

УДК 539.3

*А. А. ПОДДУБНЫЙ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель; В. А. ГОРДОН, доктор технических наук, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДОГРУЖЕНИЙ СТЕРЖНЯ, ВЫЗВАННЫХ ВНЕЗАПНОЙ ОСАДКОЙ ЧАСТИ ОСНОВАНИЯ ПАСТЕРНАКА ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ШАГАЮЩИХ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Рассматривается стержень, опертый на основание Пастернака, ставится задача определения величины динамических догрузений, вызванных внезапной осадкой части основания. Сочетая механические и геометрические параметры поврежденной системы «стержень – основание», включая длину опертой части и условия закрепления стержня на основании, необходимо обеспечить определённые требования к частоте собственных колебаний, инициированных внезапным повреждением основания.

**Введение.** В настоящее время необходимо интенсивно развивать работы по исследованию и созданию шагающих роботов. Это вызвано тем, что шагающие робототехнические комплексы, по сравнению с традиционными колёсными и гусеничными машинами, имеют ряд преимуществ при движении по поверхности со сложным рельефом, таким как заболоченная и пересечённая местность, завалы, песчаные дюны, Арктика, поверхности планет и т. д. Многие страны сегодня активно ведут разработки в этой области и производят различных по назначению шагающих роботов.

Фирма Boston Dynamics разработала Big Dog при финансировании DARPA (агентство научно-исследовательских проектов, разрабатывающее новые технологии для использования в вооружённых силах) (рисунок 1).



Рисунок 1 – Военный транспортный шагающий робот Big Dog (Boston Dynamics, США)

BigDog – автономный четвероногий робот, который способен двигаться по пересеченной местности лучше, чем существующие колёсные и гусеничные роботы, способен передвигаться везде, где это возможно человеку или животному, двигаться на протяжении нескольких часов и переносить полезный груз. Наделенный искусственным интеллектом, робот способен передвигаться по местности при минимальном контроле и вмешательстве человека.

Как правило, такие робототехнические комплексы имеют немало уязвимых элементов конструкции, в случае деформаций которых происходит потеря устойчиво-

сти робота, превышение углов крена и тангажа, что приводит к переворачиванию передвижной платформы.

Для того чтобы повысить живучесть шагающих роботов, необходимо еще на стадии проектирования всех элементов конструкции учитывать всевозможные самые невыгодные условия эксплуатации робототехнического комплекса.

Одной из важных проблем данного направления строительной механики является разработка теории конструкционной безопасности стержневых конструкций, взаимодействующих с основаниями, учитывающей воздействия, не предусмотренные условиями нормальной эксплуатации, возникающих, в частности, при чрезвычайных ситуациях, включая огневые поражения, в результате износа и накопления повреждений, при непродуманных и некачественных реконструкционных мероприятиях и т. п.

Анализ современной технической литературы показывает, что имеющиеся постановки и методы решения задач прочности и живучести, которые учитывали бы фактор внезапности изменения конструктивной и (или) расчетной схем сооружений и их элементов, пока малочисленны и несовершенны. В работах [1, 2] проанализированы специфика и характеристики динамических процессов, инициируемых внезапными повреждениями, определены частоты и формы собственных и вынужденных колебаний, приращения деформаций и внутренних силовых факторов, получены зависимости динамических факторов от обобщённой жесткости системы «стержень – основание» и от размеров и локализации дефектов. Во всех работах используется метод начальных параметров в сочетании с векторно-матричным представлением состояния произвольного сечения стержня. Применение начальных параметров и специальных функций (Крылова) упрощает решение, снижает порядок матриц и определителей. Кроме того, производные функций выражаются через исходные функции, что приводит к существенным упрощениям решений.

### Постановка задачи.

**1 Статический изгиб балки.** Изгиб балки (рисунок 2), защемлённой по концам, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой интенсивности  $q$ , взаимодействующей по всей длине с упругим двухпараметрическим основанием Пастернака, описывается дифференциальным уравнением (1).

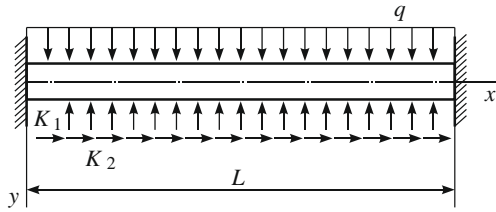


Рисунок 2 – Изгиб балки с заделкой на концах, лежащей на основе Пастернака

$$\frac{d^4 w_{\text{ст}}}{d\xi^4} - 4\beta^2 \frac{d^2 w_{\text{ст}}}{d\xi^2} + 4\alpha^4 w_{\text{ст}} = \bar{q}, \quad (1)$$

где  $\xi = \frac{x}{L}$ ;  $w = \frac{v}{L}$  – прогиб;  $\beta^2 = \frac{K_2 L^2}{4EI}$ ;  $\alpha^4 = \frac{K_1 L^4}{4EI}$ ;

$\bar{q} = \frac{qL^3}{EI}$ ;  $K_1 = \bar{K}_1 B$ ;  $K_2 = \bar{K}_2 B$  – коэффициенты постели основания;  $B$  – ширина прямоугольного поперечного сечения балки.

Общее решение уравнения (1) является суммой общего решения, соответствующего (1) однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_{0\text{ст}}}{d\xi^4} - 4\beta^2 \frac{d^2 w_{0\text{ст}}}{d\xi^2} + 4\alpha^4 w_{0\text{ст}} = 0 \quad (2)$$

и частного решения, соответствующего правой части уравнения (1)

$$w_{\text{кст}} = \frac{\bar{q}}{4\alpha^4}. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) ищем стандартной подстановкой Эйлера

$$w_{0\text{ст}} = Ae^{n\xi}, \quad (4)$$

где  $A, n$  – константы, подлежащие определению.

Подставляя представление (4) в уравнение (2), получим характеристическое уравнение

$$n^4 - 4\beta^2 n^2 + 4\alpha^4 = 0, \quad (5)$$

все корни которого – комплексные, если  $\alpha > \beta$ ,

$$n_{1...4} = \pm a \pm ib, \quad (6)$$

где  $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ;  $b = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,

или действительные, если  $\alpha < \beta$ ,

$$n_{1,2} = \pm c, \quad n_{3,4} = \pm d,$$

где  $c = \sqrt{2(\beta^2 + \sqrt{\beta^4 - \alpha^4})}$ ;  $d = \sqrt{2(\beta^2 - \sqrt{\beta^4 - \alpha^4})}$ .

Рассматривается случай (6) как более реальный для грунтовых оснований. Тогда общее решение уравнения (1) принимает вид

$$w_{\text{см}} = A_1 \text{cha}\xi \cos b\xi + A_2 \text{sha}\xi \cos b\xi + A_3 \text{cha}\xi \sin b\xi + A_4 \text{sha}\xi \sin b\xi + \frac{\bar{q}}{4\alpha^4}, \quad (7)$$

где  $A_i (i = 1 \dots 4)$  – постоянные интегрирования.

Граничные условия при защемлении концов балки

$$\begin{aligned} w_{\text{ст}}(0) = w'_{\text{ст}}(0) = 0, \\ w_{\text{ст}}(1) = w'_{\text{ст}}(1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В близких по тематике работах [3] показана эффективность применения метода начальных параметров в сочетании с векторно-матричным представлением состояния произвольного сечения для анализа напряженно-деформированного состояния балки при взаимодействии её с упругим основанием. Аналогичный подход используется ниже.

Заменяя постоянные интегрирования начальными параметрами

$$w_0 = w_{\text{ст}}(0); w'_0 = w'_{\text{ст}}(0); w''_0 = w''_{\text{ст}}(0); w'''_0 = w'''_{\text{ст}}(0),$$

приводим функцию (7) к виду

$$w_{\text{ст}} = F_4(\xi)w_0 + F_3(\xi)w'_0 + F_2(\xi)w''_0 + F_1(\xi)w'''_0 + F_5(\xi), \quad (9)$$

где  $F_1(\xi) = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{\text{cha}\xi \sin b\xi}{b} - \frac{\text{sha}\xi \cos b\xi}{a} \right)$ ;

$$F_2(\xi) = \frac{1}{2ab} \text{sha}\xi \sin b\xi; \quad F_3(\xi) = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \times$$

$$\times \left( \frac{3a^2 - b^2}{a} \text{sha}\xi \cos b\xi - \frac{a^2 - 3b^2}{b} \text{cha}\xi \sin b\xi \right);$$

$$F_4(\xi) = \text{sha}\xi \cos b\xi - \frac{a^2 - b^2}{2ab} \text{sha}\xi \sin b\xi;$$

$$F_5(\xi) = \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (1 - F_4(\xi)).$$

С учётом первой пары граничных условий (8) функция (9) несколько упрощается:

$$w_{\text{ст}} = F_2(\xi)w''_0 + F_1(\xi)w'''_0 + \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (1 - F_4(\xi)). \quad (10)$$

После определения начальных параметров и из системы алгебраических уравнений

$$w_{\text{ст}}(1) = F_2(1)w''_0 + F_1(1)w'''_0 + \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (1 - F_4(1)) = 0,$$

$$w'_{\text{ст}}(1) = F'_2(1)w''_0 + F'_1(1)w'''_0 + \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} F'_4(1) = 0,$$

полученных из второй пары граничных условий (8), решение статической задачи заканчивается.

**2 Динамическое догружение балки в результате внезапной частичной осадки основания.** В некоторый момент  $t = 0$  произошла внезапная осадка части основания длиной  $L_1$  (рисунок 3).

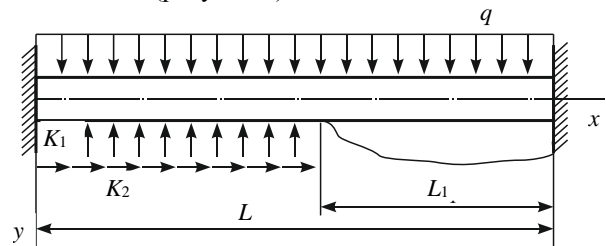


Рисунок 3 – Изгиб балки с заделкой на концах, частично лежащей на основе Пастернака

В результате внезапного нарушения статического равновесия высвобождается упругая энергия, которая приводит балку в движение.

2.1 Собственные поперечные колебания балки, частично поддерживаемой основанием Пастернака.

Собственные колебания двух частей балки: опертой на основание ( $0 \leq \xi_1 \leq \nu$ ) и свободной ( $0 \leq \xi_2 \leq 1 - \nu$ ),

где  $\xi_1 = \frac{x_i}{L}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\nu = \frac{L_1}{L}$  – относительная длина

опертой части балки, рассматриваются отдельно. Постоянные интегрирования дифференциальных уравнений колебаний участков определяются из общих граничных условий и условий сопряжения участков.

2.1.1 Собственные поперечные колебания опертого участка ( $0 \leq \xi_1 \leq \nu$ ).

Уравнение собственных поперечных колебаний этого участка [9]

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi_1^4} - 4\beta^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2} + 4\alpha^4 \left( w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Введем три параметра, имеющие размерность частоты  $\left[ \frac{1}{c} \right]$ :

$$\text{«условные» частоты } \omega_{01} = \sqrt{\frac{K_1}{\rho A}}, \quad \omega_{02} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{K_2}{\rho A}} \text{ и}$$

$$\text{«эталонная» частота } \omega_3 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $E$  – модуль Юнга;  $I$  – осевой момент инерции сечения.

Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi_1^4} - 4\bar{\omega}_{02}^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2} + \bar{\omega}_{01}^2 \left( w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \right) = 0, \quad (12)$$

где  $\bar{\omega}_{0i} = \frac{\omega_{0i}}{\omega_3}$  ( $i = 1, 2$ ) – относительные «условные»

частоты;  $\bar{\omega}_{01} = \frac{\omega_{01}}{\omega_3} = 2\alpha^2$ ;  $\bar{\omega}_{02} = \frac{\omega_{02}}{\omega_3} = \beta$ ,  $\tau = \omega_{01} t$  –

безразмерное время.

Полагая колебания гармоническими, разделяя переменные в уравнении (2.2) представлением

$$w_1(\xi_1, \tau) = W_1(\xi_1) \sin \bar{\omega} \tau, \quad (13)$$

где  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{01}}$  – безразмерная искомая частота, получаем

уравнение форм собственных колебаний участка

$$W_1^{IV} - 4\bar{\omega}_{02}^2 W_1'' + (\bar{\omega}_{01}^2 - \bar{\omega}^2) W_1 = 0, \quad (14)$$

где  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_3}$  – другое представление безразмерной иско-

мой частоты.

Структура уравнения показывает (14), что формы собственных колебаний балки будут различными в зависимости от наличия в спектре частот значений, меньших, равных или больших значения одного из параметров системы «балка – основание» «условной» частоты  $\bar{\omega}_{01}$ .

Теперь возникает вопрос: возможно ли сочетание механических и геометрических параметров балки и основания, включая длину опертой части балки и условия закрепления балки на основании, такое, чтобы собственная частота балки равнялась параметру  $\bar{\omega}_{01}$ , то есть выполнялось бы равенство  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{01}$ .

2.1.2 Собственные поперечные колебания опертого участка при условии  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{01}$ .

Предположив возможность  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{01}$ , приведём уравнение (14) к виду

$$W_1^{IV} - 4\bar{\omega}_{02}^2 W_1'' = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (2.5) с помощью подстановки Эйлера, получим функцию прогибов

$$W_1(\xi) = A_1 + A_2 \xi_1 + A_3 \text{ch} 2\beta \xi_1 + A_4 \text{sh} 2\beta \xi_1, \quad (16)$$

или, заменяя константы  $A_i$  ( $i = 1..4$ ) начальными параметрами  $W_{01} = W_1(0)$ ,  $W'_{01} = W'_1(0)$ ,  $W''_{01} = W''_1(0)$ ,

$W'''_{01} = W'''_1(0)$ , получим функцию

$$W_1 = g_2(\xi_1) W''_{01} + g_1(\xi_1) W'''_{01}, \quad (17)$$

где  $g_1(\xi_1) = \frac{\text{sh} 2\beta \xi_1 - 2\beta \xi_1}{8\beta^3}$ ;  $g_2(\xi_1) = \frac{\text{ch} 2\beta \xi_1 - 1}{4\beta^2}$ .

Дифференцируя функцию (17) трижды по  $\xi_1$ , получим последовательно угол поворота поперечного сечения  $\xi_1$

$$W'_1 = g_3(\xi_1) W''_{01} + g_2(\xi_1) W'''_{01},$$

изгибающий момент

$$W''_1 = g_4(\xi_1) W''_{01} + g_3(\xi_1) W'''_{01}$$

и поперечную силу

$$W'''_1 = g_5(\xi_1) W''_{01} + g_4(\xi_1) W'''_{01},$$

где  $g_3 = g'_2 = \frac{\text{sh} 2\beta \xi_1}{2\beta}$ ;  $g_4 = g'_3 = \text{ch} 2\beta \xi_1$ ;

$$g_5 = g'_4 = 2\beta \text{sh} 2\beta \xi_1.$$

Теперь состояние произвольного сечения  $\xi_1$  опертого участка можно представить матричным уравнением

$$\bar{W}_1(\xi_1) = V_{11}(\xi_1) \bar{W}_{01}, \quad (18)$$

где  $\bar{W}_{01} = \{0, 0, W''_{01}, W'''_{01}\}$  – вектор начальных параметров опертого участка;

$$\bar{W}_1(\xi_1) = \{W_1(\xi_1), W'_1(\xi_1), W''_1(\xi_1), W'''_1(\xi_1)\} –$$

вектор состояния произвольного сечения  $\xi_1$ ;

$$V_{11}(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & g_2 & g_1 \\ 0 & 1 & g_3 & g_2 \\ 0 & 0 & g_4 & g_3 \\ 0 & 0 & g_5 & g_4 \end{pmatrix} – \text{функциональная матрица}$$

влияния начальных параметров этого участка на состояние произвольного сечения  $\xi_1$ .

2.1.3 Собственные поперечные колебания свободного участка ( $0 \leq \xi_2 \leq 1 - \nu$ ).

Собственные поперечные колебания свободного участка описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi_2^4} - 4\alpha^4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} = 0. \quad (19)$$

Разделяя переменные подстановкой

$$w_2(\xi_2, \tau) = W_2(\xi_2) \sin \bar{\omega} \tau,$$

получим уравнение форм колебаний

$$W_2^{IV} - \bar{\omega}^2 W_2 = 0, \quad (20)$$

откуда, полагая  $W_2(\xi_2) = Ae^{s\xi_2}$ ,

получим характеристическое уравнение

$$s^4 - \bar{\omega}^2 = 0, \quad (21)$$

корни которого

$$s_{1,2} = \pm \beta_3; \quad s_{3,4} = \pm i\beta_3; \quad \beta_3 = \sqrt{\bar{\omega}}, \quad (22)$$

и функцию прогибов

$$W_2(\xi_2) = A_1 \operatorname{ch} \beta_3 \xi_2 + A_2 \operatorname{sh} \beta_3 \xi_2 + A_3 \cos \beta_3 \xi_2 + A_4 \sin \beta_3 \xi_2$$

или, в начальных параметрах этого участка

$$W_{02} = W_2(0), \quad W'_{02} = W'_2(0), \quad W''_{02} = W''_2(0), \quad W'''_{02} = W'''_2(0).$$

$$W_2(\xi_2) = R_4(\xi_2)W_{02} + R_3(\xi_2)W'_{02} + R_2(\xi_2)W''_{02} + R_1(\xi_2)W'''_{02}, \quad (23)$$

где  $R_i = (R_i(\xi_2))$  ( $i=1...4$ ) – функции Крылова вида

$$R_1(\xi_2) = \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \xi_2 - \sin \beta_3 \xi_2}{2\beta_3^3}; \quad R_2(\xi_2) = \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \xi_2 - \cos \beta_3 \xi_2}{2\beta_3^2};$$

$$R_3(\xi_2) = \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \xi_2 + \sin \beta_3 \xi_2}{2\beta_3}; \quad R_4(\xi_2) = \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \xi_2 + \cos \beta_3 \xi_2}{2}.$$

Состояние произвольного сечения  $\xi_2$  свободного участка можно представить матричным уравнением

$$\bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2) \bar{W}_{02}, \quad (24)$$

где  $\bar{W}_{02} = \{W_{02}, W'_{02}, W''_{02}, W'''_{02}\}$  – вектор начальных параметров свободного участка;  $\bar{W}_2(\xi_2) = \{W_2(\xi_2),$

$\{W'_2(\xi_2), W''_2(\xi_2), W'''_2(\xi_2)\}$  – вектор состояния произвольного сечения  $\xi_2$ ;

$$V_2(\xi_2) = \begin{pmatrix} R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) & R_1(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_3(\xi_2) & \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) \end{pmatrix}.$$

Получено 10.11.2021

**A. A. Poddubny, V. A. Gordon.** Determination of dynamic reloading of the rod caused by sudden settlement of a part of the Pasternak base when moving walking robotic systems.

A rod, supported on the base of Pasternak, is considered, the task is to determine the value of dynamic reloading caused by a sudden settlement of a part of the base. Combining the mechanical and geometrical parameters of the damaged "rod – base" system, including the length of the supported part and the conditions for fixing the rod on the base, it is necessary to ensure certain requirements for the frequency of natural vibrations initiated by sudden damage to the base.

функциональная матрица влияния начальных параметров свободного участка на состояние произвольного сечения  $\xi_2$  этого участка.

Из условия сопряжения участков следует

$$\bar{W}_1(v) = \bar{W}_2(0)$$

или

$$\bar{W}_{02} = \bar{W}_2(0) = \bar{W}_1(v) = V_{11}(v) \bar{W}_{01},$$

так как матрица  $V_2(0)$  – единичная.

Теперь состояние произвольного сечения  $\xi_2$  свободного участка можно выразить через начальные параметры опертого участка

$$\bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2) V_{11}(v) \bar{W}_{01}. \quad (25)$$

Далее были определены частота и формы собственных колебаний балки, частично опертой на основание и получены численные результаты.

**Вывод.** Таким образом, в работе решена частная обратная задача – определены сочетания механических и геометрических параметров системы «балка – двухпараметрическое основание», включая размеры и локализацию повреждения основания, при которых собственная частота изгибных колебаний балки, инициированных внезапной осадкой части основания, будет единственной и равной известной «условной» частоте. Последняя может быть выражена в долях аналогичной свободной либо полностью опертой балки. Данный подход и методику решения комплекса, различных типовых задач необходимо использовать при расчете элементов конструкций шагающих робототехнических комплексов в случае внезапной деформаций которых происходит потеря устойчивости робота, превышение углов крена и тангажа, что приводит к переворачиванию передвижной платформы.

#### Список литературы

- 1 **Гордон, В. А.** Собственные изгибные колебания балки, частично опертой на основание Пастернака / В. А. Гордон, Г. А. Семенова // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – 2020. – № 1(339). – С. 34–42.
- 2 **Поддубный, А. А.** Методика расчёта критической силы сжатого стержня, погруженного в упругое основание / А. А. Поддубный, В. А. Гордон // *Вестник БелГУТа: Наука и транспорт.* – 2019. – № 1 (38). – С. 49–52.
- 3 **Poddubny, A A.** Dynamic Loading of the Rod at a Sudden Change of Elastic Foundation Structure / A. A. Poddubny, V. B. Gordon // *IOP Conference. Series: Materials Science and Engineering.* – 2021. – Vol. 1079. – Paper 042076.