УДК 378.147:531

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, М. Г. КУЗНЕЦОВА, И. Е. КРАКОВА
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Представлена информация о XVII Международной олимпиаде по теоретической механике, которая в апреле 2021 г. проведена в дистанционном формате в Белорусском государственном университете транспорта. Приведены условия и решения задач, сведения о результатах олимпиады.

Ключевые слова: теоретическая механика, олимпиада, условия задач, решения.

В апреле 2021 г. в Белорусском государственном университете транспорта (БелГУТ) проведена очередная XVII Международная олимпиада по теоретической механике. Как и предыдущий аналогичный конкурс, олимпиада проводилась в дистанционном формате. Задачи олимпиады решали 245 участников, которые представляли 52 команды из Азербайджана (1 университет), Беларуси (11), Китая (9), Кыргызстана (1), России (16), Туркменистана (10), Узбекистана (3) и Украины (1). Сложившиеся условия не позволили провести конкурс «Брейн-ринг», состоялся только личный теоретический конкурс, правила проведения которого были выработаны на основе опыта предыдущих лет [1–3].

Как и в предыдущем конкурсе [3], участникам предлагались шесть задач: по две задачи по статике, кинематике и динамике. Выдача условий и отправка решений осуществлялись по электронной почте через руководителей команд. За 15 минут до начала олимпиады им были высланы файлы с условиями на русском и английском языках (см. с. 282), которые затем передавались студентам. На решение задач теоретического конкурса отводилось 2,5 часа, в течение которых осуществлялась видео- и аудиозапись решения задач студентами. После отведенного на решение времени студенты должны были в течение 20 минут выполнить экспресс-отправку решений (по четыре листа на кадр), а затем, в течение еще двух часов, качественные снимки с решениями (по одному листу на кадр). Материалы для проверки были представлены 215 участниками.

Особенность задачи С1 была связана с необходимостью анализа нескольких возможных вариантов выхода системы из равновесия вследствие скольжения блока и его перекатывания. Все возможные случаи (см. с. 283) не удалось полностью учесть никому из участников. В задаче С2 следовало рассмотреть равновесие системы трех тел с внутренней связью в виде пружины. В задаче К1 потребовалось провести кинематический анализ механизма с двумя степенями свободы. Именно эту задачу полностью решили больше всего участников. При решении задачи К2 потребовалось провести анализ ситуации, связанной с разматыванием нити, наброшенной на каток, при котором меняется угол ее наклона. Здесь наиболее сложный момент был связан с учетом изменения длины нити при расчете ускорений. В задаче Д1 следовало учесть, что в результате действия приложенного к цилиндру момента он может катиться по поверхности как с проскальзыванием, так и без него. Наконец, задача Д2 была связана с анализом колебаний механической системы с тремя степенями свободы.

Проверку работ провели преподаватели кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» БелГУТа. По результатам конкурса 10 % участников, набравших наибольшее число баллов, были награждены дипломами I степени, следующие 20 % – дипломами II степени и еще 30 % – дипломами III степени. Наибольшее число баллов набрали Zhang Shuai (Университет Цинхуа, Китай), Sun Chenyang (Юго-Восточный университет, Китай) и Максим Иванов (Уфимский государственный нефтяной технический университет, Россия), которые значительно оторвались от последующих участников. Отметим также высокие результаты студентов Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина (Украина), Туркменского сельскохозяйственного института и БелГУТа. Подробную информацию о результатах прошедшего конкурса можно найти в приложении, а также на сайте БелГУТа (http://bsut.by).

Дистанционная форма проведения олимпиады имеет некоторые преимущества по сравнению с очной, но всё же не позволяет в полной мере удостовериться в самостоятельности участников при решении конкурсных задач. Поэтому в дальнейшем организаторы надеются вернуться к живому общению с участниками, развитию личных контактов для совершенствования научной и учебной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Shimanovsky, A. O.** The holding of contests in engineering mechanics / A. O. Shimanovsky // International Journal of Mechanical Engineering Education. – 2013. – Vol. 41, no. 2. – P. 107–114.

2 **Шимановский, А. О.** Опыт проведения олимпиад по теоретической механике в Белорусском государственном университете транспорта / А. О. Шимановский, М. Г. Кузнецова, И. Е. Кракова // Теоретическая механика : сб. науч.-метод. статей. – М. : Изд-во Московского ун-та, 2020. – Вып. 31. – С. 173–183.

3 **Шимановский, А. О.** Проведение XVI Международной олимпиады по теоретической механике в дистанционном режиме / А. О. Шимановский, М. Г. Кузнецова, И. Е. Кракова // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 244–258.

A. O. SHIMANOVSKY, M. G. KUZNIATSOVA, I. E. KRAKAVA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

XVII INTERNATIONAL ENGINEERING MECHANICS CONTEST

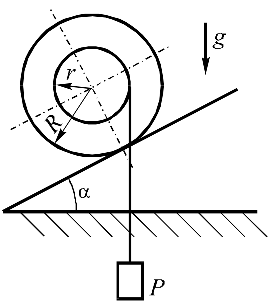
There is presented the information about the 17th International Engineering Mechanics Contest which took place at Belarusian State University of Transport in April 2021. The problem tasks and solutions and the Contest results information are demonstrated.

Keywords: engineering mechanics, contest, problem tasks, solutions.

Получено 30.10.2021

1 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Задача С1–2021



Ступенчатый блок, радиусы которого r и R, а сила тяжести – G, расположен на шероховатой наклонной плоскости. На внутреннюю ступень блока намотана нить, к концу которой подвешен груз. Коэффициент трения сцепления между блоком и плоскостью равен f.

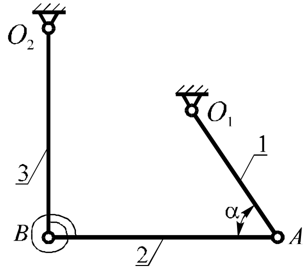
1 Найти, при каких значениях угла α возможно обеспечить равновесие блока в изображенном на рисунке положении при отсутствии сопротивления качению.

2 Определить значения силы P, при которых блок будет находиться в равновесии при заданном значении угла α, если коэффициент трения качения равен δ.

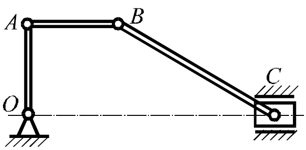
Задача С2–2021

В стержневой системе, расположенной в вертикальной плоскости, стержни 1, 2 и 3 имеют длины l_1, l_2, l_3 и веса P_1, P_2, и P_3 соответственно. Стержни 2 и 3 связаны спиральной пружиной, обеспечивающей равновесие системы в положении, изображенном на рисунке, при котором стержень AB горизонтален, $\angle O_1AB = \alpha$, $\angle O_2BA = \pi / 2$.

Определить момент, развиваемый пружиной, и реакцию шарнира B.



Задача К1–2021

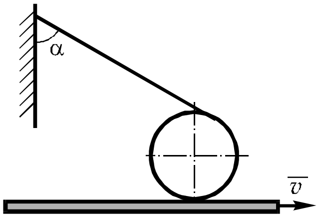


Изображенный на рисунке механизм включает стержни OA и AB одинаковой длины, а также стержень BC, длина которого в два раза больше. Скорости точек A и C одинаковы по модулю, постоянны и в данный момент направлены в противоположные стороны.

Для данного положения, при котором стержень OA вертикален, а стержень AB горизонтален, определить отношение угловых скоростей и угловых ускорений стержней AB и BC.

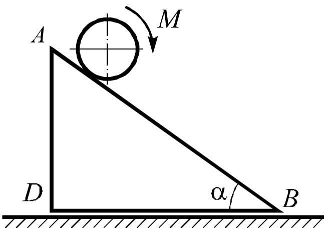
Задача К2–2021

Цилиндр радиуса r с намотанной на него нитью, второй конец которой прикреплен к вертикальной стене, находится на горизонтальной доске, которая поступательно движется по горизонтали с постоянной скоростью v. Цилиндр по доске не проскальзывает.



Определить в зависимости от угла α и длины l нити скорость и ускорение оси цилиндра, а также угловую скорость и угловое ускорение нити.

Задача Д1–2021

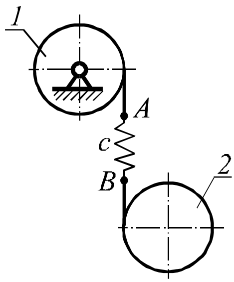


На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма массы $2m$ с углом α при основании. По грани призмы AB под действием момента M катится сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса r. Коэффициент трения между цилиндром и призмой – f.

Определить силу давления призмы на горизонтальную плоскость.

Задача Д2–2021

Однородные диски 1 и 2, имеющие одинаковые массы m и радиусы r, расположены в вертикальной плоскости. Диски связаны вертикальной нерастяжимой нитью, имеющей упругую вставку AB с коэффициентом жесткости c. В начальный момент система находилась в покое, и пружина AB была нерастянутой.

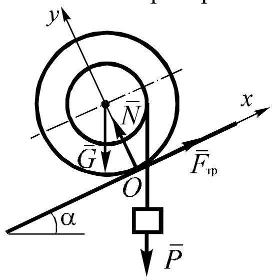


Определить максимальное угловое ускорение диска 1 при последующем движении и время, при котором оно достигается первый раз.

2 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача С1–2021

1 Рассмотрим равновесие блока при отсутствии сопротивления качению.



Поворот блока отсутствует, если

$$\sum M_{iO} = 0;\ GR\sin\alpha - P(r - R\sin\alpha) = 0.$$

Это равенство справедливо только в том случае, если плечо силы P положительно, т. е. при выполнении условия

$$r - R\sin\alpha > 0\ ;\ \sin\alpha < \frac{r}{R}\ .$$

Получим условие, при котором блок не скользит:

$$\sum F_{iy} = 0\ ; -G\cos\alpha + N - P\sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0\ ; F_{\text{тр}} - (P + G)\sin\alpha = 0;$$

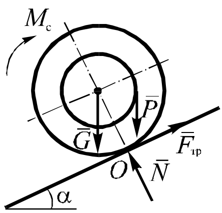
$$N = (P + G)\cos\alpha\ ;\ F_{\text{тр}} = (P + G)\sin\alpha\ ;$$

$$F_{\text{тр}} \le fN\ ;\ (P + G)\sin\alpha \le f\,(P + G)\cos\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha \le f\ .$$

Таким образом, равновесие можно обеспечить при выполнении условий

$$\alpha < \arcsin\frac{r}{R};\ \ \alpha \le \operatorname{arctg} f\ .$$

2 Исследуем равновесие блока при заданном значении угла α, если трение качения имеется.



Максимальное значение момента сопротивления качению $M_{c\max} = N\delta = (P + G)\cos\alpha \cdot \delta = 0$.

При малых значениях силы P качение происходит против хода часовой стрелки. Тогда

$$\sum M_{iO} = 0; GR\sin\alpha - P_{\min}(r - R\sin\alpha) - (P_{\min} + G)\cos\alpha \cdot \delta = 0;$$

$$P_{\min} = \frac{G(R\sin\alpha - \delta\cos\alpha)}{r - R\sin\alpha + \delta\cos\alpha},$$

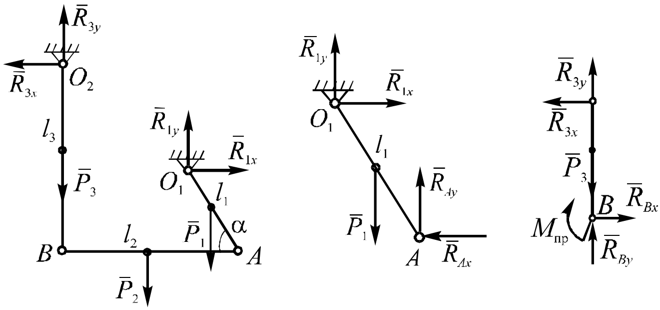
при $\delta\cos\alpha > R\sin\alpha$ имеем $P_{\min} = 0$.

При качении по ходу часовой стрелки получаем

$$\sum M_{iO} = 0; GR\sin\alpha - P_{\max}(r - R\sin\alpha) + (P_{\max} + G)\delta\cos\alpha = 0\ ;$$

$$P_{\max} = \frac{G(R\sin\alpha + \delta\cos\alpha)}{r - R\sin\alpha - \delta\cos\alpha};$$ если $\delta\cos\alpha \ge r - R\sin\alpha$, то $P_{\max} = \infty$.

Задача С2–2021



Для системы в целом имеем

$$\sum M_{O2}=0\,;\ -P_2\frac{l_2}{2}-P_1(l_2-\frac{l_1}{2}\cos\alpha)+R_{1x}(l_3-l_1\sin\alpha)+R_{1y}(l_2-l_1\cos\alpha)=0\,.$$

Рассматривая равновесие первого стержня, получаем

$$\sum M_{iA}=0\,;\ \ P_1\frac{l_1}{2}\cos\alpha-R_{1y}l_1\cos\alpha-R_{1x}l_1\sin\alpha=0\,;$$

$$\frac{P_1}{2}-R_{1y}-R_{1x}\,\mathrm{tg}\,\alpha=0\,;\quad\Rightarrow\quad R_{1y}=\frac{P_1}{2}-R_{1x}\,\mathrm{tg}\,\alpha=0\,.$$

Подстановка в уравнения равновесия системы в целом дает

$$-P_2\frac{l_2}{2}-P_1\left(l_2-\frac{l_1}{2}\cos\alpha\right)+R_{1x}(l_3-l_1\sin\alpha)+\left(\frac{P_1}{2}-R_{1x}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)(l_2-l_1\cos\alpha)=0;$$

$$R_{1x}(l_3-l_1\sin\alpha-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha+l_1\sin\alpha)=P_2\frac{l_2}{2}+P_1(l_2-\frac{l_1}{2}\cos\alpha)-P_1\frac{l_2}{2}+\frac{P_1l_1\cos\alpha}{2};$$

$$R_{1x}=\frac{(P_2+P_1)l_2}{2(l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha)}=R_{3x}\,;\ R_{1y}=\frac{P_1}{2}-R_{1x}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{P_1}{2}-\frac{(P_2+P_1)l_2}{2(l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$R_{3y}=P_1+P_2+P_3-R_{1y}=\frac{P_2}{2}+P_2+P_3+\frac{(P_2+P_1)\frac{l_2}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Из уравнений равновесия стержня 3 окончательно получаем

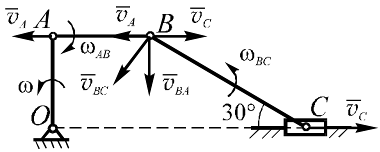
$$R_{Bx}=R_{3x}=\frac{(P_2+P_1)\frac{l_2}{2}}{l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha};$$

$$-M_{пр}+R_{3x}l_3=0;\ M_{пр}=R_{3x}l_3=\frac{(P_2+P_1)l_2l_3}{2(l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha)};$$

$$R_{3y}-P_3+R_{By}=0\,;\ R_{By}=P_3-R_{3y}=-\frac{P_1}{2}-P_2-\frac{(P_2+P_1)l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2(l_3-l_2\,\mathrm{tg}\,\alpha)}.$$

Задача К1–2021

Точка B принадлежит звеньям AB и BC, совершающим плоское движение, поэтому ее скорость можно найти по формуле



$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA} = \overline{v}_C + \overline{v}_{BC}.$$

Проецируя на оси, получаем

$$v_{Bx} = -v_A = v_C - v_{BC}\sin 30°;$$

$$v_{By} = -v_{BA} = -v_{BC}\cos 30°;$$

$$v_{BC} = \frac{v_A + v_C}{\sin 30^\circ} = 4v_A\,;\ v_{BA} = v_{BC}\cos 30^\circ = 2v_A\sqrt{3}.$$

Следовательно, угловые скорости звеньев

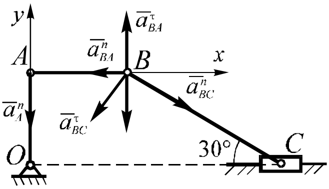
$$\omega_{BA} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2v_A\sqrt{3}}{l};\ \ \omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{4v_A}{2l} = \frac{2v_A}{l}.$$

Соответственно отношение угловых скоростей

$$\frac{\omega_{AB}}{\omega_{BC}} = \frac{2v_A\sqrt{3}}{2v_A} = \sqrt{3}.$$

Аналогично ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^{\,n} + \vec{a}_{BC}^{\,\tau}.$$



Здесь ускорения точки B при ее движении вокруг точек A и C:

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = \frac{12v_A^2}{l}\,;\ a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = \frac{8v_A^2}{l}.$$

В результате проецирования получаем

$$a_{Bx} = -a_{BA}^n = a_{BC}^n\cos 30° - a_{BC}^\tau \sin 30°;$$

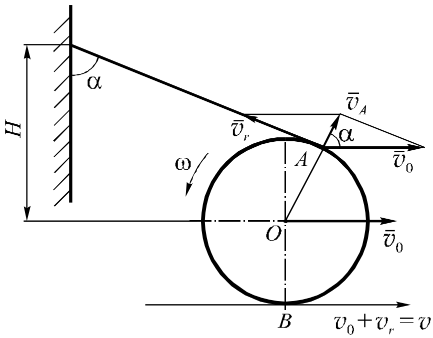
$$a_{By} = -a_A + a_{BA}^\tau = -a_{BC}^n \sin 30° - a_{BC}^\tau\cos 30°;$$

$$a_{BC}^\tau = (a_{BA}^n + a_{BC}^n\cos 30°)\,/\sin 30° = \frac{8v_A^2}{l}(\sqrt{3}+3);$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^n - a_{BC}^n\sin 30° - a_{BC}^\tau\cos 30° = -\frac{3v_A^2}{l}(4\sqrt{3}+5);$$

$$\frac{|\varepsilon_{AB}|}{|\varepsilon_{BC}|} = \frac{|a_{BA}^\tau|}{AB}\cdot\frac{BC}{|a_{BC}^\tau|} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+3} = \frac{7\sqrt{3}+3}{8} = 1{,}89.$$

Задача К2–2021



Пусть в некоторый момент времени ось цилиндра имеет скорость v_0, а угловая скорость цилиндра равна ω. Нить при движении цилиндра всегда натянута, поэтому скорость точки *A* цилиндра, касающейся нити, перпендикулярна нити. Отсюда получаем

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{v}_r; \quad v_r = \omega r;$$

$$v_0 \sin\alpha = \omega r.$$

Скорость точки *B* цилиндра, касающейся подставки,

$$v_B = v_0 + \omega r = v; \; v_0 + v_0 \sin\alpha = v.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{v}{1+\sin\alpha}; \; \omega_{\text{нити}} = \frac{v_A}{l} = \frac{v_0 \cos\alpha}{l} = \frac{v\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)l}.$$

Ускорения определим дифференцированием соответствующих скоростей по времени:

$$a_0 = \frac{dv_0}{dt} = -\frac{v\cos\alpha\,\omega_{\text{нити}}}{(1+\sin\alpha)^2} = -\frac{v^2\cos^2\alpha}{l(1+\sin\alpha)^2};$$

$$\varepsilon_{\text{нити}} = \frac{d\omega_{\text{нити}}}{dt} = \frac{v}{l^2}\frac{-\sin\alpha\cdot\omega_{\text{нити}}(1+\sin\alpha)l - \cos\alpha\left(\cos\alpha\,\omega_{\text{нити}} l + (1+\sin\alpha)\dfrac{dl}{dt}\right)}{(1+\sin\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{v}{l^2}\frac{\omega_{\text{нити}} l + \dfrac{dl}{dt}}{1+\sin\alpha}.$$

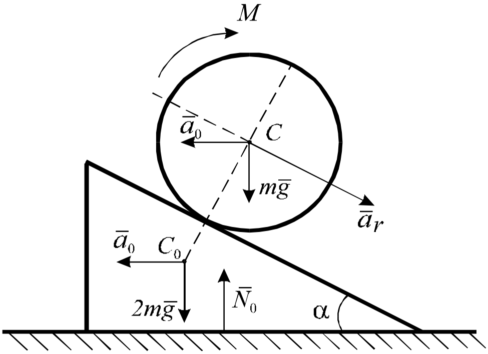
Получим выражение скорости изменения длины нити:

$$v = v_0 + \omega_{\text{нити}} r + \frac{dl}{dt}; \; \frac{dl}{dt} = \omega_{\text{нити}}(l\,\mathrm{tg}\,\alpha - r).$$

Подстановка в формулу углового ускорения дает

$$\varepsilon_{\text{нити}} = -\frac{v^2\cos\alpha(l+\sin\alpha - r\cos\alpha)}{l^3(1+\sin\alpha)^2}.$$

Задача Д1–2020



Для системы в целом в соответствии с теоремой о движении центра масс имеем

$$2ma_0 + m(a_0 - a_r\cos\alpha) = 0;$$

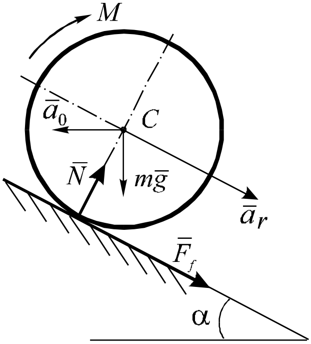
$$ma_r\sin\alpha = 3mg - N_0.$$

$$a_r = 3\frac{a_0}{\cos\alpha};$$

$$N_0 = 3mg - ma_r\sin\alpha =$$

$$= 3mg\left(1 - \frac{a_0}{g}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Далее рассмотрим отдельно катящийся цилиндр. В соответствии с его динамическими уравнениями движения получаем



$$N - mg\cos\alpha = -ma_0\sin\alpha;$$

$$mg\sin\alpha + F_f = m(a_r - a_0\cos\alpha);$$

$$\frac{1}{2}mr^2\varepsilon = M - F_f r.$$

Следовательно,

$$N = mg\cos\alpha - ma_0\sin\alpha;$$

$$F_f = -mg\sin\alpha + ma_0\left(\frac{3}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

В зависимости от величины приложенного момента M и коэффициента трения f между цилиндром и призмой возможны несколько вариантов. При малых значениях M и f точка контакта тел будет скользить вниз. При увеличении и достижении некоторого значения скольжение прекратится. Дальнейшее увеличение M до значения M_1 снова приводит к проскальзыванию, причем теперь точка контакта тел будет скользить вверх вдоль наклонной грани призмы. Рассмотрим представленные варианты.

1 *Качение без проскальзывания*. МЦС находится в точке контакта с наклонной гранью призмы, поэтому

$$\varepsilon^s = \frac{a_r}{r} = \frac{3a_0}{r\cos\alpha}.$$

Подстановка в представленные выше выражения дает

$$F_f = \frac{M}{r} - \frac{3ma_0}{2\cos\alpha};$$

$$\frac{M}{r}-\frac{3ma_0}{2\cos\alpha}=-mg\sin\alpha+ma_0\left(\frac{3}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right);$$

$$a_0=\frac{M+mgr\sin\alpha}{mr\left(\dfrac{4,5}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)};$$

$$N_0^s=3mg\left(1-\frac{M+mgr\sin\alpha}{mgr(4,5-\cos^2\alpha)}\sin\alpha\right)=\frac{3(3,5mgr-M\sin\alpha)}{r(4,5-\cos^2\alpha)}.$$

2 *Проскальзывание при больших моментах* ($M > M_1$). При проскальзывании $F_f = fN$. Тогда минимальное значение момента M_1, при котором начинается скольжение, определится следующим образом:

$$\frac{M_1}{r}-\frac{3ma_0}{2\cos\alpha}=f(mg\cos\alpha-ma_0\sin\alpha);$$

$$M_1=mgr\left[\frac{a_0}{g}\left(\frac{3}{2\cos\alpha}-f\sin\alpha\right)+f\cos\alpha\right];$$

$$f(mg\cos\alpha-ma_0\sin\alpha)=-mg\sin\alpha+ma_0\left(\frac{3}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right);$$

$$g\sin\alpha+fg\cos\alpha=a_0\left(\frac{3}{\cos\alpha}-\cos\alpha+f\sin\alpha\right);$$

$$a_0=g\,\frac{\sin\alpha+f\cos\alpha}{3-\cos^2\alpha+f\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cos\alpha;$$

$$M_1=mgr\left[\frac{(3-f\sin2\alpha)(\sin\alpha+f\cos\alpha)}{2(3-\cos^2\alpha+f\sin\alpha\cos\alpha)}+f\cos\alpha\right].$$

Подстановка ускорения в выражение искомой силы дает

$$N_0=3mg\left(1-\frac{\sin\alpha+f\cos\alpha}{3-\cos^2\alpha+f\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\sin\alpha\right)=\frac{6mg}{3-\cos^2\alpha+f\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

3 *Проскальзывание при малых моментах* ($M < M_2$). В этом случае, не изменяя расчетную схему, можно принять $F_f = -fN$. В таком случае максимальное значение момента M_2, при котором еще возможно скольжение,

$$M_2=mgr\left[\frac{(3+f\sin2\alpha)(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{2(3-\cos^2\alpha-f\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}-f\cos\alpha\right].$$

При этом искомая сила давления

$$N_0=3mg\left(1-\frac{\sin\alpha-f\cos\alpha}{3-\cos^2\alpha-f\sin\alpha\cos\alpha}\sin\alpha\right)=\frac{6mg}{3-\cos^2\alpha-f\sin\alpha\cos\alpha}.$$

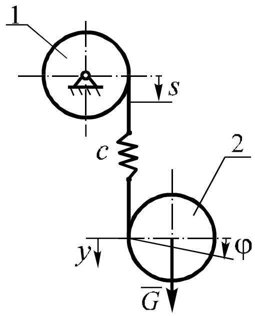
Таким образом, обобщая полученные результаты, окончательно получаем

$$\text{если } 0 < M < M_2, \qquad N_0 = \frac{6mg}{3-\cos^2\alpha - f\sin\alpha\cdot\cos\alpha};$$

$$\text{если } M_2 < M < M_1, \qquad N_0 = N_0^s = \frac{3(3{,}5mgr - M\sin\alpha)}{r(4{,}5-\cos^2\alpha)};$$

$$\text{если } M > M_1, \qquad N_0 = \frac{6mg}{3-\cos^2\alpha + f\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Задача Д2–2020



Составим дифференциальные уравнения движения системы, используя уравнения Лагранжа II рода. Кинетическая энергия системы и ее производные

$$T = \frac{mr^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{\dot{s}^2}{r^2} + \frac{m(\dot{y}+r\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{mr^2}{2\cdot 2}\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{m\cdot\dot{s}^2}{4} + \frac{m(\dot{y}+r\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{s}}\right) = \frac{m\ddot{s}}{2}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right) = m(\ddot{y}+r\ddot{\varphi});$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m(\ddot{y}+r\ddot{\varphi})r + \frac{mr^2\ddot{\varphi}}{2}.$$

Обобщенные силы

$$Q_s = c(y-s); \; Q_y = mg - c(y-s); \; Q_\varphi = mgr.$$

Подстановка в уравнения Лагранжа дает

$$\begin{cases} \dfrac{m\ddot{s}}{2} = c(y-s); \\ m(\ddot{y}+r\ddot{\varphi}) = mg - c(y-s); \\ \ddot{y} + \dfrac{3}{2}r\ddot{\varphi} = g. \end{cases}$$

В результате преобразований получаем уравнение, содержащее одну переменную s:

$$r\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}g - \frac{2}{3}\ddot{y}; \; m\left(\frac{\ddot{y}}{3} + \frac{2}{3}g\right) = mg - c(y-s);$$

$$\frac{m\ddot{y}}{3} = \frac{mg}{3} - c(y-s); \; \ddot{y} = g - 3\frac{c}{m}(y-s);$$

$$\frac{\ddot{s}}{2}=\frac{c}{m}(y-s)\ ;\quad y=\frac{m\ddot{s}}{2c}+s\ ;\quad \ddot{y}=g-3\frac{\ddot{s}}{2}\ ;$$

$$\frac{s^{\mathrm{IV}}}{2}=\frac{c}{m}(\ddot{y}-\ddot{s});\quad \frac{ms^{\mathrm{IV}}}{2c}+\ddot{s}=g-\frac{3\ddot{s}}{2};$$

$$\frac{ms^{\mathrm{IV}}}{2c}+\frac{5}{2}\ddot{s}=g\ .$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{m}{2c}\lambda^4+\frac{5}{2}\lambda^2=0;\ \left(\frac{m}{2c}\lambda^2+\frac{5}{2}\right)\lambda^2=0\ ;$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0\ ;\ \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{5c}{m}}i\ ;$$

$$s=C_1+C_2t+C_3\sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t+C_4\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t+\frac{gt^2}{5};$$

$$\ddot{s}=g\frac{2}{5}-\frac{5c}{m}\left(C_3\sin\sqrt{\frac{5c}{m}}t+C_4\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t\right).$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия при $t=0$: $s=0$, $\dot{s}=0$, $\ddot{s}=0$; $\dddot{s}=0$. Подстановка дает

$$s(0)=C_1+C_4=0;\ \dot{s}(0)=C_2+C_3\sqrt{\frac{5c}{m}}=0\ ;$$

$$\ddot{s}(0)=-C_4\frac{5c}{m}+g\frac{2}{5}=0\ ;\ \dddot{s}(0)=C_3\left(\frac{5c}{m}\right)^{3/2}=0\ ;$$

$$C_2=C_3=0;\ C_4=\frac{2mg}{25c};\ C_1=-\frac{2mg}{25c}.$$

Таким образом, обобщенное ускорение $\ddot{s}$ изменяется по закону

$$\ddot{s}=\frac{2g}{5}-\frac{5c}{m}\left(\frac{2mg}{25c}\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t\right)=\frac{2g}{5}\left(1-\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t\right).$$

Максимальное его значение достигается при $\cos\sqrt{\frac{5c}{m}}t=-1.$ Соответственно, получаем

$$\ddot{s}_{\max}=4g/5;\ \ddot{\varphi}_{\max}=\frac{\ddot{s}_{\max}}{r}=\frac{4g}{5r}\ ;$$

$$\sqrt{\frac{5c}{m}}t=\pi;\ t=\pi\sqrt{\frac{m}{5c}}.$$

3 РЕЗУЛЬТАТЫ КОНКУРСА

Студенты, набравшие наибольшее количество баллов

Студент	Вуз	Баллы по задачам						Всего
		1	2	3	4	5	6	
Zhang Shuai	THU	8	9	10	10	7,5	10	55
Sun Chenyang	SEU	8	9	10	7	9,5	10	54
Иванов Максим Дмитриевич	УГНТУ	7,5	10	10	6	9	9,5	52
Wei Haoyu	THU	7,5	9,5	10	2,5	10	6	46
Wu Junhong	TJU	7	5	10	4,5	6,5	9	42
Tang Zhenjia	NUAA	7,5	10	10	3,5	5	2,5	39
Gui Tianze	THU	7	8,5	10	2	7	3,5	38
Tong Shanghang	TJU	8,5	8	9	1	3	7	37
Лукин Илья Владимирович	ХНУ	7	–	10	0,5	8,5	10	36
Li Hongtai	THU	6,5	0,5	9	5	7	8	36
Song Zenan	TJU	5	5	9,5	7	2	6	35
Chen Dibo	SYSU	6	9	4,5	1,5	4	9,5	35
Zhang Zichong	TJU	6,5	8,5	5,5	5,5	4,5	1	32
Овчаренко Григорий Вадимович	ХНУ	5,5	–	9	3	2,5	10	30
Lu Yao	TJU	4	8,5	5,5	4	7	1	30
Xu Zhiyin	SEU	6,5	4	10	6,5	2	1	30
Chu Shiyuan	HU	3,5	10	5,5	4	6	1	30
Li Haolong	SU	6	2,5	10	1,5	5,5	4	30
Liang Weihua	NUAA	8	4	9,5	2	0	4	28
Дурсынов Касимберди Алтымухаммедович	ТСХИ	6	1,5	10	1	4,5	4	27
Luo Qingyong	SYSU	2,5	6,5	5	2,5	8	2,5	27
Головин Кирилл Михайлович	УрФУ	7	10	4	5	–	0,5	27
Li Ruochen	THU	5,5	10	7	2	0,5	1,5	27
Реджепов Абдулла	ГЭИТ	4	9,5	10	0,5	1,5	–	26
Tang Mi	TJU	6	4	10	1	3	1,5	26
Jiang Xianxian	SEU	6	1	9	1	3	5	25
Wei Jian	HU	3,5	6	9,5	2	4	–	25
Симонов Михаил Александрович	УрФУ	4,5	10	4,5	1	3	1,5	25
Хабибуллин Батыр Альбертович	УГНТУ	5,5	9	6,5	0,5	1,5	1	24
Гулканов Александр Георгиевич	МГСУ	8	–	–	5	0	10	23
Юркин Сергей Константинович	КФУ	3	7,5	10	1,5	0,5	0,5	23
Suleymanov Selim	OETUT	3	10	10	–	–	–	23
Калистратов Кирилл Александрович	КФУ	5	5	10	2,5	–	–	23
Jiang Tianyu	SYSU	3	10	6,5	0,5	1	1	22
Циоплиакис Николаос Илиас	ЮУрГУ	8	1	8,5	–	2,5	1,5	22
Бегмырадов Непес	ТСХИ	3,5	5	10	0,5	1	0,5	21
Fang Yaxin	SU	3	5,5	6,5	1,5	2	2	21
Муртазина Алсу Касимовна	УГНТУ	3,5	0,5	5,5	1	8	1,5	20
Аннагулыев Атамырат Шохрадович	ТГУ	4,5	4	7,5	1,5	1,5	1	20
Демьянчук Ольга Владимировна	БелГУТ	5	3,5	2,5	2	6	1	20
He Wanying	SYSU	3,5	3	8,5	0,5	3	1,5	20
Lu Xingyu	NUAA	4,5	10	2	0,5	0,5	2,5	20
Стрельцов Иван Игоревич	НГАСУ	3,5	8,5	7	0,5	–	–	20
Seyidov Didar	OETUT	3	1,5	10	–	2	3	20
Song Yihong	AFEU	4	4	7,5	0,5	3	0,5	20

4 КОМАНДЫ-УЧАСТНИЦЫ И ИХ РУКОВОДИТЕЛИ

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова (ВОЕНМЕХ) – Илихменев Андрей Львович.

Барановичский государственный университет (БарГУ) – Федосов Николай Михайлович.

Белорусская государственная академия авиации (БГАА) – Гурвич Юрий Абрамович.

Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ) – Шимановский Александр Олегович.

Белорусский государственный университет (БГУ) – Мармыш Денис Евгеньевич.

Белорусский национальный технический университет (БНТУ) – Скляр Ольга Николаевна.

Белорусско-Российский университет (БРУ) – Трусов Игорь Валерьевич.

Брестский государственный технический университет (БрГТУ) – Веремейчик Андрей Иванович.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого (ГГТУ) – Кроль Дмитрий Григорьевич.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ГГУ) – Капшай Валерий Николаевич.

Государственный энергетический институт Туркменистана (ГЭИТ) – Акмырадов Шатлык Бегенджович.

Институт инженерно-технических и транспортных коммуникаций Туркменистана (ИИТТКТ) – Базаров Арслан Довранович.

Институт телекоммуникаций и информатики Туркменистана (ИТИТ) – Багшыев Аннамухаммет Акмухаммедович.

Иркутский техникум транспорта и строительства – Карнаухова Любовь Петровна, Иринчеева Елена Владимировна.

Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ) – Марданов Ренат Фаритович.

Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ) – Муштари Айрат Ильдарович.

Каршинский инженерно-экономический институт.

Московский институт стали и сплавов.

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет – Модестов Константин Анатольевич.

Национальный университет Узбекистана им Мирзо Улугбека.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (НГАСУ) – Юдин Владимир Алексеевич.

Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» – Кучерявый Сергей Иванович.

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) – Кутеева Галина Анатольевна, Наумова Наталья Владимировна.

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева (СибГУ) – Фалькова Екатерина Владимировна, Назарова Лариса Петровна, Фисенко Елена Николаевна, Рабецкая Ольга Ивановна.

Ташкентский государственный транспортный университет.

Томский государственный архитектурно-строительный университет (ТГАСУ) – Геттингер Максим Викторович.

Туркменский государственный архитектурно-строительный институт (ТГАСИ) – Ишангулыев Арслан Атабердыевич.

Туркменский государственный университет им. Махтумкули (ТГУ) – Машаев Мурад Ходжамкулиевич.

Туркменский сельскохозяйственный институт (ТСХИ) – Гарягдыев Мырат Нурмырадович.

Туркменский сельскохозяйственный университет им. С. А. Ниязова – Ашыров Азамат Алтыбаевич.

Туркменский государственный педагогический институт им. Сейди (ТГПИ) – Мырадов Сердар Ханмырадович.

Университет гражданской защиты МЧС РБ (УГЗ МЧС) – Мартыненко Тарас Михайлович, Камлюк Андрей Николаевич.

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ) – Рощева Татьяна Анатольевна.

Уфимский государственный нефтяной технический университет (УГНТУ) – Тихонов Александр Юрьевич.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (ХНУ) – Пославский Сергей Александрович.

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. Платова – Нефедов Виктор Викторович.

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ) – Слепова Светлана Владимировна, Прядко Юрий Григорьевич.

Air Force Engineering University (AFEU) – Zhao Jingbo.

Hohai University (HU) – Lin Ji, Lei Dong, Zhang Hui.

International University for the Humanities and Development – Pirmyrat Gurbanov.

Oguzhan Engineering and Technology University of Turkmenistan – Mekan Toyjanov.

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (NUAA) – Sun Wei, Chen Jianping, Zhang Li.

Shandong University (SU) – Zhao Moli, Sun Shupeng.

Southeast University (SEU) – Gu Chengjun, Jiang Yijun, Wang Wenjie.

Sun Yat-sen University (SYSU) – Liu Zuoqiu, Huang Jianliang, Liu Yulan.

Tongji University (TJU) – Fang Mingxia, Jiang Feng, Tang Keke.

Tsinghua University (THU) – Qiu Xinming.

Northwestern Polytechnical University (NWPU) – Wang Yan, Zhang Juan.