УДК 517.956

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

С.А. ДУДКО, Е.А. ЗАДОРОЖНЮК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Операционный метод (преобразование Лапласа) давно и прочно занял своё место при рассмотрении динамических задач механики, теории колебаний, газовой динамики. Для многих разделов электротехники (прежде всего таких, как ТОЭ и ТЛЭЦ) операционный метод является фактически математическим фундаментом, так как представляет собой метод, наиболее адекватный для рассмотрения процессов в линейных электрических цепях.

В то же время во многих прикладных задачах возникает необходимость применения методов операционного исчисления для рассмотрения динамических процессов в более сложных системах. В этой статье мы рассмотрим метод интегрирования так называемых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Такое название даётся дифференциальным уравнениям, в которые входят значения неизвестной функции и её производных, соответствующих значению аргумента t, а также их значения для некоторых предшествующих значений аргумента $t-\tau_1, t-\tau_2, \ldots, t-\tau_k$ (уравнения такого типа часто приходится рассматривать в задачах теории автоматического регулирования). Лишь старшая производная неизвестной функции входит в уравнение с аргументом t (т. е. в момент времени t). Запаздывания $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ будем считать постоянными величинами. Таким образом, мы будем интегрировать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, т. е. уравнение вида

$$x^n(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{k} a_{jr} x^{(n-j)}(t-\tau_r) = f(t), \qquad (1)$$

где все коэффициенты a_{jr} и все запаздывания τ_k являются постоянными величинами ($\tau_k > \tau_{k-1} > \ldots \tau_1 > \tau_0 = 0$).

Операционным методом уравнение вида (1) можно интегрировать в двух случаях:

1) если считать, как это обычно принимают в операционном методе для функции-оригинала, что $x^{(n-j)}(t-\tau_r) \equiv 0$ при $t-\tau_r$, когда уравнение (1) можно представить в виде

$$x^n(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{k} a_{jr} \theta(t-\tau_r) x^{(n-j)}(t-\tau_r) = f(t), \qquad (2)$$

где $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда $\theta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$

2) если считать, что данное дифференциальное уравнение описывает процесс лишь для значений $t > \tau_k$, где τ_k – наибольшее из запаздываний, а для значений $t \leq \tau_k$ значение $x(t)$ задано в виде некоторой n раз дифференцируемой функции $x(t) = \varphi(t)$ при $0 \leq t \leq \tau_k$. Функция $\varphi(t)$ называется в этом случае начальной.

В данной статье рассмотрим случай 1. Используем для перехода к лаплас-образам в уравнении (2) так называемую теорему запаздывания. Если функции-оригиналу $f(t)$ отвечает лаплас-образ $F(p)$, функции-оригиналу с запаздывающим аргументом $f(t-\tau)$ будет отвечать лаплас-образ $e^{-p\tau}F(p)$. С помощью теоремы запаздывания нетрудно получить изображающее уравнение для исходного дифференциального уравнения (2) и из него найти лаплас-образ искомого решения. Но найти по полученному лаплас-образу оригинал в конечном виде чаще всего не удаётся. Обычно в этом случае можно построить решение, разлагая его тем или иным способом в бесконечный ряд.

Рассмотрим следующий простой пример. Проинтегрируем дифференциальное уравнение с единственным временем запаздывания

$$x''(t) - x'(t) + \lambda\theta(t-\tau)\big(x'(t-\tau) - x(t-\tau)\big) = 0$$

при произвольных начальных условиях $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$.

Введем лаплас-образ $X(p)$, отвечающий неизвестной функции $x(t)$, и перейдём к изображающему уравнению

$$p^2 X(p) - px_0 - x_0' - (pX(p) - x_0) + \lambda e^{-p\tau}(pX(p) - x_0 - X(p)) = 0 .$$

После необходимых преобразований получаем

$$(p-1)(p+\lambda e^{-p\tau})X(p) = x_0(p+\lambda e^{-p\tau}) + (x_0' - x_0) .$$

Из последнего уравнения находим требуемый лаплас-образ

$$X(p) = \frac{x_0(p+\lambda e^{-p\tau}) + (x_0' - x_0)}{(p-1)(p+\lambda e^{-p\tau})} = \frac{x_0}{p-1} + \frac{x_0' - x_0}{(p-1)(p+\lambda e^{-p\tau})} = \frac{x_0}{p-1} + \frac{x_0' - x_0}{p(p-1)}\left[1 + \frac{\lambda e^{-p\tau}}{p}\right]^{-1} .$$

Множитель в прямых скобках разлагаем в ряд по степеням $e^{-p\tau}$, используя стандартное разложение в ряд Маклорена

$$(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)}{2!} y^2 + \ldots$$

(в нашем случае $m=-1,\ y=\dfrac{\lambda e^{-p\tau}}{p}$):

$$\left[1+\frac{\lambda e^{-p\tau}}{p}\right]^{-1}=1-\frac{\lambda e^{-p\tau}}{p}+\frac{(-1)(-2)\lambda^2 e^{-2p\tau}}{2!p^2}+...+\frac{(-1)(-2)...(-n)}{n!}\cdot\frac{\lambda^n e^{-np\tau}}{p^n}+...=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n e^{-np\tau}}{p^n}.$$

Окончательно лаплас-образ $X(p)$ представим в виде

$$X(p)=\frac{x_0}{p-1}+\frac{x_0'-x_0}{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n e^{-np\tau}}{p^{n+1}}=\frac{x_0}{p-1}+(x_0'-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda^n e^{-np\tau}\left(\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^{n+1}}\right).$$

Оригинал, отвечающий основному множителю в скобках, найдем через свёртку функций-оригиналов, соответствующих каждому из лаплас-образов. Так как соответствующие оригиналы имеют вид $\dfrac{1}{p-1}\div e^t,\ \dfrac{1}{p^{n+1}}\div\dfrac{1}{n!}t^{n+1}$,

то получаем

$$\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^{n+1}}\div\frac{1}{n!}\int_0^t e^{(t-t_1)}t_1^n dt_1=\frac{e^t}{n!}\int_0^t e^{-t_1}t_1^n dt_1.$$

Используя теорему запаздывания, находим решение исходного уравнения (2):

$$x(t)=x_0e^t+(x_0'-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n\theta(t-n\tau)e^{t-n\tau}}{n!}\int_0^{t-n\tau}e^{-t_1}t_1^n dt_1.$$

Отметим, что решение, полученное в виде бесконечного ряда, является достаточно удобным инструментом для исследования переходных процессов в системах автоматического регулирования. Зачастую при анализе процессов в динамической системе нет необходимости работать с решением дифференциального уравнения в виде бесконечного ряда. Для получения необходимого в «прикладном плане» решения достаточно ограничиться несколькими первыми слагаемыми ряда.

Список литературы

1 **Пчелин, Б.К.** Специальные разделы высшей математики. (Функции комплексного переменного. Операционное исчисление) / Б.К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

2 **Шахно, К.У.** Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К.У.Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975.– 400 с.

3 **Штокало, И.З.** Операционное исчисление / И.З. Штокало. – К. : Наукова думка, 1972. – 279 с.