2}{(2 r_2)^2} = \frac{1}{4} m_2 v_1^2.$$

Тело 3 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

где v_C – скорость центра масс тела 3 (см. рисунок 5.2);

J_3 – момент инерции тела 3 относительно центра масс.

Так как для тела 3 задан радиус инерции i_3 , то $J_3 = m_3 i_3^2 = m_3 (\sqrt{2} r_3)^2 = 2 m_3 r_3^2$. Поскольку тело 3 движется плоскопараллельно, то скорость его центра масс v_C равна произведению угловой скорости ω_3 на длину отрезка, соединяющего точку C с мгновенным центром скоростей P , $v_C = \omega_3 CP$. Мгновенный центр скоростей (МЦС) катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности колеса находится в точке сцепления с поверхностью (см. рисунок 5.2). Тогда $CP = r_3$ и

$$v_C = \omega_3 r_3. \quad (5.3)$$

Для кинетической энергии тела 3 запишем

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \omega_3^2 r_3^2 + \frac{1}{2} 2 m_3 r_3^2 \omega_3^2 = \frac{3}{2} m_3 \omega_3^2 r_3^2.$$

Угловую скорость ω_3 можно выразить через угловую скорость тела 2. Для этого рассмотрим точки B_2 и B_3 (см. рисунок 5.2). В силу нерастяжимости нитей скорости этих точек равны, т. е. $v_{B_2} = v_{B_3}$. Точка B_2 принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Следовательно, $v_{B_2} = \omega_2 B_2 O = \omega_2 r_2$. Точка B_3 принадлежит телу 3, движущемуся плоскопараллельно, $v_{B_3} = \omega_3 B_3 P = \omega_3 (r_3 + R_3) = \omega_3 3r_3$. Следовательно,

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 3r_3 \Rightarrow \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{3r_3}.$$

Учитывая ранее установленную связь угловой скорости ω_2 со скоростью первого тела, получим

$$\omega_3 = \frac{v_1}{R_2} \frac{r_2}{3r_3} = \frac{v_1}{2r_2} \frac{r_2}{3r_3} = \frac{v_1}{6r_3}. \quad (5.4)$$

Подставляем данное выражение в формулу для кинетической энергии третьего тела

$$T_3 = \frac{3}{2} m_3 \frac{v_1^2}{36r_3^2} r_3^2 = \frac{3}{72} m_3 v_1^2.$$

Определяем кинетическую энергию системы в конечном положении. Для этого просуммируем полученные выражения кинетических энергий тел

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{4} m_2 v_1^2 + \frac{3}{72} m_3 v_1^2 = v_1^2 \left(\frac{1}{2} 4m + \frac{1}{4} 2m + \frac{3}{72} 3m \right) = 2,625 m v_1^2. \quad (5.5)$$

4 *Определяем сумму работ внутренних и внешних сил, действующих на систему.* Так как система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, то сумма работ внутренних сил

$$\sum A_j^{\text{внут}} = 0. \quad (5.6)$$

На систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$; сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$; сила сцепления колеса 5 с поверхностью $\bar{F}_{\text{сц}}$; нормальные реакции \bar{N}_1, \bar{N}_3 ; компоненты реакции цилиндрического шарнира \bar{R}_x, \bar{R}_y ; пары сил с моментами $M_{\text{вр}}$ и $M_{\text{с}}$. Значит,

$$\begin{aligned} \sum A_j^{\text{внеш}} = & A(\bar{G}_1) + A(\bar{F}_{\text{тр}}) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{R}_x) + A(\bar{R}_y) + A(\bar{G}_2) + A(\bar{G}_3) + \\ & + A(M_{\text{вр}}) + A(\bar{N}_3) + A(M_{\text{с}}) + A(\bar{F}_{\text{сц}}). \end{aligned}$$

Так как сила нормальной реакции \bar{N}_1 направлена перпендикулярно смещению точки своего приложения, то работа этой силы $A(\bar{N}_1) = 0$. Силы $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{G}_2$ приложены к неподвижной точке O . Следовательно, эти силы не совершают работы при движении системы $A(\bar{R}_x) = A(\bar{R}_y) = A(\bar{G}_2) = 0$. Так как сила сцепления $\bar{F}_{\text{сц}}$ и нормальная реакция \bar{N}_3 приложены к мгновенному центру скоростей тела 3, то работы этих сил тоже равны нулю $A(\bar{F}_{\text{сц}}) = A(\bar{N}_3) = 0$. Таким образом, для суммы работ внешних сил можно записать

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = A(\bar{G}_1) + A(\bar{F}_{\text{тр}}) + A(M_{\text{вр}}) + A(\bar{G}_3) + A(M_{\text{с}}).$$

Работа силы тяжести \bar{G}_1 определяется следующим образом: $A(\bar{G}_1) = G_1 h_1$. Здесь h_1 – изменение вертикальной координаты центра масс первого тела. Если тело 1 прошло по наклонной плоскости путь s , то $h_1 = s \sin \alpha$. Тогда

$$A(\bar{G}_1) = m_1 g s \sin \alpha.$$

Сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ направлена противоположно движению тела, поэтому работа отрицательна и равна

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} s.$$

В соответствии с законом Кулона для силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = f N_1$. Для определения нормальной реакции N_1 запишем динамическое уравнение поступательного движения тела 1 в проекциях на ось y (рисунок 5.3):

$$m_1 a_{1y} = N_1 - G_1 \cos \alpha.$$

Так как тело 1 движется вдоль наклонной плоскости, то проекция его ускорения на ось y равна нулю. Следовательно, $m_1 a_{1y} = 0$.

Таким образом, $N_1 - G_1 \cos \alpha = 0$.

Значит, $N_1 = m_1 g \cos \alpha$. Тогда работа силы трения равна

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -f N_1 s = -f m_1 g s \cos \alpha.$$

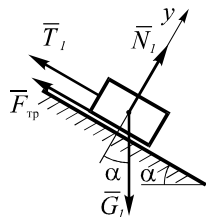


Рисунок 5.3

Работа пары сил с моментом $M_{\text{вр}}$, действующей на вращательно движущееся тело 2,

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}}\varphi_2.$$

Здесь φ_2 – угол, на который повернется тело 2, если тело 1 пройдет путь s . Перемещения звеньев механизма связаны между собой так же, как и соответствующие им скорости. Значит, воспользовавшись соотношением (5.2), можно определить связь между величинами φ_2 и s : $\varphi_2 = \frac{s}{R_2}$. Тогда

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}} \frac{s}{R_2}.$$

Сила тяжести \overline{G}_3 приложена к центру масс тела 3 – точке C . Для работы этой силы можно записать

$$A(\overline{G}_3) = -G_3 h_C,$$

где h_C – изменение вертикальной координаты точки C .

При движении системы точка C поднимается, т. е. движется против действия силы тяжести. В связи с этим работа силы тяжести отрицательна. Если центр масс тела 3 прошел по наклонной плоскости путь s_C , то $h_C = s_C \sin \beta$. Для установления зависимости s_C от перемещения s определяем связь между скоростями v_C и v_1 . Воспользовавшись соотношениями (5.3) и (5.4), можно записать $v_C = \omega_3 r_3 = \frac{v_1}{6r_3} r_3 = \frac{v_1}{6}$.

Следовательно, $s_C = \frac{s}{6}$. Тогда для работы силы тяжести \overline{G}_3 запишем

$$A(\overline{G}_3) = -G_3 h_C = -m_3 g s_C \sin \beta = -\frac{1}{6} m_3 g s \sin \beta.$$

Работу пары сил с моментом M_c определяем по углу поворота φ_3 тела 3

$$A(M_c) = -M_c \varphi_3.$$

Здесь учтено, что момент сопротивления M_c направлен противоположно направлению вращения тела 3. Следовательно, работа момента будет отрицательной.

Связь угла поворота φ_3 со смещением s можно определить, воспользовавшись соотношением (5.4),

$$\varphi_3 = \frac{s}{6r_3}.$$

Тогда

$$A(M_c) = -M_c \frac{s}{6r_3}.$$

Просуммируем работы внешних сил

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha + M_{\text{вр}} s \frac{1}{R_2} - \\ - \frac{1}{6} m_3 g s \sin \beta - M_c \frac{s}{6r_3}.$$

Используем выражения для моментов пар сил и масс тел

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = 4mgs \sin \alpha - 4mgsf \cos \alpha + mgs \frac{r_2}{R_2} - \frac{1}{6} 3mgs \sin \beta - 2mgr_3 \frac{s}{6r_3} = \\ = mgs \left[4 \sin \alpha - 4f \cos \alpha + 0,5 - \frac{1}{2} \sin \beta - \frac{1}{3} \right]$$

После подстановки известных численных значений радиусов и углов получаем

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = 9,8ms \left[4 \sin 30^\circ - 4 \cdot 0,2 \cos 30^\circ + 0,5 - \frac{1}{2} \sin 60^\circ - \frac{1}{3} \right] = 10,2ms \quad (5.7)$$

5 Подставляем полученные выражения для кинетических энергий и работ в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии системы. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы записывается следующим образом:

$$T - T_0 = \sum A_j^{\text{внеш}} + \sum A_j^{\text{внут}}.$$

После подстановки ранее выведенных соотношений (5.1), (5.5)–(5.7) получим

$$2,625mv_1^2 = 10,2ms.$$

Из последнего равенства выражаем искомую скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{10,2}{2,625}} s = 2\sqrt{s}.$$

Д-6 ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Некоторые положения теории

Возможными, или виртуальными, называют воображаемые бесконечно малые перемещения точек системы, не противоречащие механическим связям, наложенным на систему, и задаваемые в некоторый фиксированный момент времени. Число независимых возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Возможные перемещения могут быть линейными (обозначаются символом $\delta\vec{s}$) и угловыми ($\delta\varphi$).

Возможное перемещение материальной точки, находящейся на поверхности, направлено по касательной к поверхности. Возможные перемещения всех точек поступательно движущегося тела одинаковы.

Возможным перемещением вращательно движущегося тела является поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси вращения (рисунок 6.1). При этом возможное перемещение точки вращающегося тела направлено перпендикулярно отрезку h , соединяющему данную точку с осью вращения,

$$\delta s = h \delta\varphi .$$

Если тело движется плоско, то его возможное перемещение представляет собой поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр перемещений (МЦП). Положение МЦП тела совпадает с положением мгновенного центра скоростей.

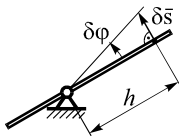


Рисунок 6.1

Работа постоянной силы на возможном перемещении точки ее приложения определяется так же, как и работа на действительном перемещении. Работа δA силы \vec{F} на возможном перемещении точки приложения данной силы $\delta\vec{s}$ равна

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{s} = F \delta s \cos \alpha ,$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $\delta\vec{s}$.

Если сила \vec{F} приложена к телу, совершающему поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг точки O , то работу такой силы можно определить по формуле

$$\delta A = M_O(\vec{F}) \delta\varphi ,$$

где $M_O(\vec{F})$ – момент силы \vec{F} относительно точки O . Если момент $M_O(\vec{F})$ противоположен возможному вращению, то работа силы \vec{F} отрицательна.

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными*. К идеальным относятся следующие связи: гладкая поверхность; шероховатая поверхность при качении тела без проскальзывания; упругая нить; невесомый стержень; цилиндрический и сферический шарниры; жесткая заделка. При наличии скольжения связь типа шероховатая поверхность не является идеальной, так как работа силы трения на возможном перемещении не равна нулю.

Суть принципа возможных перемещений состоит в следующем: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю

$$\sum \delta A(\vec{F}_i) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_i)$ – элементарная работа i -й активной силы на возможном перемещении точки ее приложения.

Условие задания Д-6

Механизмы, изображенные на рисунке 6.2, находятся под действием сил \vec{F} , \vec{Q} и пары сил с моментом M . Исходные данные приведены в таблице 6.1. Угол $\alpha = 30^\circ$, а $\beta = 45^\circ$. Используя принцип возможных перемещений, определить модуль силы \vec{F} , при котором система будет находиться в равновесии.

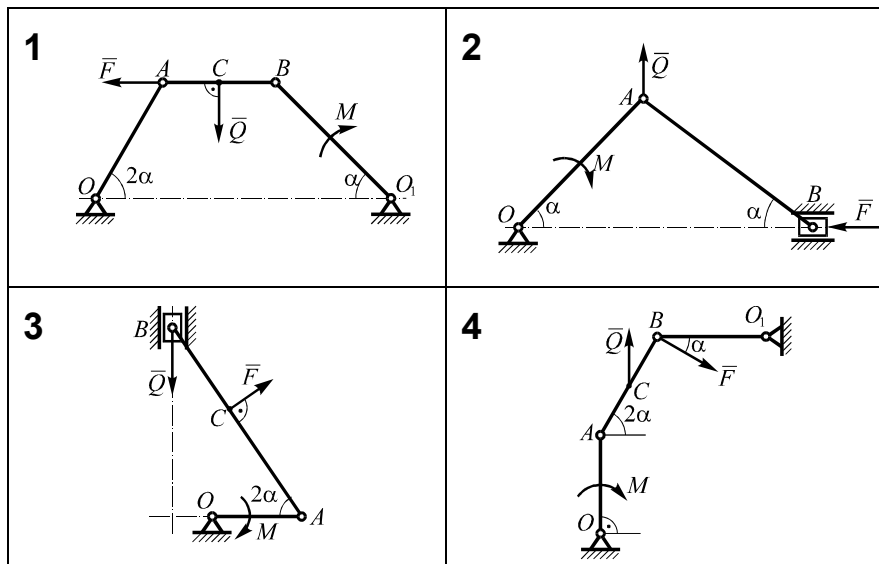


Рисунок 6.2 (начало)

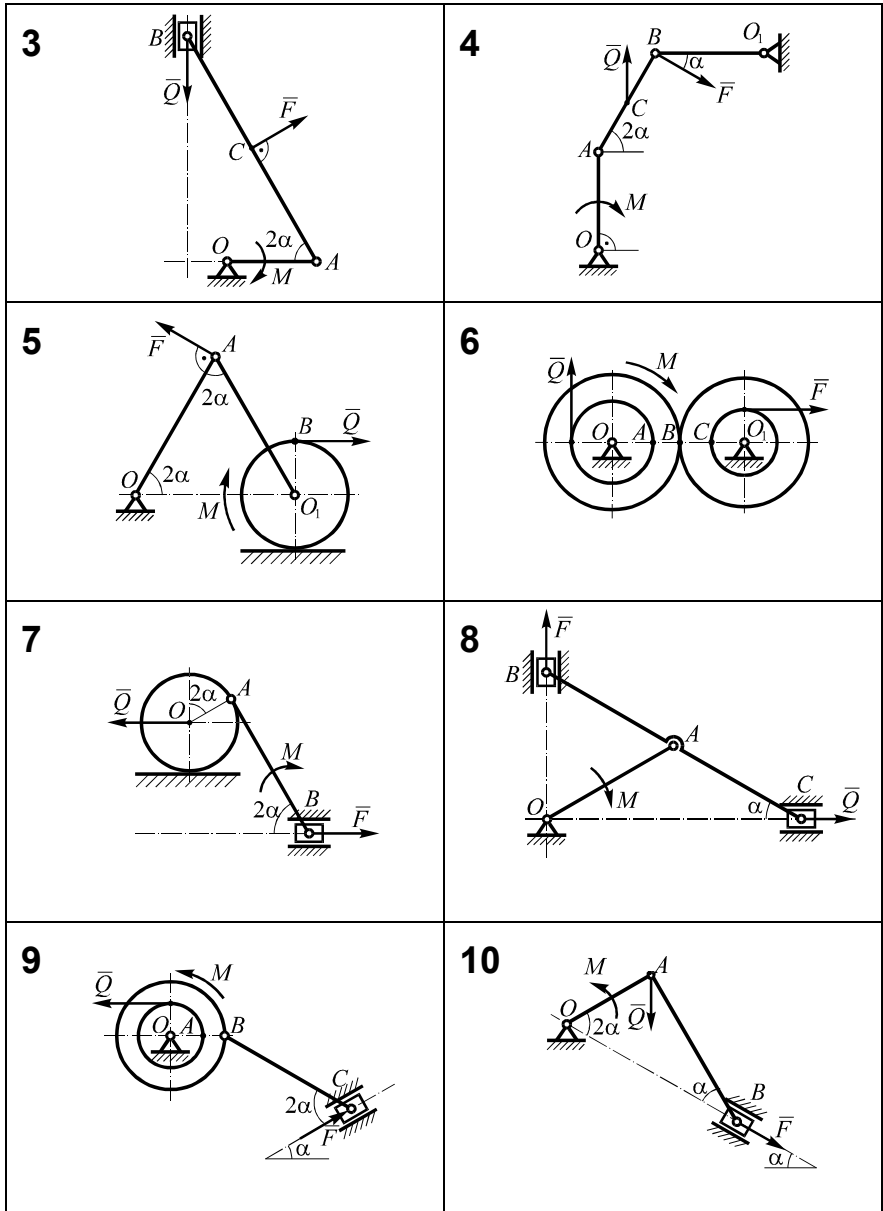


Рисунок 6.2 (продолжение)

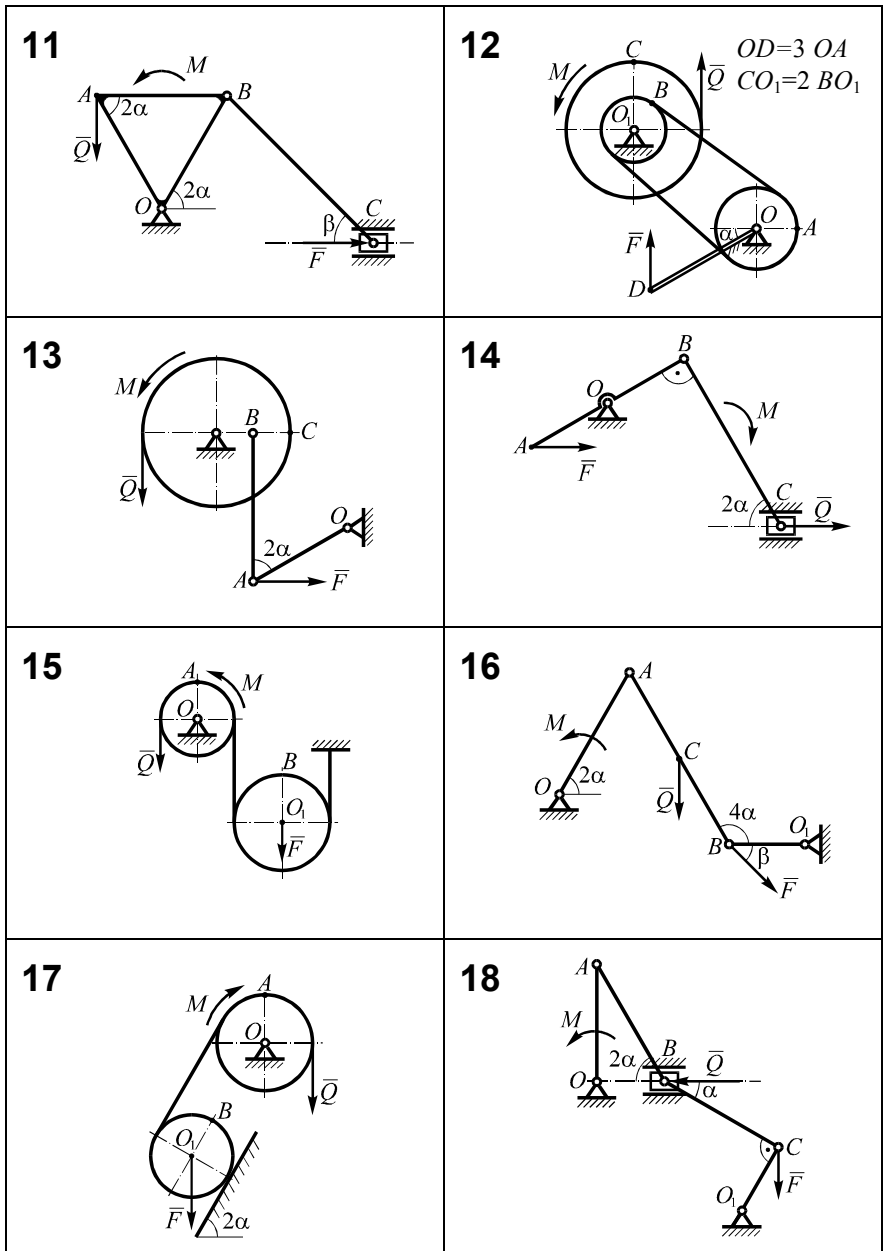


Рисунок 6.2 (продолжение)

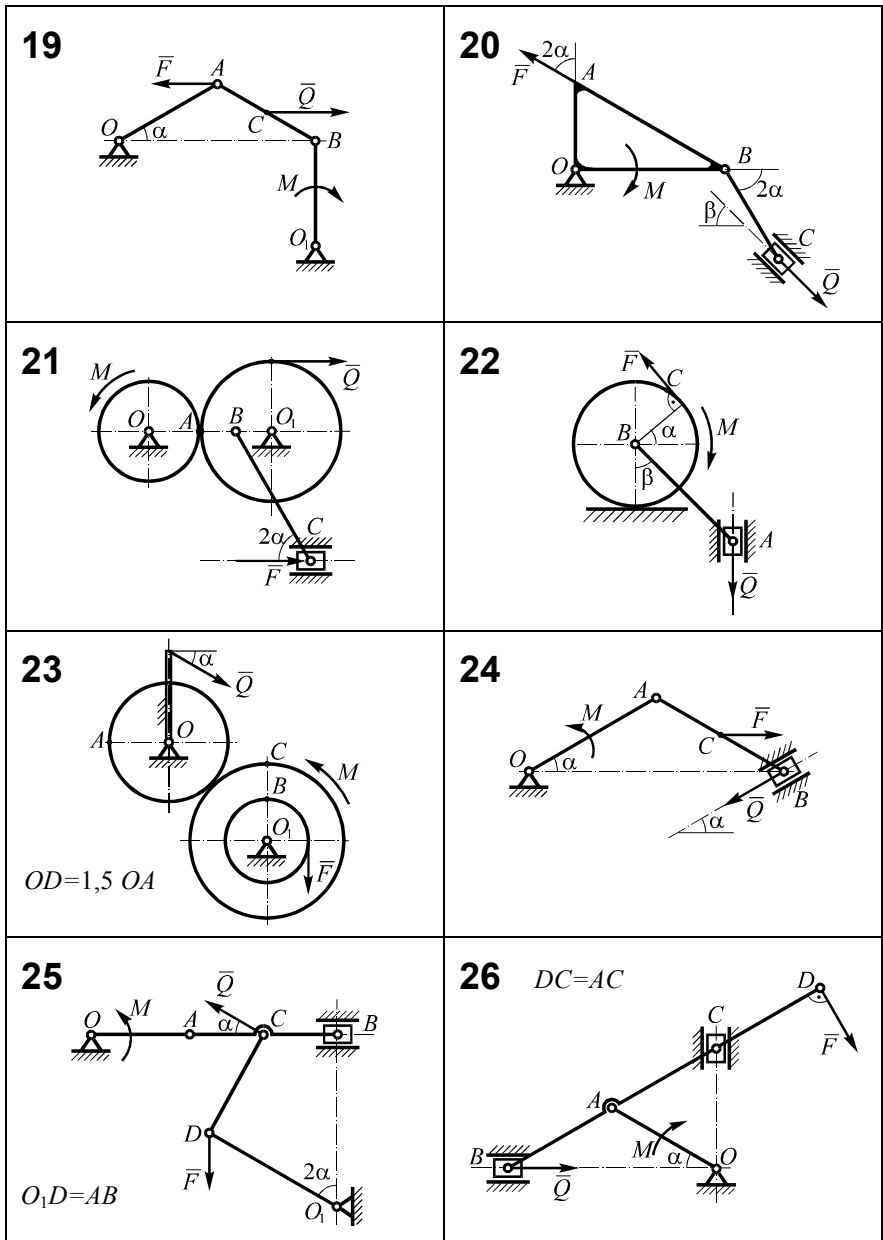


Рисунок 6.2 (продолжение)

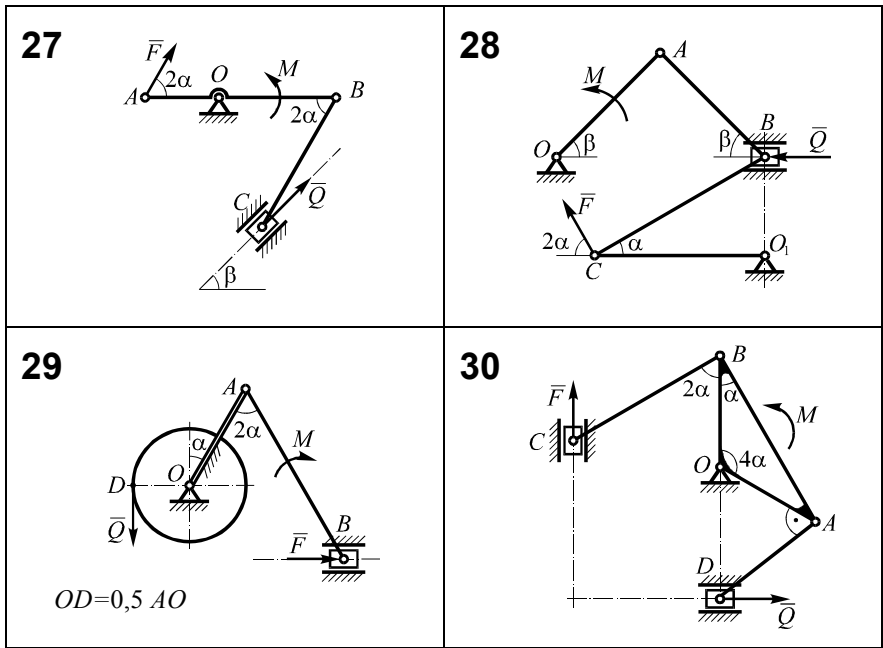


Рисунок 6.2 (окончание)

Таблица 6.1 – Исходные данные к заданию Д-6

Вариант	Размер звена, см				Q, Н	M, Н·м
	AO	AB	BC	BO ₁		
1	45	60	30	78	200	100
2	30	30	—	—	150	80
3	50	100	50	—	100	50
4	60	80	40	—	200	20
5	50	—	—	40	100	20
6	30	20	10	40	90	40
7	30	70	—	—	160	100
8	50	50	100	—	100	30
9	30	30	80	—	100	70
10	30	70	—	—	180	100
11	40	40	60	—	200	60
12	50	—	—	30	240	80
13	30	90	20	20	140	50
14	20	50	80	—	220	100
15	20	—	—	40	150	60

Продолжение таблицы 6.1

Вариант	Размер звена, см				Q , Н	M , Н·м
	AO	AB	BC	BO_1		
16	35	80	40	30	260	80
17	30	—	—	40	100	20
18	25	—	40	—	80	10
19	40	40	20	50	200	50
20	30	42	80	—	100	30
21	20	15	60	25	150	60
22	—	75	40	—	110	70
23	35	—	20	15	90	25
24	60	60	30	—	200	33
25	30	70	40	50	180	20
26	40	40	80	—	250	100
27	40	60	50	—	275	75
28	30	30	40	20	150	50
29	40	80	—	—	300	80
30	50	—	—	—	100	100

Пример выполнения задания

Механизм находится под действием силы $Q = 150$ Н и пары сил с моментом $M = 100$ Н·м (рисунок 6.3). Размеры тел: $AO = AB = 60$ см, $BC = 30$ см, $BO_1 = 50$ см. Используя принцип возможных перемещений, определить модуль силы \vec{F} , при котором система будет находиться в равновесии.

Решение

1 Делаем рисунок механизма (см. рисунок 6.3). Указываем все внешние силы и моменты, действующие на систему тел. На систему действуют: силы \vec{F} и \vec{Q} ; пара сил с моментом M ; сила тяжести колеса \vec{G} .

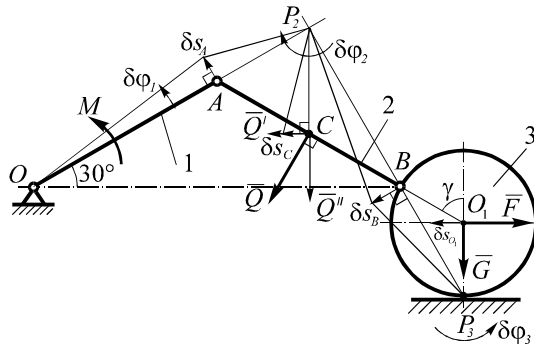


Рисунок 6.3

2 *Указываем возможные перемещения тел механизма.* Тело 1 (кривошип AO) движется вращательно вокруг оси, проходящей через точку O . Возможное перемещение этого тела – поворот вокруг точки O на угол $\delta\varphi_1$. Тело 2 (шатун AB) движется плоско. Чтобы найти мгновенный центр перемещений (МЦП) тела 2, укажем возможные перемещения двух его точек. Возможное перемещение точки A $\delta\bar{s}_A$ направлено перпендикулярно отрезку AO . Точка B принадлежит телу 3, которое движется плоско. МЦП тела 3 (точка P_3) находится в точке контакта колеса с поверхностью. Возможное перемещение точки B $\delta\bar{s}_B$ перпендикулярно отрезку BP_3 . Проведем через точки A и B перпендикуляры к векторам их возможных перемещений. В точке пересечения проведенных перпендикуляров находится МЦП тела 2 (точка P_2). Возможное перемещение тела 2 – это поворот на угол $\delta\varphi_2$ вокруг точки P_2 . Возможное перемещение тела 3 – поворот на угол $\delta\varphi_3$ вокруг МЦП (точки P_3).

Укажем возможные перемещения точек приложения внешних сил. Возможное перемещение точки C , к которой приложена сила \bar{Q} , перпендикулярно отрезку CP_2 . Возможное перемещение точки O_1 , к которой приложена сила \bar{F} , перпендикулярно отрезку O_1P_3 . Возможные перемещения точек O и P_3 равны нулю.

3 *Записываем формулировку принципа возможных перемещений.* Механизм будет находиться в равновесии, если сумма работ активных сил на возможных перемещениях будет равна нулю,

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0.$$

Вектор силы тяжести колеса \bar{G} перпендикулярен возможному перемещению точки O_1 . Значит, работа силы \bar{G} равна нулю. Для рассматриваемого механизма принцип возможных перемещений приводит к уравнению:

$$\delta A(\bar{F}) + \delta A(\bar{Q}) + \delta A(M) = 0. \quad (6.1)$$

Работа пары сил на возможном перемещении равна произведению момента пары на возможный угол поворота тела, к которому приложена пара,

$$\delta A(M) = M\delta\varphi_1.$$

Работа силы на возможном перемещении равна скалярному произведению силы на вектор возможного перемещения точки приложения этой силы:

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta\bar{s}_{O_1} = -F\delta s_{O_1};$$

$$\delta A(\bar{Q}) = \bar{Q} \cdot \delta\bar{s}_C = Q\delta s_C \cos \alpha.$$

Определим угол α между векторами \bar{Q} и $\delta\bar{s}_C$ (см. рисунок 6.3). По условию задачи треугольник ABO равнобедренный ($AO = AB$). Значит,

$\angle OAB = 120^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$, $\angle P_2AB = 60^\circ$. Треугольник BO_1P_3 – равнобедренный ($BO_1 = O_1P_3$), $\angle BO_1P_3 = 120^\circ$. Значит $\angle O_1P_3B = 30^\circ$, $\angle P_2BO = 60^\circ$, $\angle P_2BA = 30^\circ$. Следовательно, треугольник ABP_2 прямоугольный ($\angle AP_2B = 90^\circ$). Из прямоугольного треугольника ABP_2 находим:

$$AP_2 = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ м.}$$

Значит треугольник ACP_2 – равносторонний ($AC = AB - BC = AP_2$, $\angle CAP_2 = 60^\circ$), и $\angle ACP_2 = 60^\circ$. Искомый угол α и $\angle ACP_2$ являются углами со взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\alpha = 60^\circ$ и

$$\delta A(\bar{Q}) = Q \delta s_C \cos 60^\circ.$$

Замечание: Работу силы \bar{Q} на возможном перемещении также можно вычислить, как работу момента этой силы относительно МЦП звена AB (точки P_2):

$$\delta A(\bar{Q}) = M_{P_2}(\bar{Q}) \delta \varphi_2 = Q' PC_2 \delta \varphi_2 + Q'' AP_2 \cos 30^\circ \delta \varphi_2.$$

Здесь $Q' = Q \cos 60^\circ$, $Q'' = Q \cos 30^\circ$.

Подставим выражения для работ в уравнение (6.1).

$$Q \delta s_C \cos 60^\circ - F \delta s_{O_1} + M \delta \varphi_1 = 0. \quad (6.2)$$

4 Выражаем входящие в уравнение (6.2) возможные перемещения через возможный угол поворота $\delta \varphi_1$ (можно выразить через любое из указанных на рисунке возможных перемещений). Возможное перемещение точки A можно выразить через угол поворота $\delta \varphi_1$ ($\delta s_A = AO \delta \varphi_1$) или через угол $\delta \varphi_1$ ($\delta s_A = AP_2 \delta \varphi_2$). Значит

$$AO \delta \varphi_1 = AP_2 \delta \varphi_2 \Rightarrow \delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \frac{AO}{AP_2}.$$

Тогда для возможного перемещения точки C запишем

$$\delta s_C = CP_2 \delta \varphi_2 = CP_2 \delta \varphi_1 \frac{AO}{AP_2}. \quad (6.3)$$

В равностороннем треугольнике ACP_2 длины отрезков AC и CP_2 одинаковы $CP_2 = AC = 0,3$ м.

Тела 2 и 3 имеют общую точку B . Возможное перемещение этой точки можно выразить через угол поворота $\delta \varphi_2$ ($\delta s_B = BP_2 \delta \varphi_2$) или угол поворота $\delta \varphi_3$ ($\delta s_B = BP_3 \delta \varphi_3$). Значит,

$$BP_2 \delta \varphi_2 = BP_3 \delta \varphi_3 \Rightarrow \delta \varphi_3 = \delta \varphi_2 \frac{BP_2}{BP_3}.$$

Длину отрезка BP_2 определим из прямоугольного треугольника ABP_2 .

$BP_2 = AB \cos 30^\circ = 0,6 \cdot 0,866 = 0,52$ м. Длину отрезка BP_3 определим из треугольника BO_1P_3 по теореме косинусов

$$\begin{aligned} BP_3 &= \sqrt{BO_1^2 + O_1P_3^2 - 2BO_1 \cdot O_1P_3 \cos 120^\circ} = \\ &= \sqrt{0,25 + 0,25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 0,866 \text{ м.} \end{aligned}$$

Для возможного перемещения точки O_1 получим

$$\delta s_{O_1} = O_1P_3 \cdot \delta \varphi_3 = O_1P_3 \cdot \delta \varphi_2 \frac{BP_2}{BP_3}.$$

Подставим в последнее равенство выражение для угла $\delta \varphi_2$

$$\delta s_{O_1} = O_1P_3 \cdot \delta \varphi_1 \frac{BP_2 \cdot AO}{BP_3 \cdot AP_2}. \quad (6.4)$$

В треугольнике BO_1P_3 стороны O_1P_3 и BO_1 равны: $O_1P_3 = BO_1 = 0,5$ (м). Подставим выражения равенства (6.3) и (6.4) в уравнение (6.2)

$$Q \cdot CP_2 \cdot \delta \varphi_1 \frac{AO}{AP_2} \cos 60^\circ - F \cdot O_1P_3 \cdot \delta \varphi_1 \frac{BP_2 \cdot AO}{BP_3 \cdot AP_2} + M \cdot \delta \varphi_1 = 0. \quad (6.5)$$

5 *Решаем полученное уравнение.* Поскольку системе задавалось не нулевое возможное перемещение, то $\delta \varphi_1 \neq 0$ и на него можно сократить уравнение (6.5), и выразить силу F .

$$F = \frac{BP_3 \cdot AP_2}{O_1P_3 \cdot BP_2 \cdot AO} \left(M + Q \frac{CP_2 \cdot AO}{AP_2} \cos 60^\circ \right).$$

Подставим численные значения и произведем вычисления

$$F = \frac{0,866 \cdot 0,3}{0,5 \cdot 0,52 \cdot 0,6} \left(100 + 150 \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,3} \cdot 0,5 \right) = 1,665 \cdot 145 = 241,425 \text{ (Н)}.$$

Д-7 ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Некоторые положения теории

Определение реакций связей осуществляется с использованием теории, приведенной на страницах 17–19 данного пособия, в соответствии с планом:

1 Отбросить ту связь, реакцию которой требуется определить. Действие связи заменить ее реакцией, которую добавляют к активным силам.

2 Системе сообщить возможное перемещение.

3 Определить элементарные работы всех активных сил на возможных перемещениях точек системы.

4 Установить зависимости между возможными перемещениями и выразить их через одно возможное перемещение.

5 В соответствии с принципом возможных перемещений, приравнять сумму активных сил на возможных перемещениях к нулю. Сократить на возможное перемещение, через которое выражены перемещения всех точек, и определить искомую реакцию.

Условие задания Д-7

На основании исходных данных (таблица 7.1), используя принцип возможных перемещений, определить реакции связей составной конструкции, изображенной на рисунке 7.1.

Таблица 7.1 – Исходные данные к заданию Д-7

Вариант	l , м	α , град	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	Вариант	l , м	α , град	F , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	0,5	60	4	6	2	16	2	45	6	15	2
2	1	30	7	10	3	17	1	60	15	9	2
3	0,6	30	10	12	4	18	0,6	60	20	18	10
4	1	45	15	20	5	19	1	60	9	9	5
5	2	30	12	10	2	20	2	30	6	12	2
6	2	60	9	20	8	21	1,5	30	5	16	3
7	0,5	60	16	8	5	22	2	60	20	11	5
8	0,8	30	10	6	3	23	1	30	6	8	2
9	1	30	12	6	2	24	2	45	5	5	1
10	2	60	8	10	3	25	0,5	30	10	6	8
11	1	45	20	11	4	26	1	30	6	11	5
12	3	30	9	5	2	27	0,7	60	12	7	3
13	1	45	12	9	5	28	0,5	30	9	10	8
14	1	—	7	11	3	29	2	60	25	9	1
15	0,5	30	9	12	6	30	1	30	18	10	5

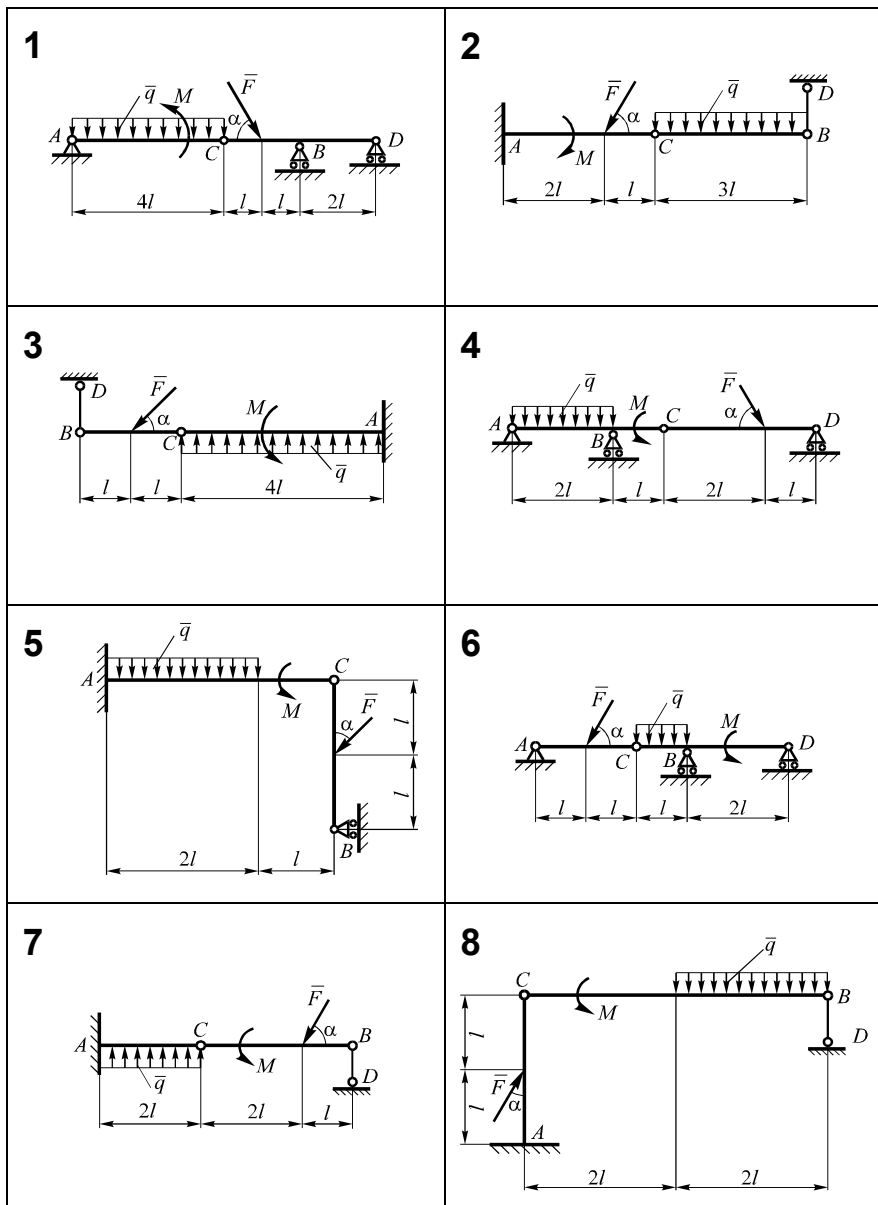


Рисунок 7.1 (начало)

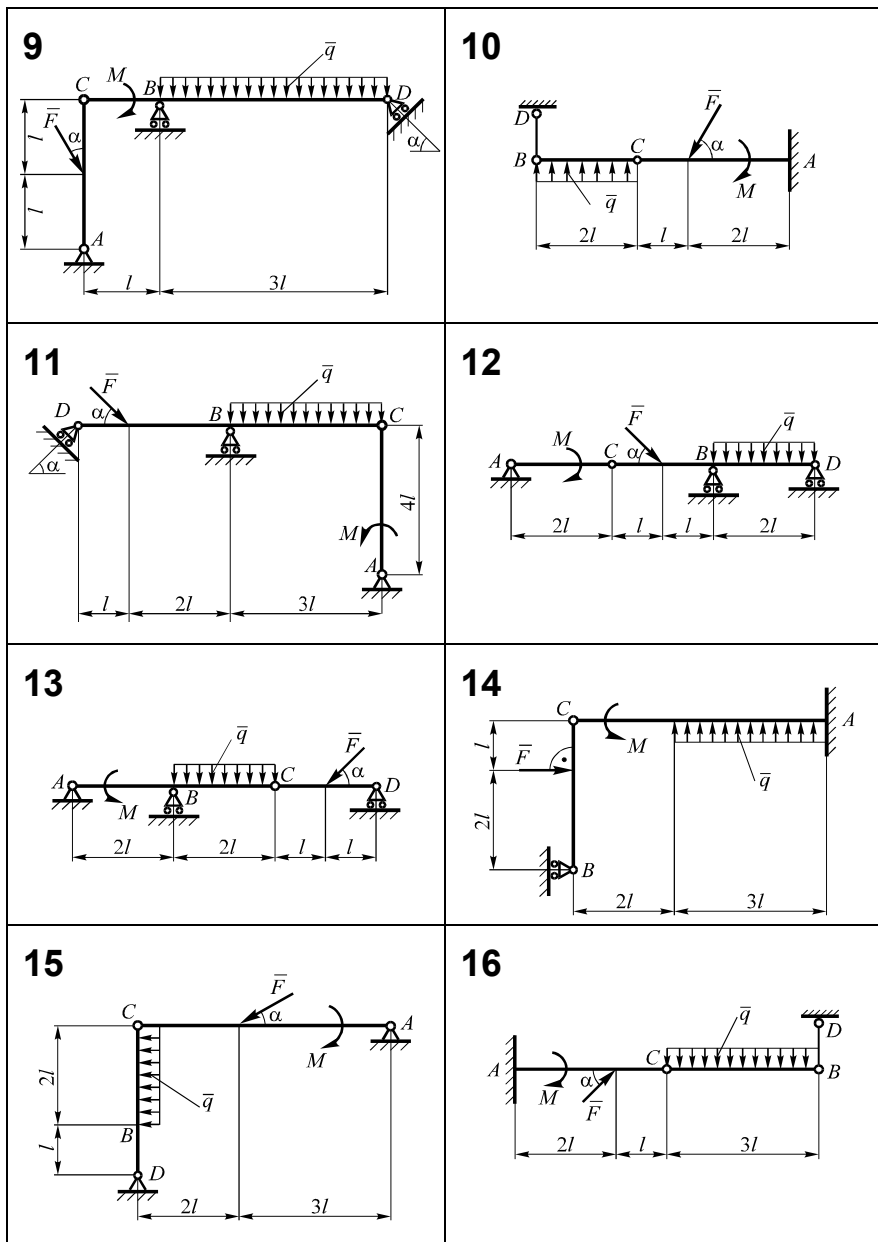


Рисунок 7.1 (продолжение)

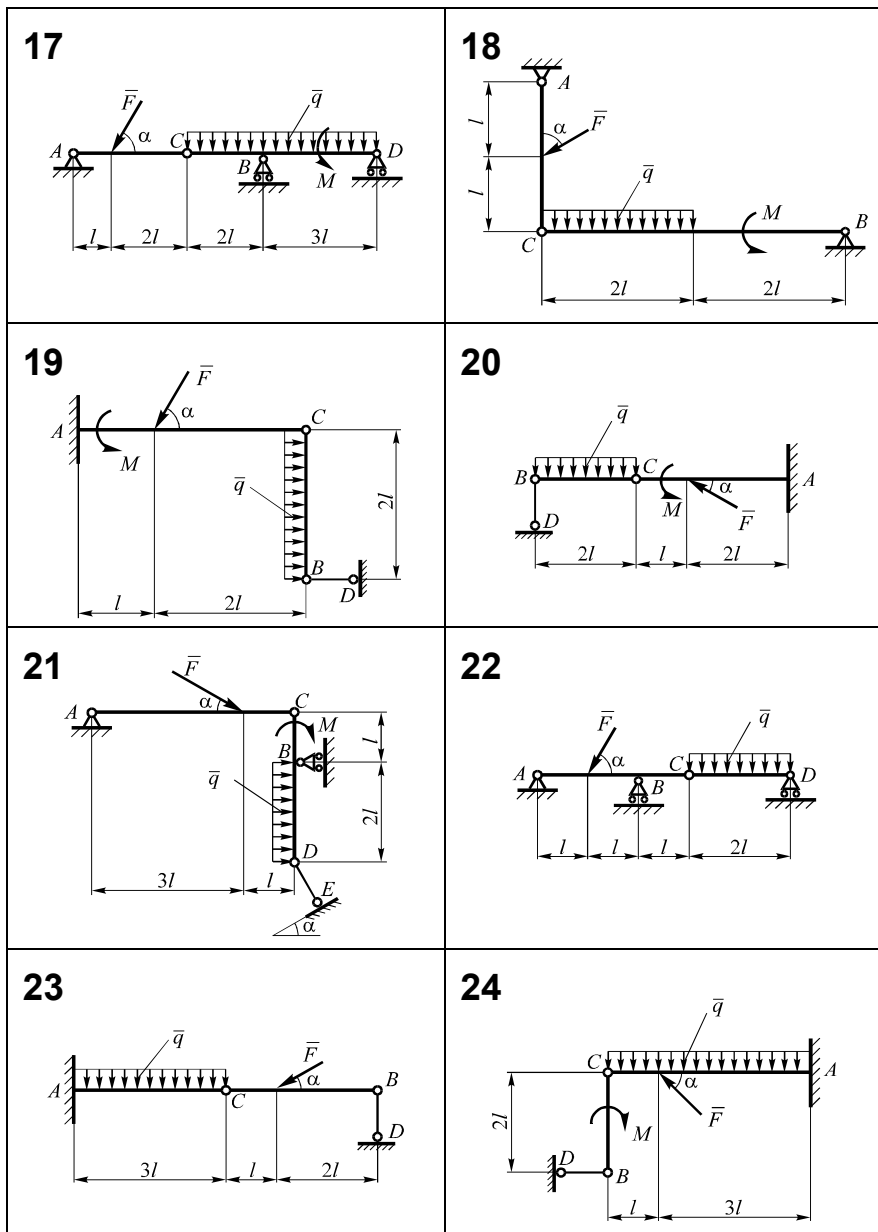


Рисунок 7.1 (продолжение)

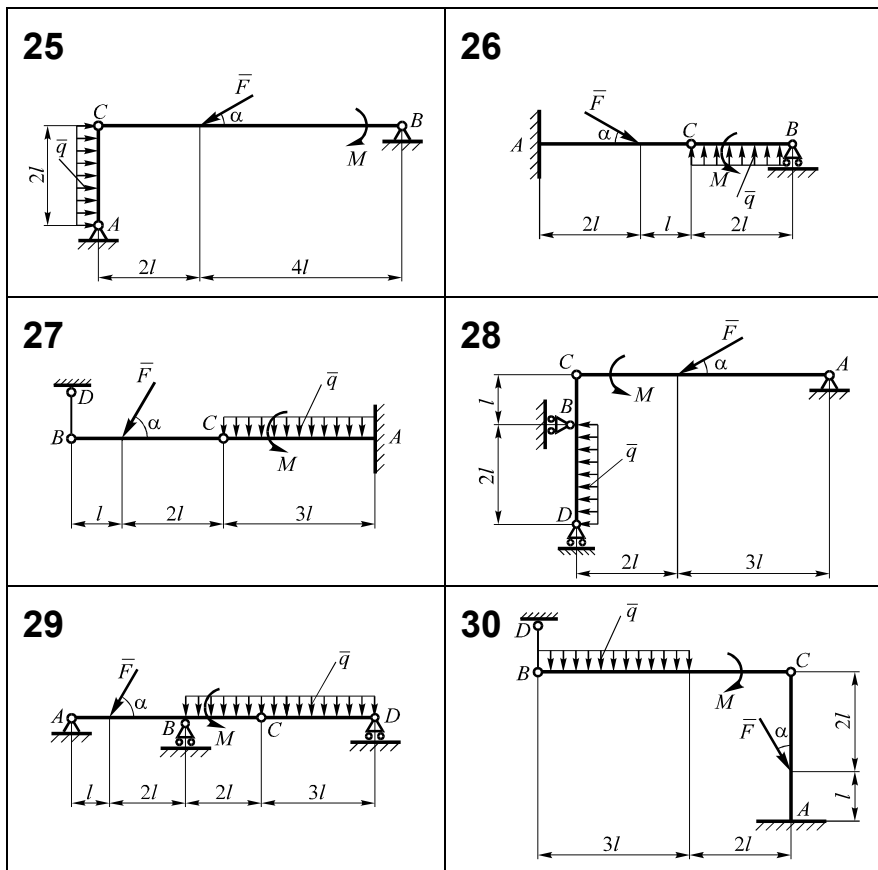


Рисунок 7.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Определить реакции связей составной конструкции, изображенной на рисунке 7.2. Дано: $l = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$; $F = 6$ кН; $M = 11$ кН·м; $q = 2$ кН/м.

Решение

1 Изображаем исследуемую систему и указываем действующие на нее силы (рисунок 7.3). Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой \bar{Q} , приложенной к центру отрезка CE . Следовательно,

$CH = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}l$. Модуль силы \bar{Q} определяется следующим образом: $Q = q \cdot CE = q \cdot 3l$, $Q = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$.

На точку A действует реакция связи типа гладкая поверхность \bar{R}_A , направленная перпендикулярно опорной поверхности. На точку B тела наложена связь типа жесткая заделка. Реакция данной связи состоит из силы \bar{R}_B и момента заделки M_B . Силу \bar{R}_B разложим на две составляющие \bar{R}_{Bx} , \bar{R}_{By} . Таким образом, необходимо определить 4 величины: R_A , R_{Bx} , R_{By} , M_B .

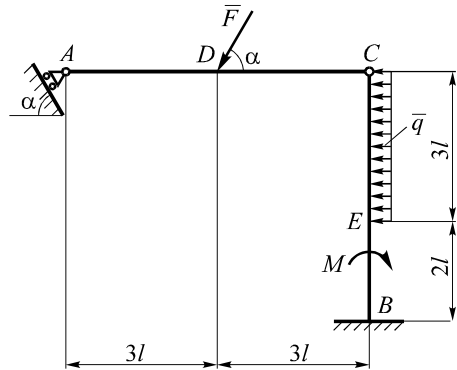


Рисунок 7.2

2 Приступаем к определению искоемых реакций.

2.1 Определим реакцию R_A

а) отбросим в точке A механическую связь «гладкая поверхность», заменив ее действие соответствующей реакцией R_A . Тогда сила R_A перейдет в разряд активных, а точка A получит возможность перемещаться. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.4);

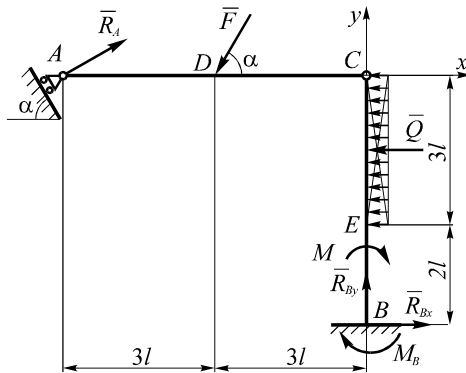


Рисунок 7.3

б) сообщаем системе возможные перемещения. Так как на точку B наложена связь жесткая заделка, то тело BC останется неподвижным. Следовательно, возможным перемещением тела AC может быть только поворот вокруг точки C на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Укажем возможные перемещения точек приложения сил (точек A и D). Так как

точка C – центр вращения тела AC , то вектор $\delta\bar{s}_A$ направлен перпендикулярно отрезку AC , а вектор возможного перемещения $\delta\bar{s}_D$ направлен перпендикулярно отрезку DC ;

в) определим элементарные работы сил на указанных перемещениях:

$$\delta A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \delta \bar{s}_D = F \delta s_D \sin \alpha;$$

$$\delta A(\bar{R}_A) = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{s}_A = -R_A \delta s_A \cos \alpha;$$

г) установим связь между возможными перемещениями δs_A и δs_D . Перемещение δs_A связано с углом поворота тела AC следующим образом: $\delta s_A = AC \delta \varphi = 6l \delta \varphi$. Следовательно, $\delta \varphi = \delta s_A / 6l$. Для перемещения δs_D

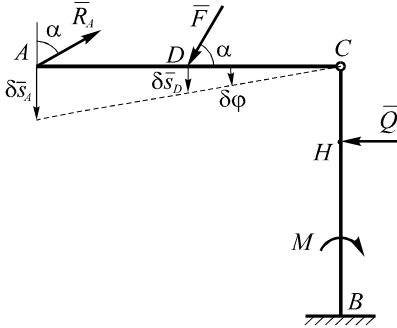


Рисунок 7.4

можно записать: $\delta s_D = DC \delta \varphi = 3l \delta \varphi$. Подставим ранее полученное выражение для угла $\delta \varphi$:

$$\delta s_D = \frac{3l}{6l} \delta s_A = \frac{1}{2} \delta s_A;$$

д) запишем формулу принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow \delta A(\bar{F}) + \delta A(\bar{R}_A) = 0.$$

Подставим выражение для элементарных работ:

$$F \delta s_D \sin \alpha - R_A \delta s_A \cos \alpha = 0.$$

Вспользуемся выражением перемещения δs_D через δs_A :

$$F \frac{1}{2} \delta s_A \sin \alpha - R_A \delta s_A \cos \alpha = 0.$$

Разделим полученное равенство на δs_A и выразим искомую силу R_A :

$$R_A = \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставим известные численные значения:

$$R_A = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \cdot 6 = 5,2 \text{ кН}.$$

2.2 Определим горизонтальную составляющую реакции жесткой заделки R_{Bx}

а) отбросим связь, препятствующую горизонтальному смещению точки B , заменив жесткую заделку скользящей (направляющими). Тогда сила R_{Bx} перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.5);

б) сообщаем системе возможные перемещения. Точка B может перемещаться только горизонтально $\delta \bar{s}_B$. Так как реакция в точке B запрещает поворот, то тело BC будет двигаться поступательно. Тогда $\delta \bar{s}_F \parallel \delta \bar{s}_B$ и $\delta s_F = \delta s_B$. Кроме того, $\delta \bar{s}_C \parallel \delta \bar{s}_B$ и $\delta s_C = \delta s_B$. Таким образом, тело BC

смещается на $\delta\bar{s}_B$. Перемещение точки A $\delta\bar{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (см. рисунок 7.5). Чтобы указать возможное перемещение тела AC , найдем его мгновенный центр перемещений. МЦП будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам их возможных перемещений (точка P). МЦП тела является мгновенным центром вращения. Следовательно, возможное перемещение тела AC представляет собой поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi$. Смещение точки приложения силы \bar{F} направлено перпендикулярно отрезку DP (см. рисунок 7.5);

в) определим элементарные работы сил на указанных возможных перемещениях:

$$\delta A(\bar{R}_{Bx}) = -R_{Bx} \delta s_B;$$

$$\delta A(\bar{Q}) = Q \delta s_C = q \cdot 3l \cdot \delta s_B.$$

Так как тело BC перемещается поступательно, то момент M работы не совершает. Сила \bar{F} приложена к телу AC , поворачивающемуся вокруг МЦП (точка P). Следовательно, работу этой силы на возможном угле поворота можно определить как работу момента:

$$\delta A(\bar{F}) = M_P(\bar{F}) \delta\varphi.$$

Здесь $M_P(\bar{F})$ – момент силы \bar{F} относительно точки P . Для определения этого момента силу \bar{F} удобно разложить на горизонтальную \bar{F}' и вертикальную \bar{F}'' составляющие. В соответствии с правилом определения проекции силы на ось модули этих составляющих будут иметь следующие значения:

$$F' = F \cos \alpha \Rightarrow F' = 6 \cos 60^\circ = 3 \text{ кН}; \quad F'' = F \sin \alpha \Rightarrow F'' = 6 \sin 60^\circ = 5,2 \text{ кН}.$$

Момент силы \bar{F} относительно точки P равен сумме моментов сил \bar{F}' и \bar{F}'' . Тогда

$$\delta A(\bar{F}) = M_P(\bar{F}') \delta\varphi + M_P(\bar{F}'') \delta\varphi.$$

Момент силы \bar{F}' относительно точки P совпадает по направлению с углом поворота $\delta\varphi$, а момент силы \bar{F}'' – противоположен направлению поворота. Следовательно, первое слагаемое в правой части последнего равенства будет положительным, а второе – отрицательным:

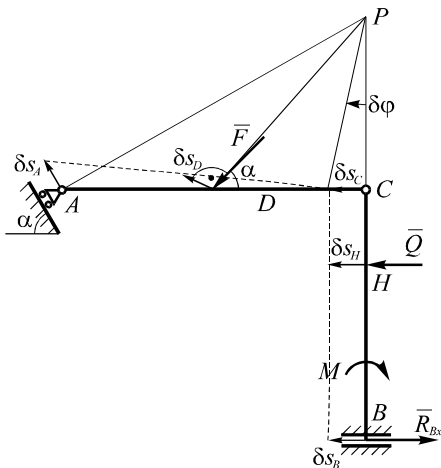


Рисунок 7.5

$$\delta A(\bar{F}) = F'PC \delta\varphi - F''CD \delta\varphi.$$

Определим длину отрезка PC . В прямоугольном треугольнике ACP угол C равен 90° , а угол $\angle PAC = 90^\circ - \alpha$. Следовательно,

$$PC = AC \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 6l \operatorname{ctg} \alpha.$$

Подставим выражения для модулей составляющих \bar{F}' и \bar{F}'' в формулу для работы силы \bar{F} :

$$\delta A(\bar{F}) = F \cos \alpha \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha \delta\varphi - F \sin \alpha \cdot 3l \delta\varphi = 3Fl \delta\varphi (2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha);$$

г) установим связь между возможным перемещением δs_B и углом $\delta\varphi$. Для определения этой связи используем метод общей точки. Общей для звеньев AC и BC является точка C . Так как тело BC движется поступательно, то $\delta s_C = \delta s_B$. С другой стороны, точка C принадлежит телу AC , для которого точка P является мгновенным центром перемещений. Следовательно, $\delta s_C = \delta\varphi CP = \delta\varphi 6l \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда

$$\delta s_B = \delta\varphi \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha;$$

д) запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow \delta A(\bar{R}_{Bx}) + \delta A(\bar{Q}) + \delta A(\bar{F}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ:

$$-R_{Bx} \delta s_B + q \cdot 3l \delta s_B + 3Fl \delta\varphi (2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для δs_B :

$$-R_{Bx} \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha \delta\varphi + q \cdot 3l \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha \delta\varphi + 3Fl \delta\varphi (2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Разделим полученное равенство на $3l \operatorname{ctg} \alpha \delta\varphi \neq 0$:

$$-2R_{Bx} + q \cdot 6l + F \left(2 \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right) = 0.$$

Выразим искомую силу R_{Bx} :

$$R_{Bx} = q \cdot 3l + F \left(\cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right).$$

Подставим известные численные значения

$$R_{Bx} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot \left(\cos 60^\circ - \frac{\sin^2 60^\circ}{2 \cos 60^\circ} \right) = 6 + 6 \cdot \left(0,5 - \frac{0,75}{2 \cdot 0,5} \right) = 4,5 \text{ кН}.$$

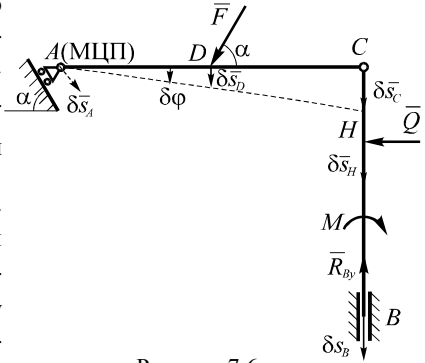
2.3 Определим вертикальную составляющую реакции жесткой заделки R_{By}

а) отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению точки B , заменив жесткую заделку скользящей. Тогда сила \bar{R}_{By} перейдет в разряд ак-

тивных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.6);

б) сообщаем системе возможное перемещение. Точка B может двигаться только вертикально $\delta\bar{s}_B$. Так как реакция в точке B препятствует повороту тела BC , то BC движется поступательно, то $\delta\bar{s}_H \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_H = \delta s_B$. Кроме того, $\delta\bar{s}_C \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_C = \delta s_B$. Таким образом, тело BC смещается на $\delta\bar{s}_B$. Перемещение точки A $\delta\bar{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (см. рисунок 7.6). Чтобы корректно указать возможное перемещение тела AC , найдем его мгновенный центр перемещений. Мгновенный центр перемещений будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам их возможных перемещений. Видим, что МЦП тела AC совпадает с точкой A . Следовательно, перемещение точки A отсутствует, а возможное перемещение тела AC представляет собой поворот вокруг точки A на угол $\delta\varphi$. Возможное перемещение точки D $\delta\bar{s}_D$ направлено перпендикулярно отрезку AD ;

Рисунок 7.6



в) определим элементарные работы сил на указанных перемещениях:

$$\delta A(\bar{R}_{By}) = -R_{By} \delta s_B; \quad \delta A(\bar{Q}) = Q \delta s_F \cos 90^\circ = 0; \quad \delta A(\bar{F}) = F \delta s_D \sin \alpha.$$

Так как тело BC движется поступательно, то момент M работы не совершает.

г) установим связь между возможными перемещениями δs_D и δs_B . Точка C – общая для тел AC и BC . Как показано выше, $\delta s_C = \delta s_B$. Тело AC вращается вокруг точки A . Следовательно,

$$\delta s_C = \delta\varphi AC \Rightarrow \delta\varphi = \frac{\delta s_C}{AC} = \frac{\delta s_B}{AC}.$$

Для перемещения точки D можно записать: $\delta s_D = \delta\varphi AD$. Подставим выражение для угла поворота:

$$\delta s_D = \frac{AD}{AC} \delta s_B = \frac{3l}{6l} \delta s_B = \frac{1}{2} \delta s_B;$$

д) запишем формулу принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow \delta A(\bar{R}_{By}) + \delta A(\bar{F}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ сил:

$$-R_{By} \delta s_B + F \delta s_D \sin \alpha = 0.$$

Воспользуемся формулой для δs_D :

$$-R_{By} \delta s_B + F \frac{1}{2} \delta s_B \sin \alpha = 0.$$

Следовательно: $R_{By} = \frac{1}{2} F \sin \alpha$. Подставим численные значения:

$$R_{By} = \frac{1}{2} \cdot 6 \sin 60^\circ = 2,6 \text{ кН}.$$

2.4 Определим момент заделки M_B :

а) отбросим связь в точке B , заменив жесткую заделку цилиндрическим шарниром с приложенным моментом M_B , который перейдет в разряд активных силовых факторов. Делаем рисунок (рисунок 7.7), указываем активные силы и пары сил;

б) сообщаем системе возможные перемещения. Тело BC поворачивается вокруг точки B на возможный угол $\delta\varphi_1$. Для определения положения МЦП тела AC укажем возможные перемещения точек A и C . Перемещение точки A направлено параллельно опорной поверхности. Так

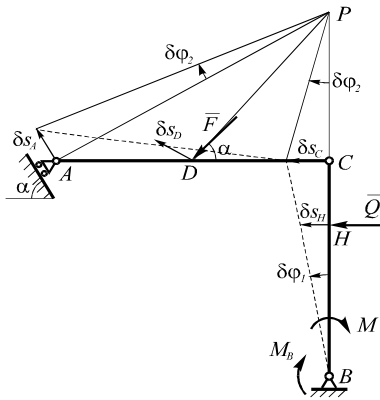


Рисунок 7.7

как тело BC вращается вокруг точки B , то вектор возможного перемещения точки C направлен перпендикулярно отрезку BC . МЦП тела AC лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам возможных перемещений точек A и C (см. рисунок 7.7). Таким образом, возможное перемещение тела AC – поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi_2$. Возможное перемещение точки приложения силы \bar{F} ($\delta\bar{s}_D$) направлено перпендикулярно отрезку DP . Возможное перемещение точки приложения силы \bar{Q} ($\delta\bar{s}_H$) направлено перпендикулярно отрезку BH ;

в) определим работы сил на указанных перемещениях. Пары сил с моментами M и M_B приложены к телу BC , которое поворачивается на угол $\delta\varphi_1$. Работа этих пар определяется следующим образом:

$$\delta A(M) = -M \delta\varphi_1, \quad \delta A(M_B) = -M_B \delta\varphi_1.$$

Здесь учтено, что моменты M и M_B противоположны направлению поворота звена BC . Работу силы \bar{Q} определим через нахождение момента этой силы относительно точки B :

$$\delta A(\bar{Q}) = M_B(\bar{Q}) \delta \varphi_1 = QHB \delta \varphi_1.$$

Известно, что $Q = 3lq$, $HB = \frac{7}{2}l$. Следовательно,

$$\delta A(\bar{Q}) = \frac{21}{2}l^2q \delta \varphi_1 = 10,5l^2q \delta \varphi_1.$$

Положение МЦП тела AC на рисунке 7.7 совпадает с положением МЦП, определенным при нахождении реакции R_{Bx} (см. рисунок 7.5). Следовательно, для определения работы силы \bar{F} можно воспользоваться формулой, выведенной при нахождении R_{Bx} :

$$\delta A(\bar{F}) = 3Fl \delta \varphi_2 (2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha);$$

г) установим связь между углами поворота $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_2$. Воспользуемся методом общей точки. Общей для тел AC и BC является точка C . Тело BC поворачивается вокруг точки B . Следовательно, $\delta s_C = \delta \varphi_1 BC = \delta \varphi_1 \cdot 5l$. С другой стороны, для скорости точки C можно записать: $\delta s_C = \delta \varphi_2 \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha$. Приравняем правые части выражений для возможных перемещений δs_C :

$$\delta \varphi_1 \cdot 5l = \delta \varphi_2 \cdot 6l \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \delta \varphi_1 = \frac{6}{5} \delta \varphi_2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

д) запишем формулу принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow \delta A(M) + \delta A(M_B) + \delta A(\bar{Q}) + \delta A(\bar{F}) = 0.$$

Подставим выражения работ сил:

$$-M \delta \varphi_1 - M_B \delta \varphi_1 + 10,5l^2q \delta \varphi_1 + 3lF \delta \varphi_2 (2 \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Воспользуемся выведенной зависимостью для угла $\delta \varphi_1$ от $\delta \varphi_2$:

$$(-M - M_B + 10,5l^2q) \frac{6}{5} \delta \varphi_2 \operatorname{ctg} \alpha + 3lF \delta \varphi_2 (2 \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Разделим последнее равенство на $\delta \varphi_2 \neq 0$ и выразим момент M_B :

$$M_B = -M + 10,5l^2q + \frac{5}{2}lF \left(2 \cos \alpha - \frac{\sin \alpha^2}{\cos \alpha} \right).$$

Подставим известные численные значения:

$$M_B = -11 + 10,5 \cdot 2 + 10 \cdot \left(2 \cdot 0,5 - \frac{0,75}{0,5} \right) = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Проверим правильность решения задачи.

Изобразим исследуемую систему и укажем все действующие на нее силы (рисунок 7.3). На систему тел действует произвольная плоская система сил. Следовательно, необходимо составить три уравнения равновесия:

1) сумма проекций сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ R_A \sin \alpha - F \cos \alpha - Q + R_{Bx} &= 0; \end{aligned} \quad (7.1)$$

2) сумма проекций сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= 0; \\ R_A \cos \alpha - F \sin \alpha + R_{By} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

3) сумма моментов всех сил относительно любой точки также должна быть равна нулю. Уравнение моментов будем составлять относительно точки D

$$\begin{aligned} \sum M_D(\bar{F}_i) &= 0; \\ -R_A \cos \alpha \cdot 6l - Q \frac{3}{2}l + R_{By} \cdot 3l + R_{Bx} \cdot 5l - M - M_B &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Подставим в уравнения равновесия (7.1)–(7.3) известные численные значения и найденные ранее величины реакций связей:

$$3,46 \sin 60^\circ - 6 \cos 60^\circ - 2 \cdot 3 + 4,5 = 4,4 - 3 - 6 + 4,5 = 0;$$

$$5,2 \cos 60^\circ - 6 \sin 60^\circ + 2,6 = 2,6 - 5,2 + 2,6 = 0;$$

$$-5,2 \cos 60^\circ \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2,6 \cdot 3 + 4,5 \cdot 5 - 11 - 2,5 = 0,01 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как погрешность расчетов составляет $\frac{0,01}{22,5} \cdot 100\% = 0,04\%$, то ей можно пренебречь.

Д-8 ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Некоторые положения теории

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, направленную противоположно вектору ускорения \bar{a} и равную по модулю произведению массы точки m на ее ускорение:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}; \Phi = ma .$$

Главный вектор $\bar{\Phi}$ и главный момент \bar{M}_O^Φ сил инерции относительно некоторой точки O определяются путем суммирования соответствующих сил и моментов для каждой точки системы:

$$\bar{\Phi} = \sum \bar{\Phi}_i, \quad \bar{M}_O^\Phi = \sum \bar{M}_O(\bar{\Phi}_i),$$

где $\bar{\Phi}_i = -m_i\bar{a}_i$ – сила инерции i -й материальной точки системы.

Для абсолютно твердого тела вектор $\bar{\Phi}$ и момент \bar{M}_O^Φ зависят от вида движения этого тела:

а) *поступательное движение.*

Необходимо указать только главный вектор сил инерции $\bar{\Phi}$, приложенный к центру масс тела. Вектор $\bar{\Phi}$ направлен в сторону, противоположную вектору ускорения центра масс \bar{a}_C :

$$\bar{\Phi} = -t\bar{a}_C ,$$

где t – масса тела;

б) *вращение тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс тела.*

Необходимо приложить момент сил инерции, направленный противоположно угловому ускорению ε :

$$M^\Phi = J_C\varepsilon ,$$

где J_C – центральный момент инерции тела;

в) *плоскопараллельное движение твердого тела.*

В этом случае необходимо приложить силу инерции $\bar{\Phi}$ к центру масс тела и указать момент сил инерции M^Φ (рисунок 8.1).

Те же главный вектор $\bar{\Phi}$ и главный момент M^Φ следует учитывать для вращательно движущегося тела, если ось вращения не проходит через центр масс.

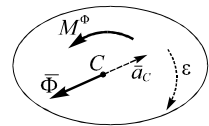


Рисунок 8.1

Одним из основных принципов аналитической механики является принцип Даламбера. Для материальной точки названный принцип формулируется так: *при движении материальной точки геометрическая сумма активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю*. То есть, введение силы инерции позволяет для материальной точки записать уравнения, аналогичные уравнениям равновесия.

Для материальной системы принцип Даламбера формулируется так: *при движении материальной системы геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, и сил инерции для всех точек системы равна нулю, а также геометрическая сумма моментов внешних сил и сумма моментов сил инерций относительно некоторой точки O равна нулю*. То есть, для материальной системы выполняются следующие условия:

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0, \quad \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \sum \bar{M}_O(\bar{\Phi}_i) = 0,$$

где \bar{F}_i – i -я внешняя активная сила, действующая на систему;

$\bar{\Phi}_i$ – сила инерции для i -й точки системы;

$\bar{M}_O(\bar{F}_i)$ – момент силы \bar{F}_i относительно произвольной точки O .

Таким образом, принцип Даламбера позволяет производить анализ движения материальной системы с помощью уравнений статики. Если действующие на материальную систему силы и силы инерции образуют плоскую систему сил, то в соответствии с принципом Даламбера составляется 3 уравнения равновесия. Если силы образуют пространственную систему сил, то составляется 6 уравнений.

При движении материальной системы выполняется принцип Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики). Суть принципа заключается в следующем: *при движении материальной системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма работ действующих на нее активных сил и сумма работ сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении системы*:

$$\sum \delta A(\bar{F}_i) + \sum \delta A(\bar{\Phi}_i) = 0,$$

где $\delta A(\bar{F}_i)$ – работа силы \bar{F}_i на возможном перемещении системы;

$\delta A(\bar{\Phi}_i)$ – работа силы инерции для i -й материальной точки на возможном перемещении данной точки.

Условие задания Д-8

Для механизмов, изображенных на рисунке 8.2, на основании приведенных в таблице 8.1 исходных данных определить ускорение тела 1, а также натяжение нити, прикрепленной к этому телу. Радиусы инерции ступенчатых

валов принять равным $i = \frac{\sqrt{Rr}}{2}$, в остальных случаях шкивы и катки считать

сплошными однородными цилиндрами. В вариантах 5 и 23 плита скользит по двум каткам, а в вариантах 7 и 15 - соединена с центрами двух катков. В вариантах 19, 22 и 27 определять силу натяжения не требуется.

Таблица 8.1 – Исходные данные к заданию Д-8

Вари- ант	Масса тела, кг			Радиус колеса, см				f	M , Н·м	α , град
	m_1	m_2	m_3	R_2	r_2	R_3	r_3			
1	m	$4m$	$3m$	20	—	20	15	0,2	$0,3mgR_2$	30
2	$5m$	$2m$	$4m$	30	20	10	—	0,3	$8mgR_3$	60
3	$3m$	$3m$	$3m$	30	20	15	—	0,1	mgR_3	60
4	$2m$	$4m$	m	20	10	25	—	0,2	$2mgR_3$	45
5	$2m$	$2m$	$3m$	15	—	—	—	—	mgR_2	30
6	$4m$	$3m$	$4m$	30	15	18	—	0,3	$8mgR_3$	45
7	m	$2m$	$4m$	40	20	—	—	—	mgR_4	60
8	$3m$	$2m$	$4m$	50	30	20	—	0,1	mgr_2	30
9	m	$2m$	$3m$	—	—	25	15	0,2	$2mgR_2$	30
10	$2m$	m	$3m$	—	—	30	10	0,1	mgR_2	60
11	$2m$	$2m$	$3m$	—	—	30	20	0,1	$2mgR_2$	15
12	$2m$	$3m$	m	25	15	—	—	0,2	mgr_2	45
13	m	$3m$	$2m$	20	10	—	—	—	$2mgr_2$	60
14	$2m$	$2m$	m	40	25	20	15	0,3	mgr_2	30
15	$2m$	$3m$	$2m$	30	20	—	—	—	$2mgr_2$	15
16	$3m$	$5m$	$2m$	25	15	—	—	0,1	mgR_2	30
17	m	$5m$	$3m$	30	25	20	—	0,2	mgR_3	60
18	$2m$	$3m$	$2m$	20	15	15	—	0,1	$2mgr_2$	—
19	$3m$	$2m$	m	40	30	20	—	—	mgr_2	30
20	$2m$	$4m$	$3m$	40	30	25	—	0,1	mgR_3	45
21	m	m	$2m$	—	—	20	15	0,1	$4mgR_3$	30
22	$3m$	$2m$	$2m$	25	15	15	—	—	$3mgr_2$	—
23	$4m$	$3m$	$2m$	40	25	—	—	—	$4mgr_2$	15
24	m	$2m$	$3m$	15	10	—	—	0,2	$2mgR_3$	60
25	$3m$	$2m$	m	40	15	20	—	0,1	$2mgr_2$	30
26	$3m$	$2m$	m	30	25	20	—	—	mgr_3	15
27	m	$3m$	$2m$	40	—	30	20	—	mgr_2	30
28	$4m$	$2m$	$2m$	20	15	10	—	0,1	mgr_2	15
29	$2m$	m	$2m$	15	10	—	—	—	$3mgR_3$	30
30	$2m$	$4m$	$3m$	30	15	25	20	—	mgr_2	15

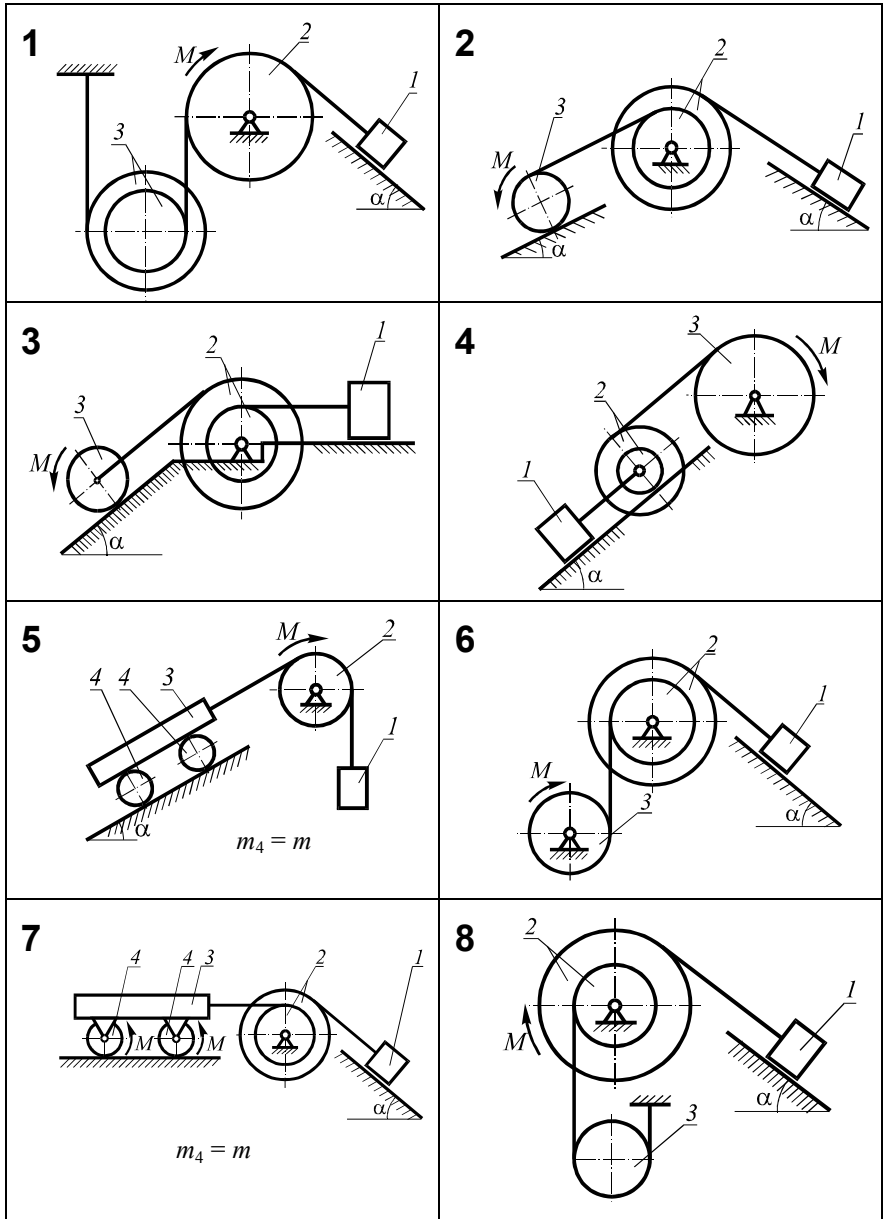


Рисунок 8.2 (начало)

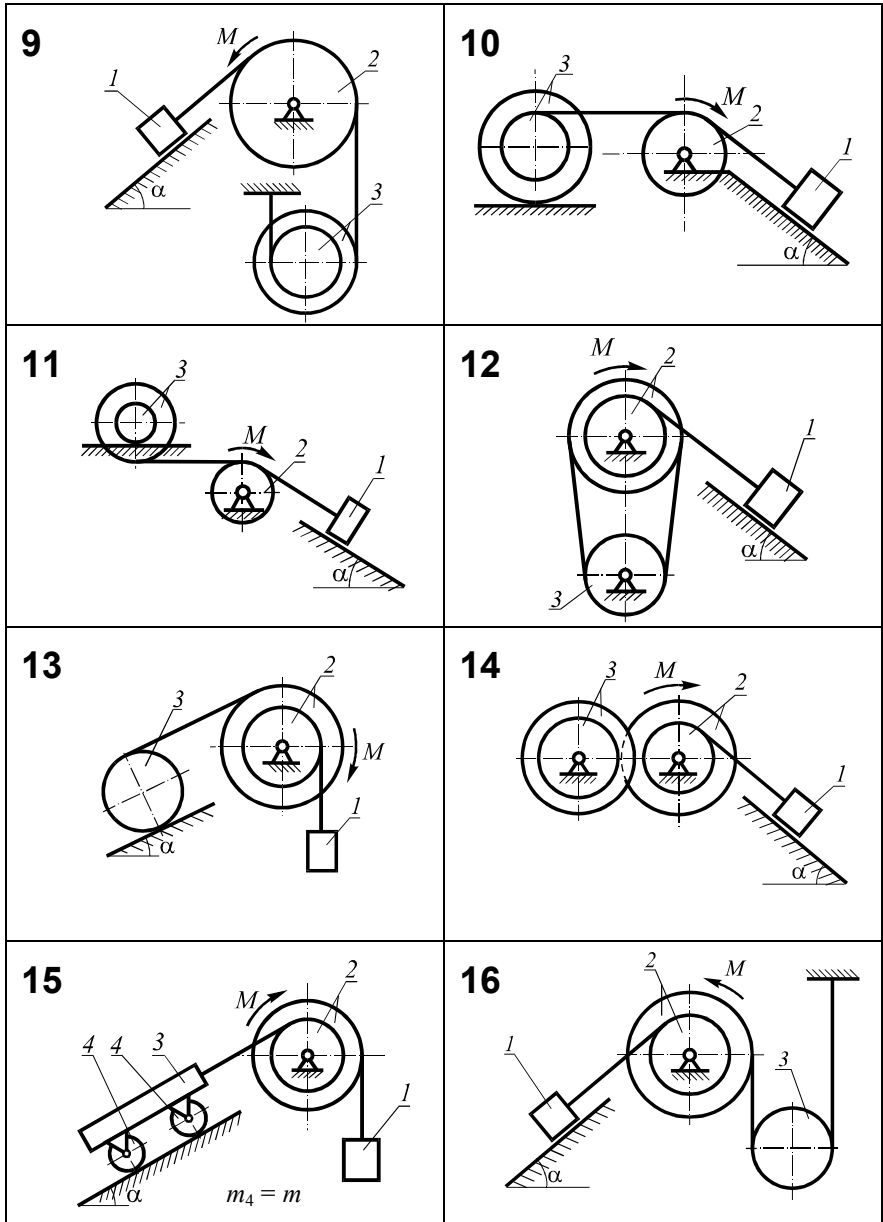


Рисунок 8.2 (продолжение)

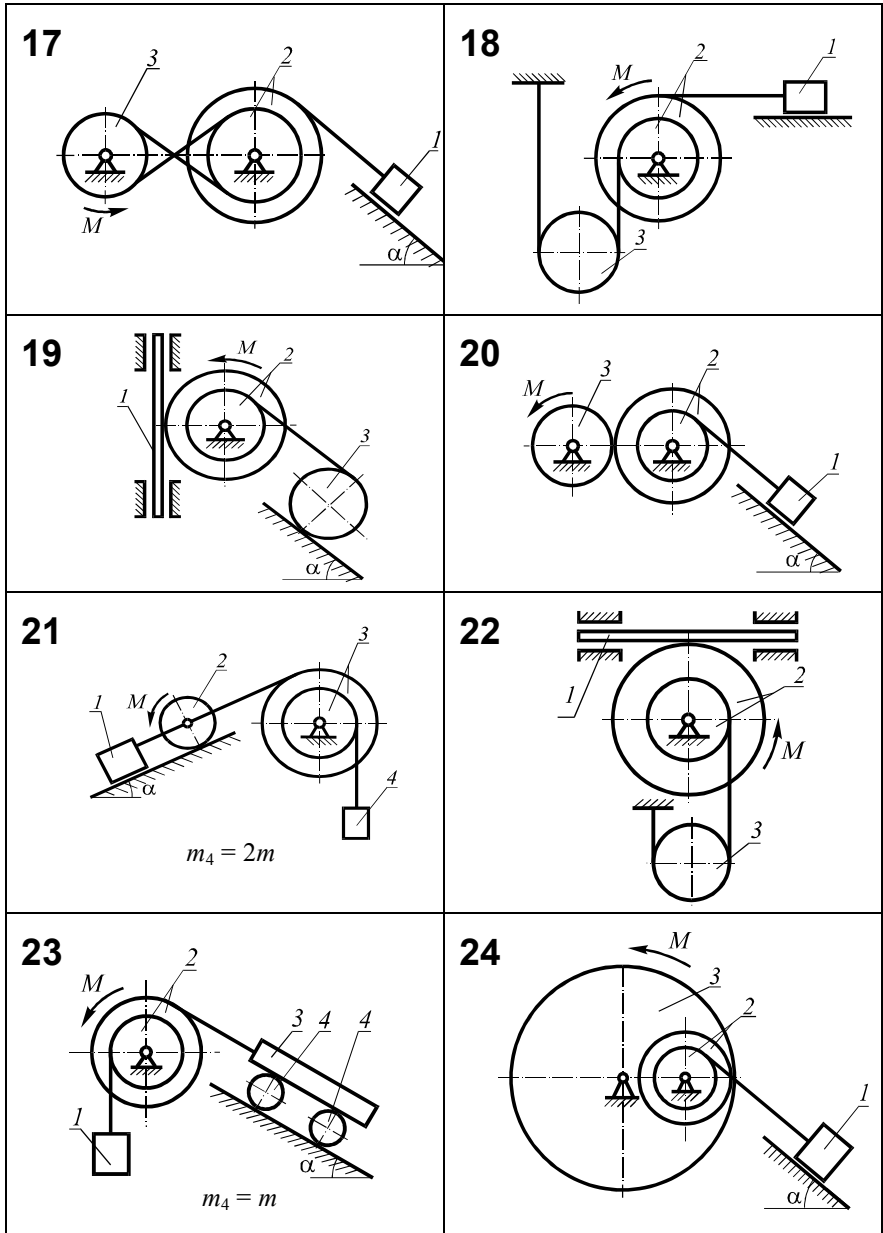


Рисунок 8.2 (продолжение)

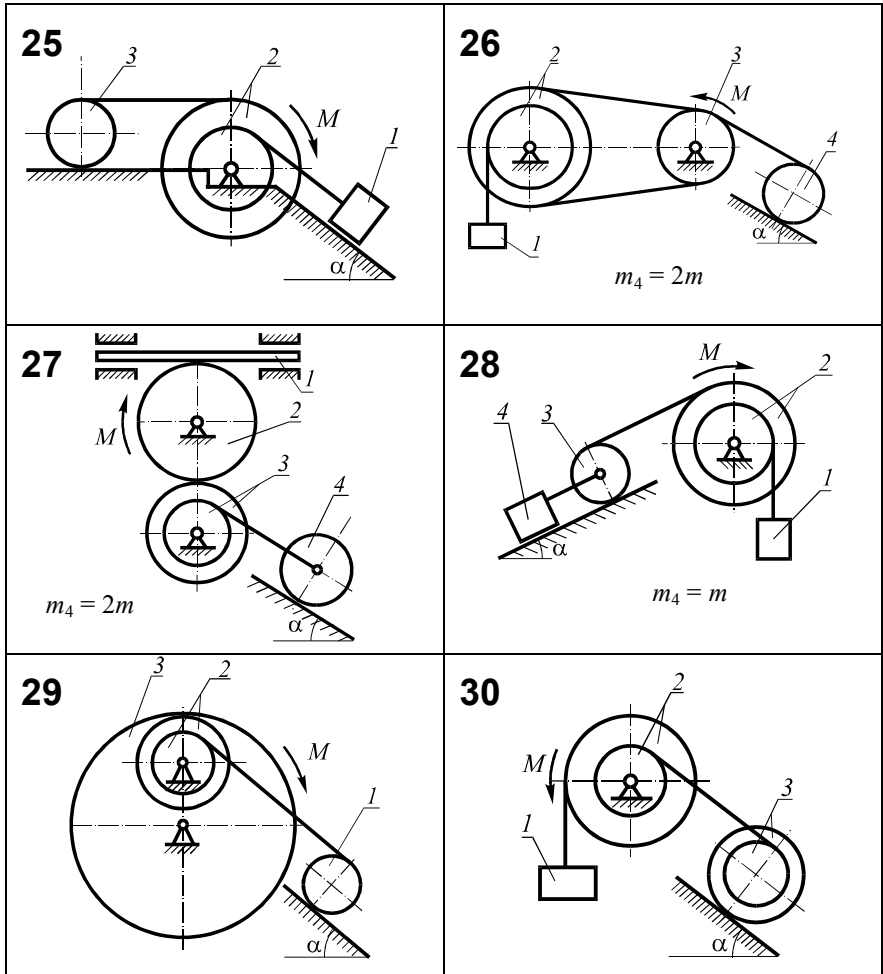


Рисунок 8.2 (окончание)

Пример выполнения задания

Груз 1 (рисунок 8.3) скользит по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$, и посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок 2, приводит в движение каток 3, заставляя его катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Массы тел 1–3 соответственно $m_1 = 3m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$. Радиусы колес $R_2 = 30$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 25$ см. На тело 2 действует активная пара сил с моментом $M = m_3 g R_2$. Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f = 0,2$. Каток 3 представляет собой

однородный сплошной диск. Проскальзывание нити по блоку отсутствует. Определить ускорение тела 1, а также натяжение нити, прикрепленной к телу 1.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики.

1 *Изображаем механизм с учетом заданных размеров.*

2 *Изображаем на рисунке активные силы \vec{G}_1 , \vec{G}_2 и \vec{G}_3 . На систему наложены внешние связи: цилиндрический шарнир, трением в котором пренебрегаем; горизонтальная плоскость, по которой без проскальзывания катится каток 3. Эти связи идеальные, поэтому их реакции на схеме не показываем. Связь шероховатая наклонная плоскость, по которой скользит груз 1, неидеальная. Сила трения, возникающая между грузом и наклонной плоскостью, будет совершать работу при скольжении груза.*

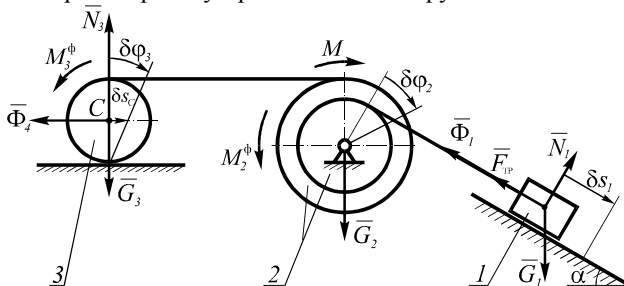


Рисунок 8.3

Замечание. Ввиду того, что во всех предлагаемых для решения задачах грузы скользят по негладкой поверхности, то во всех вариантах целесообразно по исходным данным найти исходное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения. Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получится со знаком «минус». В этом случае необходимо изменить направления сил трения и инерции и внести поправки в решение.

В данном примере груз 1 опускается, поэтому силу трения скольжения $F_{тр}$ направляем в сторону, противоположную скорости этого движения.

Модуль силы $\vec{F}_{тр}$ определяем по закону Кулона $F_{тр} = f N_1$. Нормальная реакция наклонной плоскости $N_1 = G_1 \cos \alpha$. Тогда $F_{тр} = f G_1 \cos \alpha$.

Прикладываем к системе силы инерции. Так как груз 1 движется поступательно, то к его центру масс приложим силу инерции $\Phi_1 = m_1 a_1$ противоположно ускорению a_1 центра масс груза 1. Блок 3 совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через его центр масс. Поэтому к нему прикладываем момент сил инерции

$$M_2^\Phi = J_z \varepsilon_2,$$

где J_z – момент инерции блока относительно оси вращения z ;
 ε_2 – угловое ускорение блока.

Для тела 3 задан радиус инерции i_z , поэтому его момент инерции равен

$$J_z = m_2 i_z^2.$$

Момент сил инерции M_2^Φ прикладываем противоположно угловому ускорению блока ε_2 .

Каток 3 совершает плоское движение, перемещаясь по горизонтали с ускорением центра масс a_C и с угловым ускорением ε_3 . Прикладываем к центру масс силу инерции $\Phi_3 = m_3 a_C$, где a_C – ускорение центра масс катка 3. Также противоположно угловому ускорению ε_3 направляем момент сил инерции $M_3^\Phi = I_3 \varepsilon_3$. Так как каток считается однородным сплошным цилиндром радиуса r_3 , то момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс катка, $I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$.

3 *Сообщаем системе возможное перемещение.* Пусть груз 1 переместится на расстояние δs_1 вдоль наклонной плоскости. Тогда блок 2 повернется на угол $\delta \varphi_2$, а каток 3 повернется на угол $\delta \varphi_3$, а его центр масс переместится вдоль горизонтальной плоскости на расстояние δs_C .

4 *Составляем общее уравнение динамики.* Запишем выражение для суммы работ всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении каждого тела системы и приравняем его к нулю:

$$G_1 \sin \alpha \delta s_1 - F_{\text{тр}} \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 + M \delta \varphi_2 - M_2^\Phi \delta \varphi_2 - \Phi_3 \delta s_C - M_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0. \quad (8.1)$$

5 *Устанавливаем связь между возможными перемещениями.* Зависимости между возможными перемещениями тел и точек системы такие же, как и между соответствующими скоростями. Выразим скорости центров масс и угловые скорости тел через скорость тела 1. Для этого воспользуемся методом общей точки. Рассмотрим точку A , общую для тел 1 и 2 (см. рисунок 8.3). В силу нерастяжимости нитей $v_A = v_1$. С другой стороны, точка A принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Следовательно,

$$v_A = \omega_2 r_2, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{r_2}.$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}.$$

Чтобы выразить ω_3 и v_C через v_1 , рассмотрим точки B_2 и B_3 . Точка B_2 принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Значит $v_{B_2} = \omega_2 r_2 = v_1 \frac{R_2}{r_2}$.

Точка B_3 принадлежит плоско движущемуся телу 3. Мгновенный центр скоростей катящегося колеса находится в точке касания с неподвижной поверхностью P . Тогда $v_{B_3} = \omega_3 B_3 P = \omega_3 \cdot 2r_3$, $\omega_3 = \frac{v_{B_3}}{2r_3}$. Следовательно,

$$\omega_3 = v_1 \frac{R_2}{2r_2 r_3}.$$

Скорость точки C определяется следующим образом: $v_C = \omega_3 CP = \omega_3 r_3$. Значит,

$$v_C = v_1 \frac{R_2}{2r_2}.$$

Аналогичные соотношения будут и между линейными и угловыми возможными перемещениями системы. Выразим возможные перемещения $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ и δs_3 через δs_1 :

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r_2}; \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1 R_2}{2r_2 r_3}; \quad \delta s_C = \frac{\delta s_1 R_2}{2r_3}. \quad (8.2)$$

Подставим приведенные выражения в уравнение (8.1):

$$G_1 \sin \alpha \delta s_1 - F_{\text{тр}} \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 + M \frac{\delta s_1}{r_2} - M_2^\Phi \frac{\delta s_1}{r_2} - \Phi_3 \frac{\delta s_1 R_2}{2r_2} - M_3^\Phi \frac{\delta s_1 R_2}{2r_2 r_3} = 0.$$

Используем известные соотношения для силы тяжести G_1 , силы трения $F_{\text{тр}}$, сил инерции Φ_1 и Φ_3 , моментов сил инерции M_2^Φ , M_3^Φ . Тогда

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2} - \frac{I_z \varepsilon_2}{r_2} - m_3 a_C \frac{R_2}{2r_2} - \frac{I_3 \varepsilon_3 R_2}{2r_2 r_3} = 0. \quad (8.3)$$

Выразим ускорения a_C , ε_2 и ε_4 через ускорение центра масс тела 1 a_1 . Для этого используем равенства (8.2):

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_1 R_2}{2r_2 r_3}; \quad a_C = \frac{a_1 R_2}{2r_2}.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (8.3):

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2} - m_2 i_z^2 \frac{a_1}{r_2^2} - m_3 \frac{a_1 R_2^2}{4r_2^2} - \frac{m_3 r_3^2}{2} \cdot \frac{a_1 R_2^2}{4r_2^2 r_3^2} = 0.$$

6 Решаем полученное уравнение. Из последнего уравнения выразим иско-

мое ускорение a_1 . Для этого перенесем все слагаемые, содержащие a_1 , в правую часть равенства:

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha + \frac{M}{r_2} = a_1 \left[m_1 + \frac{m_2 i_z^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{8r_2^2} \right].$$

Отсюда с учетом заданного в условии выражения $M = m_3 g r_2$ получаем:

$$a_1 = \frac{m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{m_3 g r_2}{r_2}}{m_1 + \frac{m_2 R_2^2 r_2}{4r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{8r_2^2}} = \frac{3mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + mg}{3m + \frac{mR_2}{2r_2} + \frac{3mR_2^2}{8r_2^2}}.$$

Подставим численные значения величин, входящих в последнее уравнение:

$$a_1 = \frac{3 \cdot 9,8 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,86) + 9,8}{3 + \frac{0,3}{2 \cdot 0,1} + \frac{3 \cdot 0,3^2}{8 \cdot 0,1^2}} = \frac{19,44}{7,88} = 2,47 \text{ м/с}^2.$$

Для определения силы натяжения нити, прикрепленной к телу 1, используем принцип Даламбера – Лагранжа. Для этого отдельно изображаем тело 1 (рисунок 8.4). Заменяем действие нити на груз реакцией T_1 . Расставим все силы, действующие на тело 1: сила тяжести \vec{G}_1 , нормальная реакция поверхности \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила натяжения нити \vec{T}_1 и сила инерции $\vec{\Phi}_1$.

В соответствии с принципом Даламбера – Лагранжа:

$$\delta A(\vec{G}_1) + \delta A(\vec{F}_{\text{тр}}) + \delta A(\vec{T}_1) + \delta A(\vec{\Phi}_1) = 0. \quad (8.4)$$

Возможное перемещение точки приложения сил \vec{G}_1 , $\vec{F}_{\text{тр}}$, \vec{T}_1 , $\vec{\Phi}_1$ составляет δs_1 и направлено параллельно наклонной плоскости. Тогда выражение (8.4) примет вид

$$(G_1 \sin \alpha - F_{\text{тр}} - \Phi_1 - T_1) \delta s_1 = 0.$$

Сокращая на возможное перемещение и используя ранее полученные соотношения для силы трения и силы инерции, окончательно получим:

$$\begin{aligned} T_1 &= G_1 \sin \alpha - f G_1 \cos \alpha - \Phi_1 = 3mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 3ma_1 = \\ &= 3m(9,8 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,86) - 2,47) = 2,23m. \end{aligned}$$

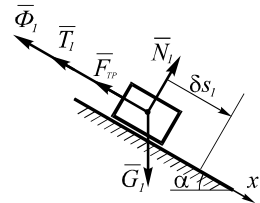


Рисунок 8.4

Д-9 СООТНОШЕНИЕ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Некоторые положения теории

Обобщенными координатами материальной системы называют набор независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение всех точек системы. Как правило, в задачах механики в качестве обобщенных координат выбирают величины, определяющие линейные или угловые перемещения. В большинстве механических систем количество обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы. Обобщенные координаты обозначают символом q_i , i – порядковый номер обобщенной координаты, который изменяется от 1 до k , k – число степеней свободы системы. Производные от обобщенных координат по времени называют *обобщенными скоростями* $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

Любое возможное перемещение материальной системы определяется комбинацией бесконечно малых возможных приращений обобщенных координат δq_i . Следовательно, сумму работ сил на возможном перемещении системы можно выразить через приращения обобщенных координат:

$$\delta A = \sum \bar{F}_j \cdot \delta \bar{s}_j = \sum Q_i \delta q_i, \quad (9.1)$$

где \bar{F}_j – сила, действующая на j -ю точку системы;

$\delta \bar{s}_j$ – возможное перемещение j -й точки.

В формуле (9.1) введены коэффициенты Q_i , которые называют *обобщенными силами*. Таким образом, *обобщенные силы* – это величины, равные коэффициентам при элементарных приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы сил, действующих на систему, на ее возможном перемещении. Размерность обобщенной силы определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты. Если обобщенная координата имеет размерность длины, то соответствующая обобщенная сила измеряется в ньютонах. Если в качестве обобщенной координаты выбран угол, то обобщенная сила имеет размерность момента (Н·м).

Для определения обобщенных сил используется один из трех методов:

1 С использованием соотношения (9.1). При этом системе задают такое возможное перемещение, при котором отличным от нуля будет только одно элементарное приращение δq_i ($\delta q_j = 0$ при $j \neq i$). Затем следует определить

элементарную работу δA_i всех сил, действующих на систему, при этом перемещении. В соответствии с равенством (9.1) обобщенная сила определяется как отношение элементарной работы δA_i к приращению обобщенной координаты:

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}. \quad (9.2)$$

Индекс при элементарной работе соответствует номеру обобщенной координаты, приращение которой отлично от нуля.

2 Через потенциальную энергию системы. Если на точки материальной системы действуют потенциальные силы (силы, работа которых не зависит от траектории движения точки приложения, а определяется только начальным и конечным положениями этой точки), то обобщенная сила Q_i , соответствующая обобщенной координате q_i , равна взятой со знаком минус частной производной от потенциальной энергии системы по этой координате:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (9.3)$$

3 Через проекции сил, действующих на точки системы. При этом

$$Q_i = \sum \bar{F}_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \sum \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right),$$

где $\bar{F}_j, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}$ – сила, действующая на j -ю точку системы, и проекции этой силы на оси декартовой системы координат;

$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i}$ – частная производная от радиус-вектора j -й точки по

обобщенной координате q_i ;

x_j, y_j, z_j – координаты j -й точки.

Из-за трудоемкости последний метод определения обобщенных сил используется при решении задач крайне редко.

Преобразуя общее уравнение динамики системы к форме, содержащей обобщенные координаты и силы, для любой материальной системы можно получить уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (9.4)$$

где $T = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}$ – кинетическая энергия системы;

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial T}{\partial q_i}$ – частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости \dot{q}_i и обобщенной координате q_i соответственно.

Уравнение (9.4) выполняется для любого номера обобщенной координаты i . Значит, для системы, которая имеет k степеней свободы, можно записать k дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2; \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \end{cases} \quad (9.5)$$

Уравнения (9.5) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Их количество равно числу обобщенных координат системы. Решение этих уравнений позволяет определить зависимость от времени обобщенных координат, характеризующих положение материальной системы.

Если на систему действуют только потенциальные силы, то уравнения Лагранжа второго рода можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Условие задания Д-9

Система состоит из трех тел массами m_1, m_2, m_3 и пружины с коэффициентом жесткости c . Помимо сил тяжести к телам системы приложены постоянные сила F и пара сил с моментом M . Радиусы блоков: R_1, r_1, R_2, r_2 . Радиусы инерции тел i_1, i_2 . При этом для всех блоков выполняются следующие условия: $r = 0,5R$; $i = R/\sqrt{2}$. Угол наклона плоскости α . В начальный момент система находилась в покое, а пружина недеформирована. Используя уравнения Лагранжа второго рода, определить максимальную по модулю деформацию пружины и период колебаний тел. Исходные данные приведены в таблице 9.1, система изображена на рисунке 9.1. Трением скольжения и сопротивлением качения пренебречь.

Рекомендация: в качестве первой обобщенной координаты выбрать угол поворота одного из вращательно движущихся тел, а в качестве второй – деформацию пружины.

Таблица 9.1 – Исходные данные к заданию Д-9

Вариант	Масса тела, кг			Радиус, см		Угол, град		c , Н/см	F , кН	M , кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	α	β			
1	30	15	10	60	30	45	60	80	0,05	0,1
2	50	20	20	70	45	60	—	110	0,2	0,09
3	60	55	25	50	40	30	—	90	0,45	0,06
4	50	40	40	65	60	30	—	75	0,1	0,05
5	80	45	50	80	30	45	—	100	0,18	0,1
6	40	30	10	60	50	60	45	50	0,25	0,02
7	60	60	15	55	50	30	—	80	0,5	0,01
8	40	35	20	50	35	60	—	60	0,1	0,15
9	60	80	30	60	70	30	—	120	0,15	0,05
10	70	30	40	80	50	30	60	150	0,2	0,085
11	80	85	45	65	90	45	—	170	0,4	0,08
12	50	50	15	40	50	30	—	200	0,05	0,3
13	90	70	20	80	55	60	—	120	0,95	0,01
14	50	60	55	45	70	30	—	160	0,3	0,1
15	60	80	70	65	80	60	30	90	0,2	0,05
16	80	85	35	60	95	60	—	200	0,9	0,2
17	60	40	40	70	40	60	45	110	0,1	0,3
18	70	30	15	60	35	60	—	270	2	0,05
19	60	55	20	60	60	30	45	150	0,5	0,08
20	70	60	30	65	40	45	—	200	0,4	0,25
21	60	50	35	55	30	30	60	160	0,1	0,15
22	50	65	25	50	55	30	—	80	0,2	0,2
23	45	70	30	40	80	45	—	100	0,18	0,3
24	75	40	40	70	30	45	—	220	0,5	0,15
25	60	60	15	60	50	45	60	150	0,1	0,1
26	50	50	30	45	40	60	—	200	0,15	0,2
27	30	20	10	60	55	45	—	170	0,1	0,3
28	70	50	45	70	45	30	—	120	0,2	0,05
29	60	40	30	80	50	60	—	210	0,08	0,35
30	40	30	15	40	70	—	—	160	0,25	0,15

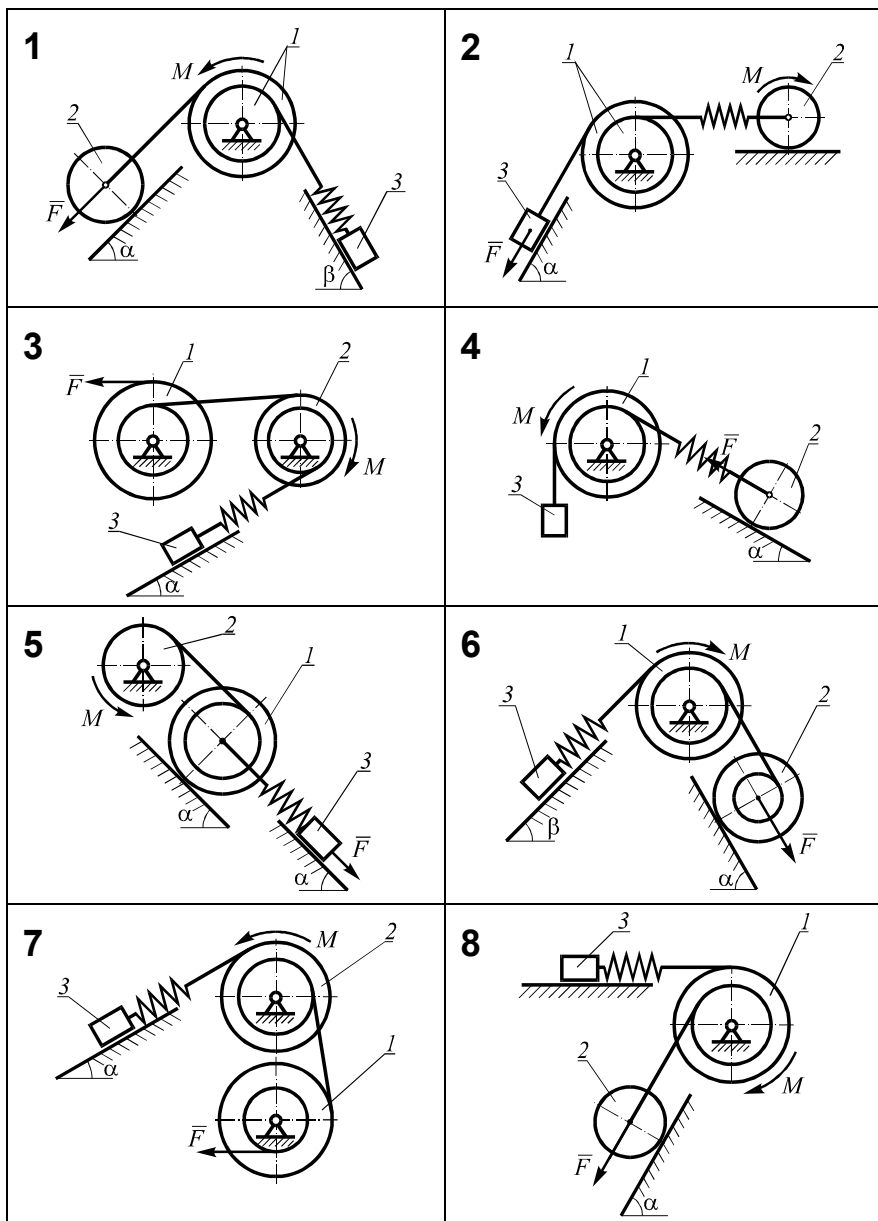


Рисунок 9.1 (начало)

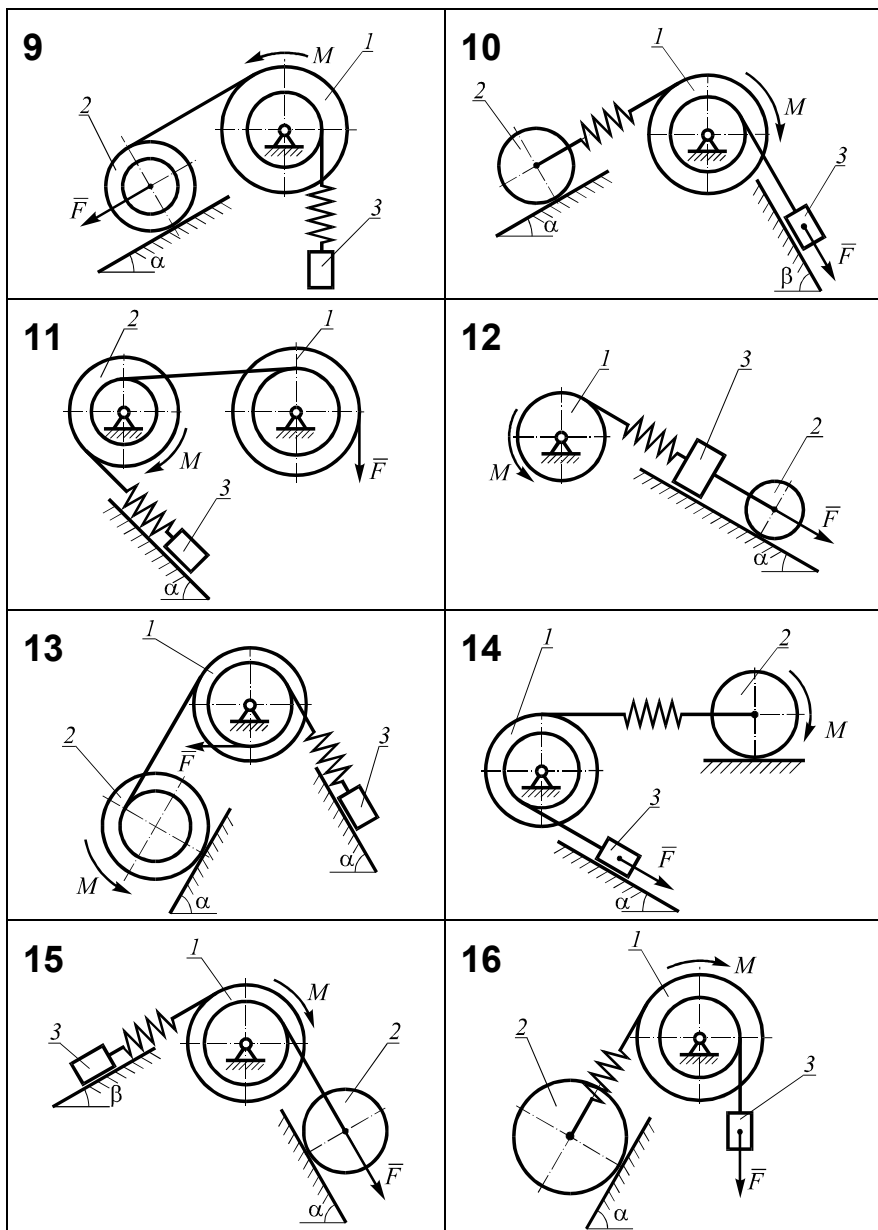


Рисунок 9.1 (продолжение)

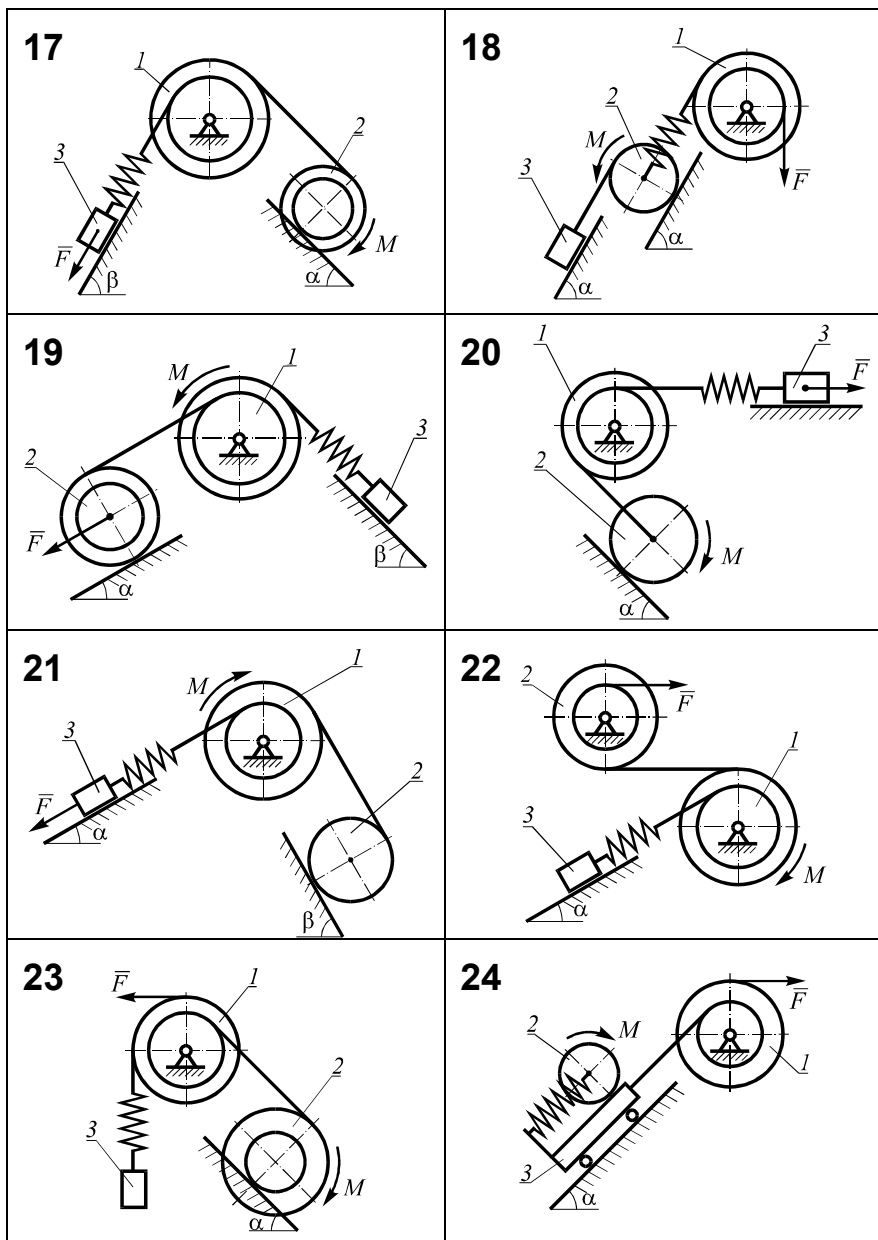


Рисунок 9.1 (продолжение)

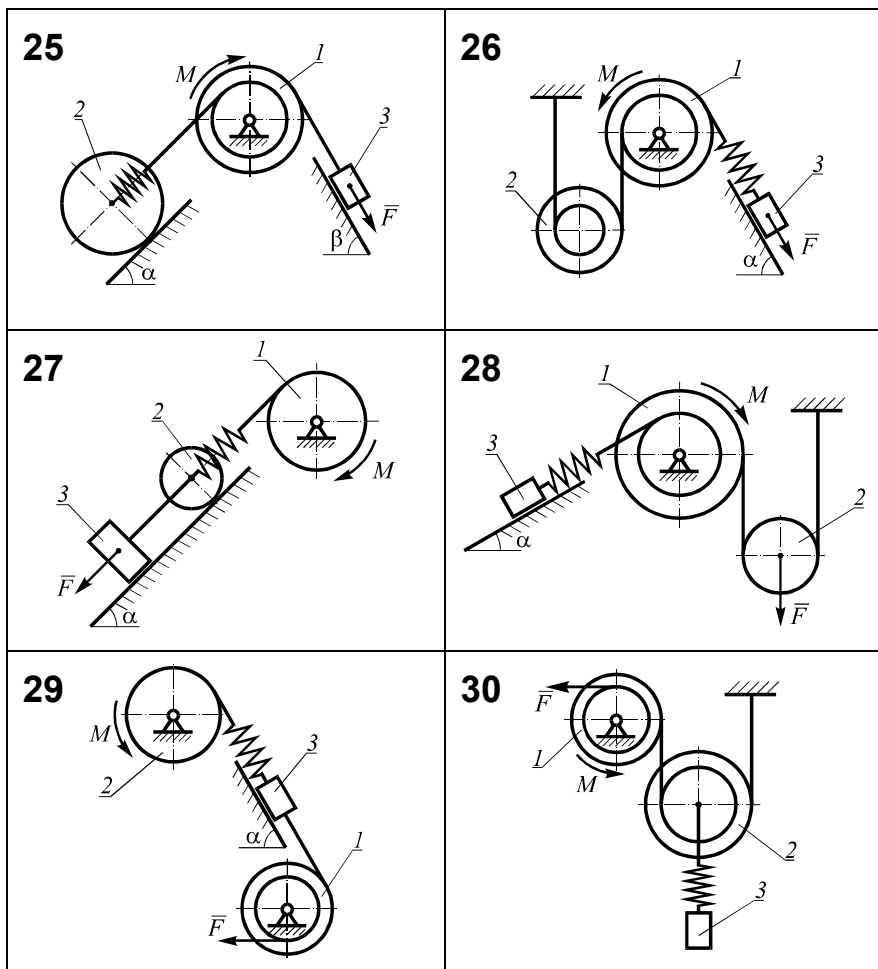


Рисунок 9.1 (окончание)

Пример выполнения задания

Система состоит из трех тел массами $m_1 = m_2 = 10$ кг, $m_3 = 40$ кг и пружины с коэффициентом жесткости $c = 80$ Н/см (рисунок 9.2). К системе приложена активная сила $F = 0,15$ кН и пара сил с моментом $M = 0,1$ кН·м. Радиусы блоков: $R_1 = 60$ см, $r_1 = 0,5R_1 = 30$ см, $R_2 = 40$ см. Радиус инерции первого тела $i_1 = 40$ см. Тело 2 – однородный цилиндр. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. В начальный момент система находилась в покое, а пружина

недеформирована. Используя уравнения Лагранжа второго рода, определить максимальную деформацию пружины.

Решение

1 *Изображаем исследуемую систему* (см. рисунок 9.2). Система имеет две степени свободы. Значит, ее следует характеризовать двумя обобщенными координатами. В качестве одной обобщенной координаты выберем

угол поворота вращательно движущегося тела 1 – $q_1 = \varphi$. В качестве второй обобщенной координаты выберем деформацию пружины – $q_2 = x$ (см. рисунок 9.2).

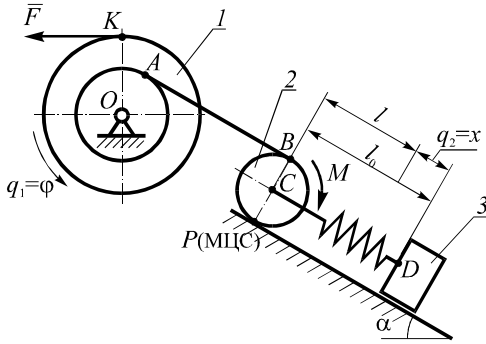


Рисунок 9.2

2 *Определяем кинетическую энергию системы.* Так как система состоит из трех тел, то

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия тела 1, движущегося вращательно, равна

$$T_1 = \frac{J_O \omega_1^2}{2}.$$

Здесь J_O – момент инерции тела 1 относительно оси вращения O ; ω_1 – его угловая скорость. Так как для тела 1 известен радиус инерции, то $J_O = m_1 i_1^2$. Угловая скорость ω_1 определяется как производная по времени от угла поворота φ , следовательно, совпадает с обобщенной скоростью $\dot{\varphi}$. Подставим полученные выражения в формулу для кинетической энергии тела 1:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 i_1^2 \dot{\varphi}^2.$$

Тело 2 движется плоскопараллельно. Значит, его кинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{J_C \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2}.$$

Здесь J_C – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс C ; ω_2 – его угловая скорость; v_C – скорость центра масс тела 2.

Так как тело 2 – однородный цилиндр, то $J_C = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$. Угловые скорости первого ω_1 и второго ω_2 тел взаимосвязаны. Движение от тела 1 к телу 2 передается посредством нити. Выберем на теле 1 точку A , а на теле 2 – точку B (см. рисунок 9.2). В силу нерастяжимости нитей скорости этих точек

равны $v_A = v_B$. Так как точка A принадлежит вращательно движущемуся телу 1, то $v_A = \omega_1 r_1 = \dot{\phi} r_1$. Тело 2 катится без проскальзывания по неподвижной поверхности. Его мгновенный центр скоростей P находится в точке касания с поверхностью (см. рисунок 9.2). Тогда для скорости точки B можно записать $v_B = \omega_2 BP = \omega_2 2R_2$. Так как скорости точек A и B равны, то $\dot{\phi} r_1 = \omega_2 2R_2$. Выразим угловую скорость второго тела:

$$\omega_2 = \dot{\phi} \frac{r_1}{2R_2}. \quad (9.6)$$

Точка C принадлежит плоскопараллельно движущемуся телу 2, значит,

$$v_C = \omega_2 CP = \omega_2 R_2 = \dot{\phi} \frac{r_1}{2}. \quad (9.7)$$

Подставим полученные выражения для J_O , ω_2 и v_C в формулу для кинетической энергии второго тела:

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{\phi}^2 \frac{r_1^2}{4} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\phi}^2 \frac{r_1^2}{4} = \frac{3}{16} m_2 \dot{\phi}^2 r_1^2.$$

Кинетическая энергия тела 3, которое движется поступательно, равна

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_D^2.$$

Выразим скорость точки D этого тела через обобщенные координаты. Если точка C переместится вверх по наклонной плоскости на s_C , то перемещение точки D будет равно сумме: $s_D = s_C + x$, где x – деформация пружины. Тогда для скорости точки D получим $v_D = v_C + \dot{x} = \dot{\phi} \frac{r_1}{2} + \dot{x}$. Подставим v_D в формулу для кинетической энергии третьего тела:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{\phi}^2 \frac{r_1^2}{4} + \dot{\phi} r_1 \dot{x} + \dot{x}^2 \right).$$

Сложим кинетические энергии тел и определим T :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\phi}^2 r_1^2 + \frac{3}{16} m_2 r_1^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{8} m_3 r_1^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_3 r_1 \dot{\phi} \dot{x} + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2. \quad (9.8)$$

3 Определим обобщенные силы.

3.1 Определим обобщенную силу Q_ϕ , соответствующую обобщенной координате ϕ :

а) придадим координате ϕ элементарное приращение $\delta\phi$ (рисунок 9.2). Координату x оставим неизменной ($\delta x = 0$). В этом случае звено 1 повернется на угол $\delta\phi$. Точка приложения силы \bar{F} переместится на $\delta s_N = R_1 \delta\phi$. Звено 2 повернется на угол $\delta\phi_2$, а точка C переместится вверх по наклонной

плоскости на δs_C . Все точки тела 3 переместятся по наклонной плоскости на δs_D . Так как при рассматриваемом перемещении системы $\delta x = 0$, то $\delta s_D = \delta s_C$;

б) определим сумму элементарных работ сил, действующих на систему, на выбранном перемещении. На систему действуют:

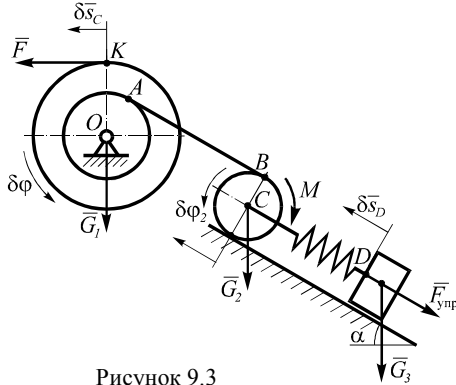


Рисунок 9.3

силы тяжести $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$; активная сила \bar{F} ; пара сил с моментом M . Силы \bar{G}_1 не совершает работу, так как приложены к неподвижной точке O : $\delta A(\bar{G}_1) = 0$.

При $\delta x = 0$ расстояние между точками C и D остается неизменным. В этом случае работа внутренней силы упругости в пружине равна нулю. Значит, элементарная работа всех сил на рассматриваемом перемещении равна:

$$\delta A_\varphi = \delta A(\bar{F}) + \delta A(M) + \delta A(\bar{G}_2) + \delta A(\bar{G}_3).$$

Так как сила \bar{F} направлена так же, как и перемещение $\delta \bar{s}_K$, то

$$\delta A(\bar{F}) = F \delta s_K = FR_1 \delta \varphi.$$

Момент M противоположен направлению поворота второго тела, поэтому $\delta A(M) = -M \delta \varphi_2$. Угол поворота $\delta \varphi_2$ связан с $\delta \varphi$ так же, как угловая скорость второго звена ω_2 связана с обобщенной скоростью $\dot{\varphi}$. В соответствии с равенством (9.6) $\delta \varphi_2 = \delta \varphi \frac{r_1}{2R_2}$. Тогда

$$\delta A(M) = -M \frac{r_1}{2R_2} \delta \varphi.$$

Сила тяжести \bar{G}_2 приложена к точке C , которая при рассматриваемом перемещении системы движется вверх по наклонной плоскости. Значит, работа этой силы $\delta A(\bar{G}_2) = -m_2 g \Delta h_C = -m_2 g \delta s_C \sin \alpha$. Здесь Δh_C – изменение высоты точкой C при движении системы. Используя соотношение (9.7) для скорости точки C , связь между перемещением точки C и углом поворота тела 1 имеет вид $\delta s_C = \delta \varphi \frac{r_1}{2}$. При этом

$$\delta A(\bar{G}_2) = -m_2 g \frac{r_1}{2} \delta \varphi \sin \alpha.$$

Перемещение центра масс тела 3 равно перемещению точки C ($\delta x = 0$):

$$\delta A(\bar{G}_3) = -m_3 g \delta s_D \sin \alpha = -m_3 g \delta s_C \sin \alpha = -m_3 g \frac{r_1}{2} \delta \varphi \sin \alpha;$$

в) сложим полученные выражения для элементарных работ сил и определим обобщенную силу Q_φ :

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta \varphi} = FR_1 - M \frac{r_1}{2R_2} - m_2 g \frac{r_1}{2} \sin \alpha - m_3 g \frac{r_1}{2} \sin \alpha. \quad (9.9)$$

3.2 Определим обобщенную силу Q_x , соответствующую обобщенной координате x :

а) придадим координате x элементарное приращение δx (см. рисунок 9.4). При этом обобщенную координату φ оставим неизменной ($\delta \varphi = 0$). В этом случае звено 1 остается неподвижным. Следовательно, неподвижна и точка B . Значит, звено 2 также неподвижно. Все точки тела 3 перемещаются вверх по наклонной плоскости на δx ;

б) определим элементарную работу сил, действующих в системе, на этом перемещении. Сила \bar{G}_1 не совершает работы. Так как при $\delta \varphi = 0$ звенья 1 и 2 неподвижны, то работы сил \bar{F} , \bar{G}_2 и пары сил с моментом M также равны нулю $\delta A(\bar{F}) = \delta A(\bar{G}_2) = \delta A(M) = 0$. При рассматриваемом движении расстояние между точками C и D изменяется на δx .

Значит, в данном случае работа внутренней силы упругости пружины не равна нулю. Тогда элементарная работа всех сил будет равна сумме двух слагаемых:

$$\delta A_x = \delta A(\bar{G}_3) + \delta A(\bar{F}_{\text{упр}}).$$

Так как центр масс тела 3 перемещается вверх по наклонной плоскости на δx , то

$$\delta A(\bar{G}_3) = -m_3 g \delta x \sin \alpha.$$

На элементарных перемещениях все силы (в том числе и сила упругости) постоянны. Значит,

$$\delta A(\bar{F}_{\text{упр}}) = -F_{\text{упр}} \delta x = -cx \delta x.$$

Здесь учтено, что сила упругости по модулю равна произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины x и направлена противоположно δx ;

с) сложим полученные выражения для элементарных работ сил и определим обобщенную силу Q_x :

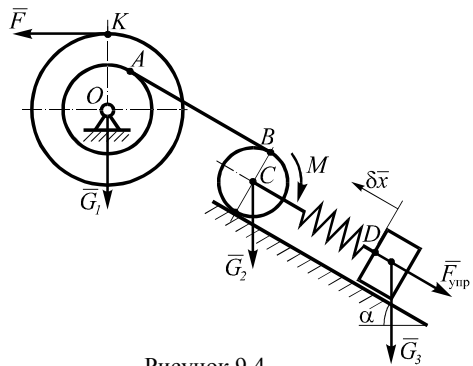


Рисунок 9.4

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = -m_3 g \sin \alpha - cx. \quad (9.10)$$

4 Подставим полученные выражения в уравнения Лагранжа второго рода. В данной задаче в качестве первой обобщенной координаты выбран угол φ ($q_1 = \varphi$), а в качестве второй – деформация x ($q_2 = x$). Значит, уравнения Лагранжа (9.5) запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (9.11)$$

Так как выражение кинетической энергии системы (9.8) не содержит обобщенных координат φ , x , а включает только обобщенные скорости $\dot{\varphi}$, \dot{x} , то

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Определим частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям. В соответствии с (9.8) получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(m_1 i_1^2 + \frac{3}{8} m_2 r_1^2 + \frac{1}{4} m_3 r_1^2 \right) \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_3 r_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m_3 r_1 \dot{\varphi} + m_3 \dot{x}.$$

Подставим полученные выражения для частных производных и формулы (9.9), (9.10) для обобщенных сил в систему (9.11):

$$\begin{aligned} & \left(m_1 i_1^2 + \frac{3}{8} m_2 r_1^2 + \frac{1}{4} m_3 r_1^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_3 r_1 \ddot{x} = \\ & = FR_1 - M \frac{r_1}{2R_2} - (m_2 + m_3) g \frac{r_1}{2} \sin \alpha; \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\frac{1}{2} m_3 r_1 \ddot{\varphi} + m_3 \ddot{x} = -m_3 g \sin \alpha - cx.$$

5 Решим полученную систему дифференциальных уравнений. Подставим численные значения величин, входящих в систему (9.12):

$$\begin{aligned} (1,6 + 0,34 + 0,9) \ddot{\varphi} + 6 \ddot{x} &= 90 - 37,5 - 36,75; \\ 6 \ddot{\varphi} + 40 \ddot{x} &= -196 - 8000x. \end{aligned}$$

После вычислений получим:

$$\begin{cases} 2,84 \ddot{\varphi} + 6 \ddot{x} = 15,75; \\ 6 \ddot{\varphi} + 40 \ddot{x} = -196 - 8000x. \end{cases} \quad (9.13)$$

Для того чтобы определить период колебаний, надо вывести уравнение деформации пружины x или угла φ . Из первого уравнения системы выразим обобщенное ускорение $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = 5,546 - 2,11\ddot{x}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы (9.13):

$$6(5,546 - 2,11\ddot{x}) + 40\ddot{x} = -196 - 8000x;$$

$$33,276 - 12,66\ddot{x} + 40\ddot{x} = -196 - 8000x.$$

Приведем подобные слагаемые:

$$27,34\ddot{x} + 8000x = -229,276.$$

Разделим обе части равенства на 27,34:

$$\ddot{x} + 292,612x = -8,386.$$

Последнее уравнение по форме совпадает с динамическим уравнением колебательного движения материальной точки в каноническом виде при отсутствии вязкого сопротивления:

$$\ddot{x} + k^2x = f. \quad (9.14)$$

В этом уравнении k – частота колебаний.

Значит, частота колебания тел системы $k = \sqrt{292,612} = 16,106 \text{ с}^{-1}$. Период колебаний τ связан с частотой k формулой:

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 0,367 \text{ с}.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (9.14) имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + x_1. \quad (9.15)$$

Здесь x_1 – частное решение уравнения (9.14).

$$x_1 = \frac{f}{k^2} = -\frac{8,386}{292,612} = -0,029 \text{ м}.$$

Константы C_1 и C_2 в выражении (9.15) определим из начальных условий движения. По условию задачи в начальный момент времени ($t = 0$) деформация пружины равна нулю. Значит:

$$x(0) = C_2 + x_1 = C_2 - 0,029 = 0 \Rightarrow C_2 = 0,029 \text{ м}.$$

Определим скорость изменения деформации пружины \dot{x}

$$\dot{x} = kC_1 \cos kt - kC_2 \sin kt.$$

Так как в начальный момент времени система находилась в равновесии, то $\dot{x}(0) = 0$. Следовательно,

$$kC_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тогда решение уравнения (9.14) запишется следующим образом:

$$x = 0,029 (\cos (17,106t) - 1).$$

Величина x примет максимальное по модулю значение при $\cos (17,106t) = -1$. Следовательно,

$$|x|_{\max} = 2 \cdot 0,029 = 0,058 \text{ м}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Издательство «Лань», 1998. – 736 с.
- 2 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 1995. – 416 с.
- 3 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – 664 с.
- 4 **Поляхов, Н. Н.** Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. – М. : Высшая школа, 2000. – 592 с.
- 5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для техн. вузов / А. А. Яблонский [и др.] ; под ред. А. А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985. – 367 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

Учебная программа раздела «Динамика» курса теоретической механики

1 Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила; постоянные и переменные силы. Законы классической механики или законы Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

2 Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых прямоугольных координатах и в проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики для материальной точки, их решение.

3 Общие теоремы динамики точки и их значение. Количество движения точки. Элементарный импульс и импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и конечной формах. Момент количества движения точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. Сохранение момента количества движения точки в случае центральной силы.

4 Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной и конечной формах. Элементарная работа силы; ее аналитическое выражение. Работа силы на конечном пути. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Мощность.

5 Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей. Закон сохранения механической энергии.

6 Малые колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия: частота и период колебаний, амплитуды и фазы колебаний точек системы; свободные затухающие колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости, период и декремент этих колебаний, случай аperiodического движения. Вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости, коэффициент динамичности, резонанс.

7 Механическая система. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Классификация сил, действующих на механическую систему. Свойства внутренних сил. Общие теоремы динамики системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс системы. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

8 Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения системы. Главный момент количества движения механической системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Моменты

инерции системы и твердого тела относительно оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел. Динамические уравнения плоского движения твердого тела.

9 Кинетическая энергия механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Равенство нулю суммы работ внутренних сил, действующих в твердом теле или в неизменяемой механической системе. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

10 Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Определение с помощью принципа Даламбера динамических реакций при движении точки и механической системы.

11 Связи и их уравнения. Классификация связей; голономные и неголономные, стационарные и нестационарные связи. Возможные или виртуальные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей и к простейшим машинам. Принцип Даламбера – Лагранжа; общее уравнение динамики.

12 Обобщенные координаты системы. Обобщенные силы и способы их вычисления. Случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода. Уравнение Лагранжа второго рода для консервативных систем.

13 Малые свободные колебания механической системы с двумя (или n) степенями свободы и их свойства, собственные частоты и коэффициенты формы. Понятие о виброзащите. Динамический гаситель колебаний.

14 Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Теорема об изменении количества движения материальной точки при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе. Центр удара.

Учебное издание

ЧЕРНОУС Дмитрий Анатольевич
ЧАГАНОВА Оксана Сергеевна
КРАКОВА Ирина Евгеньевна

Динамика твердых тел и их систем
Учебно-методическое пособие

Редактор *Н. Г. Шеметкова*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *Т. А. Пугач*

Подписано в печать 25.03.2015 г. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 6,37. Тираж 650 экз.
Зак. № . Изд. № 89.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246053, г. Гомель