

УДК 624.073.2

С. В. БОСАКОВ¹, Ю. Н. КОТОВ²¹Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь²Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛОЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛИТЫ

Рассматривается статический расчет балочной плиты на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина при условии ограничений на некоторые перемещения плиты. Изучается случай плоской деформации для ленточного фундамента, при котором ряд точек балочной фундаментной плиты остается на одной прямой. Приведен пример расчёта балочной плиты, три точки которой лежат на одной прямой на упругом слое.

Ключевые слова: балочная плита, перемещения плиты, способ Жемочкина, упругий слой.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим балочную плиту на упругом основании под действием внешней нагрузки, вызывающей такие перемещения некоторых точек плиты, при которых они остаются на одной прямой (рисунок 1). Подобные задачи возникают, например, при расчете на стадии эксплуатации многоэтажного здания на плитном фундаменте, когда точки фундаментной плиты в местах стыка вертикальных стен и диафрагм жесткости должны находиться в одной плоскости. То же самое относится к точкам базы металлической колонны на контакте сечения колонны и базы. Требуется определить напряжения в области контакта между плитой и упругим основанием, ее перемещения, распределение изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях плиты, величины сил, при которых заданные точки перемещаются по одной прямой.

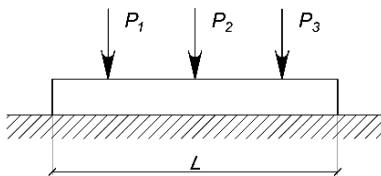


Рисунок 1 – Балочная плита на упругом основании

Поставленную задачу будем решать методом Жемочкина [1], который в англоязычной литературе также называют методом связей (Link Method) [2]. Он является одним из основных методов решения рассматриваемой задачи [3]. Обзор отечественных работ по применению метода Жемочкина при решении контактных задач дан в [4]. В статье [5] показано, что результаты, получаемые как с его применением, так и методом конечных элементов, хорошо согласуются. Отметим, что в рассматриваемой постановке метод Жемочкина используется впервые. Ранее [6] рассматривалось поступательное перемещение штампа на плоском клине методом ортогональных многочленов.

Разделим плиту на равные участки длиной Δx и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Будем считать, что сила в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений по всему участку.

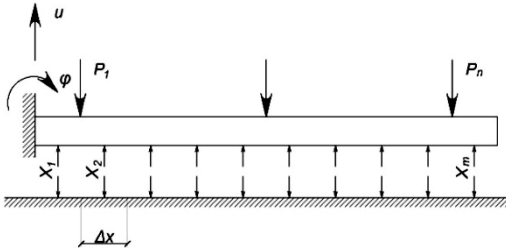


Рисунок 2 – Заданная система смешанного метода для расчета балочной плиты

Полученную многократно статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики [1]. Для этого разрежем все связи и введем на конце плиты заделку. Получаем основную систему смешанного метода (рисунок 2).

Составим канонические уравнения смешанного метода, добавив к ним уравнения нахождения ряда точек на одной прямой. При равнодействующей внешних сил, равной R , система имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \delta_{i,k} X_k + u + \varphi x_i + \sum_{k=1}^n y_{i,k} P_k = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ -\sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=1}^n P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m x_k X_k + \sum_{k=1}^n x_{pk} P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m F_{i,k} X_k + u' + \varphi'(x_i - x_{p1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{k=1}^n P_k = -R; \\ \sum_{k=1}^n x_{pk} P_k = -Ra_r, \end{array} \right. \quad (1)$$

где m – число участков Жемочкина на пластинке; $\delta_{i,k}$ – взаимное вертикальное перемещение разрезанной связи Жемочкина с номером i

$$\delta_{i,k} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k} + y_{i,k},$$

здесь первое слагаемое представляет перемещения центра участка с номером i упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по

участку с номером k ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, m$), а выражения для $F_{i,k}, y_{i,k}$ приводятся далее (для некоторых иных моделей упругого основания выражения для $F_{i,k}$ можно также найти в [1, 7]); X_k – неизвестная сила в связи Жемочкина на участке с номером k ; u, φ – неизвестные линейное и угловое перемещения введенного в начале балочной плиты защемления; n – число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с перемещениями на одной линии; $y_{i,k}$ – вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером i на балочной плите с защемлением от единичной силы, приложенной к центру участка плиты с номером k ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, m$); P_k, x_k – неизвестная сила, приложенная к центру участка с номером k ($k = 1, \dots, n$) и абсцисса точки ее приложения; x_{pk} – расстояние от защемления до участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы; u', φ' – неизвестные линейное и угловое перемещения прямой, на которой расположены n неизвестных сил (за u' принято перемещение первой точки, где приложена сила P_1); R, a_r – равнодействующая внешних сил и абсцисса ее приложения на балочной плите; E_0, ν_0 – упругие постоянные основания. Отметим, что, поскольку рассматривается плоская деформация, то все рассматриваемые силы представляют собой нагрузки, приходящиеся на единицу ширины плиты.

Как было отмечено выше, коэффициенты при неизвестных $\delta_{i,k}$ в уравнениях (1) зависят от перемещений упругого основания при воздействии единичной силы, равномерно распределенной по участку Б. Н. Жемочкина, и прогибов консольной балки от внешних сил.

В соответствии с [6, 7] вертикальные перемещения точек поверхности упругого основания в виде упругой полосы от силы P , распределенной по участку от a_k до b_k , определяются формулой

$$W(x) = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \frac{\cos\left(u\left(\frac{x-\xi}{h}\right)\right)}{u} du, \quad (2)$$

где x, ξ – абсциссы точки поверхности полосы, для которой определяется перемещение, и к которой приложена сила P ; h – толщина упругой полосы.

Для $L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$ примем аппроксимацию

$$L'(u) = \operatorname{th} \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24 \operatorname{ch} 2u}. \quad (3)$$

Ее точность характеризует рисунок 3, где изображены графики функций $L(u)$ и $L'(u)$. Отметим, что функция $L'(u)$, как и $L(u)$, является нечетной, что отличает ее от функции, приведенной в [7]. Интегрируя выражение (2) с учетом принятой аппроксимации, получаем:

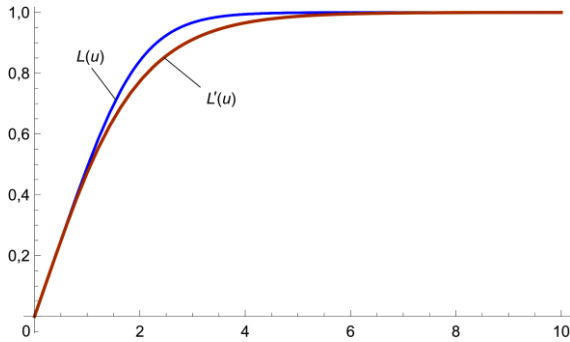


Рисунок 3 – График точного и аппроксимированного выражения $L(u)$

при $x_i < a_k$ (рисунок 4)

$$\begin{aligned}
 F_{ik} = & \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \left. \right) - \\
 & - \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] \left. \right) + \\
 & + \frac{1}{24 \times 16} h \pi^2 \left(\operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \right. \\
 & \left. - \operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \right); \tag{4}
 \end{aligned}$$

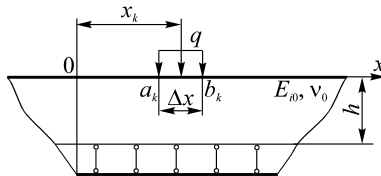


Рисунок 4 – К определению вертикальных перемещений от равномерно распределенной нагрузки

при $a_k < x_i < b_k$

$$\begin{aligned}
 F_{ik} = & \frac{2h\pi}{3} + \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \right) + \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \Bigg) + \\
 & + \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) + \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \Bigg) + \\
 & + \frac{1}{24 \times 16} h \pi^2 \left(\operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \right. \\
 & \left. - \operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \right); \tag{5}
 \end{aligned}$$

при $x_i > b_k$

$$\begin{aligned}
 F_{ik} = & \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) + \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \Bigg) - \\
 & - \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) + \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \Bigg) + \\
 & + \frac{1}{24 \times 16} h \pi^2 \left(\operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \right. \\
 & \left. - \operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \right). \tag{6}
 \end{aligned}$$

где $\operatorname{Li}_s(z)$ – полилогарифмическая функция, определяемая как бесконечный

степенной ряд, $\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ [8].

Прогибы балки находятся по формуле

$$y_{ik} = \frac{x_i^2}{6EI} (3x_k - x_i), \text{ если } x_i > x_k \text{ [1].} \quad (7)$$

Если $x_i < x_k$, то x_i и x_k следует поменять местами.

Таким образом, формируется система (1), решением которой являются неизвестные силы в связях Жемочкина, внешние силы, приложенные к балке, а также неизвестное перемещение и угол поворота.

Результаты расчета. Принимаем следующие исходные данные. Для балочной плиты: длина, ширина и толщина $L = 15$ м, $b = 1$ м, $H = 0,2$ м; упругие характеристики бетона $\nu_b = 0,17$; $E_b = 2,9 \cdot 10^4$ МПа. Для упругой полосы: $\nu_0 = 0,35$; $E_0 = 3 \cdot 10^7$ Па. Также принято $R = 1$ кН, $a_r = L/2$. Количество участков Б. Н. Жемочкина – 15. Силы вызывают одинаковые перемещения точек 2, 8, 14, координаты которых 1,5, 7,5 и 13,5 м соответственно.

На рисунках 5–8 показаны графики распределения напряжений (кПа) и перемещений (м), эпюры изгибающих моментов (кН) и поперечных сил (кН/м), полученные в программном комплексе *Wolfram Mathematica 12.2* [9, 10].

Как видно из рисунков 5, 6, наибольшие перемещения и напряжения получаются под внешними силами, значения которых при ширине балки $b = 1$ м составляют $P_2 = 0,332$ кН, $P_8 = 0,336$ кН и $P_{14} = 0,332$ кН.

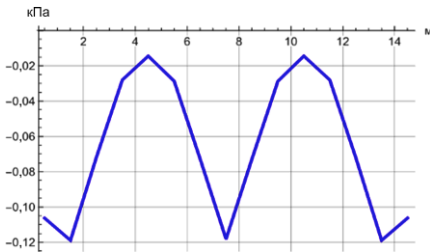


Рисунок 5 – Распределение напряжений

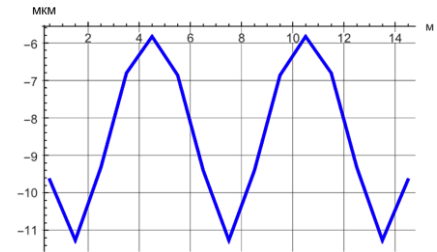


Рисунок 6 – Распределение перемещений

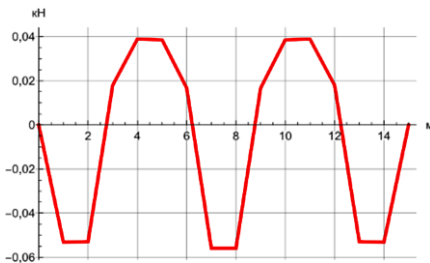


Рисунок 7 – Эпюра моментов

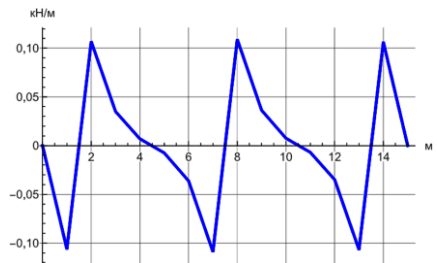


Рисунок 8 – Эпюра поперечных сил

Заключение. В работе впервые приведена методика расчета балочной плиты на упругом основании способом Жемочкина при условии расположения ряда точек плиты на одной прямой. Предлагаемая методика может быть использована для разных моделей упругого основания и произвольного числа точек, лежащих на одной прямой. Представлено выражение для нахождения перемещений упругой полосы от равномерно распределенной по участку ее поверхности нагрузки. Полученные результаты могут найти применение, в частности, при расчете ленточных фундаментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.

2 **Ding, D.** Problems in calculating the flexure of beams on elastic foundation / D. Ding // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1987. – Vol. 14, no. 4. – P. 581–584.

3 Beams and plates on elastic foundations: a review / Y. H. Wang, L. G. Tham, Y. K. Cheung // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2005. – Vol. 7, no. 4. – P. 174–182.

4 **Босаков, С. В.** Способ Б. Н. Жемочкина в задачах устойчивости стержней на упругом основании / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 4 (291). – С. 61–66.

5 Converging of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method / V. A. Pshenichkina [et al.] // Actual Issues of Mechanical Engineering (AIME 2018) : Proceedings of the International Conference // Advances in Engineering Research. – 2018. – Vol. 157. – P. 520–523.

6 **Ворович, И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974. – 456 с.

7 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.

8 **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

9 **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК-Пресс, 2009. – 624 с.

10 **Половко, А. М.** Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб. : БХВ-Петербург. – 2007. – 368 с.

S. V. BOSAKOV¹, Y. N. KOTOV²

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

²Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus

STATIC CALCULATION OF A BEAM PLATE ON AN ELASTIC BASE UNDER THE CONDITION OF LIMITATIONS ON THE SLAB MOTIONS

The article deals with the static calculation of a beam plate on an elastic base by the method of B. N. Zhemochkin under the condition of limitations on some plate motions. There is considered the case of planar deformation for the strip foundation, when a number of points of the beam foundation plate are on one straight line. There is shown an example of the beam plate calculation on an elastic layer with three points of the plate lying on the same straight line.

Keywords: beam plate, plate displacement, Zhemochkin's method, elastic layer.

Получено 26.07.2021