случае могут исследоваться параметры колебаний электромагнитных и других волн, пропускаемых на различных уровнях поперечного сечения рельса и изменяющих свои характеристики при различных значениях внутренних сжимающих или растягивающих напряжений в рельсе.

Список литературы

1 *Жогаль С. И., Жогаль С. П.* Исследование стохастических колебаний квазилинейных колебательных систем: Учеб. пособие. – Гомель: ГГУ, 1997.– 96 с.

2 *Жогаль С. П., Жогаль С. И.* Об интегрируемости уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием// Известия вузов «Прикладная нелинейная динамика». – 1996. – Т. 4. – №6. – С.92–99.

3 *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Навукова думка, 1971. – 440 с.

4 *Вериго М. Ф., Коган А. Я.* Взаимодействие пути и подвижного состава. – М.: Транспорт, 1986.– 559 с.

5 *Жогаль С. П., Жогаль С. И., Ващенко С. А.* Исследование установившихся колебаний в системе с одной степенью свободы методом канонических разложений: Тезисы докладов международной математической конференции/ Еругинские чтения, VI. 1999. Ч. 4.2. – С. 21–22.

6 *Ващенко С. А.* Исследование собственных нелинейных колебаний балок с учётом стохастичности параметров: Сб. студ. науч. работ; Вып. 4/ Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель, 1998. – С. 23–29.

Получено 15.04.2002

Sv. Zhogal, V. Matvecov, S. Vaschenko. The research of the emergency oscillations of girders, that have an endless long and be lie on uniform elastic foundation.

In this article considers about the ways of the research of emergency accidental oscillations of girders, that are on the asymptotic methods of the nonlinear mechanics, mathematical apparatus of the theory of diffusion processes and equations of Kolmogorov-Fokker-Plank (KFP). And also considers the prospects application this methods for researches of oscillation of the butt-weld rails as the girders, that have an endless long and be lie on of the unbroken elastic foundation and drawing in oscillation processes because of the interaction with rolling stock.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2002. № 1 (4)

УДК 621.396.67

В. Н. МИЗГАЙЛОВ, доктор физико-математических наук; Д. Н. ЗЕЛИНСКИЙ, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТИВНЫЙ СИНТЕЗ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЯ РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ

Рассматриваются оптимальные алгоритмы решения задач синтеза излучающих систем любой физической природы по заданной диаграмме направленности, когда операторы задачи построены экспериментально и на решения накладываются технические ограничения. Задачи практического синтеза рассматриваются как некорректные задачи математической физики. Даются оценки точности решения задачи синтеза.

Современные транспортные системы связи ориентируются на использование спутниковых радиоканалов. Спутниковые каналы требуют применения специальных мобильных антенн. Типы этих антенн и принципы их построения могут быть различными: это классические параболические антенны, активные фазированные антенные решетки и наиболее дешевые и практичные антенны, построенные на принципах радиоголографии [1,2]. Для любого вида антенн в спутниковых системах связи требуется получение остронаправленных диаграмм с различными ограничениями на параметры. Желательно такие антенны проектировать с учетом этих требований. Это приводит к необходимости решения практических задач синтеза антенн с оптимальными характеристиками.

Задачи практического синтеза систем излучателей в неоднородном пространстве не имеют аналитического решения в общем случае, так как это связано с разрешимостью дифракционных задач. Однако известен подход [1], когда можно в операторной форме записать обобщенное уравнение задачи синтеза в виде

$$U\bar{I} = \bar{F}, \qquad (1)$$

где U – прямой оператор задачи, устанавливающий соответствие между источниками излучения

$\bar{I}$ и полем $\bar{F}$ в дальней зоне. Для однородного линейного пространства U – линейный оператор, а для неоднородных пространств U – линейный или нелинейный оператор, в зависимости от свойств этого пространства.

Вопросы разрешимости уравнения (1) в математике детально изучены для линейных операторов. В технике осложнения начинаются с того, что произвольно заданная функция требуемой диаграммы направленности (д. н.) $\bar{F}_0$ может не принадлежать пространству реализуемых диаграмм. При практической реализации, когда необходимо учесть реальную электродинамическую ситуацию, прямой оператор задачи $\tilde{U}$ строится экспериментально. Любые измерения выполняются с погрешностью. Следовательно, в уравнении (1) знак равенства не является строгим. В этом случае решение уравнения (1) рассматривается как некорректная задача математической физики, поэтому решение задачи синтеза всегда является приближенным [3].

При создании радиоголографических антенн экспериментально исследуется дифракционная структура электромагнитного поля на объекте, где будет размещена антенна. Таким образом, координаты размещения излучателей определяются по результатам измерений. Следовательно, прямой оператор задачи U известен приближенно. И все ранее высказанные утверждения о свойствах уравнения (1) остаются в силе и для радиоголографических антенн [4].

Постановка задачи. Задано требуемое поле излучения $\bar{F}_0(\bar{r}_0)$. Имеется система из $n \geq 2$ излучателей любой физической природы, образующих антенную решетку, размещенную в неоднородном пространстве. Ограничимся случаем, что физические свойства среды размещения излучателей изотропны и линейны, т. е. не зависят от напряженности полей излучателей. В этом случае оператор U в уравнении (1) линеен и представляет из себя комплекснозначную матрицу размерности n х M, где M – число отсчетов в измеренной д.н. $\bar{F}_i$ реального i -го излучателя или заданной д. н. $\bar{F}_0$. Обычно $M \geq 2ka+1$, где ka – число длин волн диапазона излучения, укладывающееся на периметре максимального круга радиуса а, охватывающего объект.

Очевидно, что в этом случае знак равенства в уравнении (1) справедлив с точностью до погрешностей измерения δU элементов оператора U.

Необходимо найти амплитуды и фазы сигналов на входных клеммах излучателей, которые реализуют наилучшее среднеквадратичное приближение Δ^2 к требуемому полю излучения $\bar{F}_0$:

$$\left\| \frac{\bar{F}_p}{\|\bar{F}_p\|} - \frac{\bar{F}_0}{\|\bar{F}_0\|} \right\|^2 = \Delta^2. \tag{2}$$

1 Регуляризированные статистические методы решения задач синтеза систем излучателей. Положение и число излучателей системы задано. Под решением уравнения (1) задачи синтеза в рассматриваемой постановке, когда используется матричный приближенный и экспериментально построенный оператор $\tilde{U}$, будет пониматься математическое ожидание величины $M(\bar{I})$, взятое из некоторого статистического ансамбля решений с априорно заданной плотностью вероятности $\omega(\bar{I}\lambda)$ и параметром регуляризации λ, отвечающим наложенным физически обоснованным ограничениям на характер решения.

Требуемую д. н. $\bar{F}_0(\bar{r}_0)$ зададим как комплекснозначную случайную функцию в m фиксированных направлениях, со среднеквадратичными некоррелированными ошибками σ, распределенными по нормальному закону. Тогда уравнение (1) заменяется его дискретным аналогом в каждом из m направлений

$$\sum_n \dot{U}_{mn}\dot{I}_n = \dot{F}_{0m}. \tag{3}$$

Полагаем, что матрица оператора $\tilde{U}$ состоит из амплитуд $|\dot{F}_{mn}|$ и фаз Ψ_{mn} индивидуальных д.н. источников с независимыми среднеквадратичными ошибками по амплитуде σ_A и фазе σ_Ψ в любом из m направлений с комплекснозначными ошибками, распределенными по нормальному закону.

Статистическая регуляризация. Используя нормальный закон распределения погрешностей $\delta\bar{F}_0$ требуемой д.н., найдем условную вероятность того, что при данном n-мерном случайном векторе $\bar{I}$ в результате расчетов будет получен m-мерный вектор $\bar{F}$:

$$\omega\left(\frac{\bar{F}}{\bar{I}}\right) = \prod_m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} \exp\left\{ -\frac{(\dot{F}_{0m} - \sum_n \dot{U}_{mn}\dot{I}_n)^2}{2\sigma_m^2} \right\}. \tag{4}$$

Если ввести диагональную матрицу ошибок C с матричными элементами

$$C_{mn} = \frac{1}{\sigma_m^2}\delta_{mn}; \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & при \quad m = n \\ 0 & при \quad m \neq n \end{cases},$$

то соотношение (3) может быть в комплексной форме записано в виде

$$\omega(\frac{\bar F}{\bar I})=\frac{1}{\sigma_1\ldots\sigma_m\sqrt{(2\pi)^m}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar I,A\bar I)+\frac{1}{2}(\bar a,\bar I)\right\},\quad(5)$$

где $\bar a=\tilde U*C\bar F_0$, $A=\tilde U*C\tilde U$, $\tilde U*$ – оператор, сопряженный прямому оператору задачи $\tilde U$.

Таким образом, случайные характеристики требуемой д. н. $\bar F_0\,(\bar r_0)$ известны. Применяя байесову оценочную стратегию, можно ввести априорное распределение $\omega_\alpha(\bar I)$ для неизвестного $\bar I$ и вычислить апостериорное распределение

$$\omega\;(\frac{\bar I}{\bar F},\alpha).$$

В выражении для $\omega\;(\frac{\bar I}{\bar F},\alpha)$ надо задать априорную функцию $\omega_\alpha(\bar I)$, но так, чтобы она была удобна для расчетов и отражала характер выбранных ограничений на решение уравнения (5), вносила минимум информации, кроме той, которая содержится в ограничении. Такая функция имеет вид

$$\omega_\alpha(\bar I)=C_\alpha\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\bar I,E\bar I)\right\},\quad(6)$$

где $C_\alpha=\sqrt{\frac{\alpha^n}{(2\pi)^m}}$ выбирается из условия нормировки, а величина $\alpha=\frac{N^2}{R^2}$ (здесь N – число излучателей, R^2 – ограничение решения по норме). Все это дает окончательное выражение для

$$\omega(\frac{\bar I}{\bar F},\alpha)=\sqrt{\frac{\det(A+\alpha E)}{(2\pi)^n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar I,[A+\alpha E]\bar I)+\frac{1}{2}(\bar a,\bar I)\right\}.\quad(7)$$

Используя известные результаты из теории вероятностей, находят математическое ожидание искомого вектора $\bar I$ в виде

$$M(\bar I)=(\tilde U*C\tilde U+\alpha E)^{-1}\tilde U*C\bar F_0,\quad(8)$$

где $i=1,2,\ldots N$, E – единичный оператор.

Среднеквадратичная ошибка δI_i определяется диагональным элементом соотношения

$$\delta I_i=\sqrt{(\tilde U*C\tilde U+\alpha E)^{-1}_{ii}}.\quad(9)$$

Отклонение реализуемой д. н. от заданной $\bar F_0$ в каждом из фиксированных направлений $\bar r_m^0$

$$\begin{gathered}\delta\bar F_0(\bar r_m^0)=\delta U(\bar I+\delta\bar I)+U\delta\bar I,\quad(\delta F_p)_m=\\=\sum_n\delta\dot F_{mn}\dot I_n+\sum_n\delta\dot F_{mn}\delta I_n+\sum_n\dot F_{mn}\delta\dot I_n\end{gathered}\quad(10)$$

Ошибками δI_i определяются технические допуски на изготовление излучателей, а суммирование $|\delta F_{pm}|^2$ дает Δ^2.

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза антенн без ограничений на решение. Из соотношения (8) следует, что решение задачи синтеза может быть представлено в спектральной форме

$$\bar I_\alpha=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\tilde U*\bar F_0)_n}{\lambda_n+\alpha_n}\bar g_n,\quad(11)$$

где $\tilde U*$ – оператор, сопряженный прямому оператору, известен приближенно; λ_n – собственные значения оператора $\tilde U*\tilde U$; $\bar g_n$ – собственные векторы оператора $\tilde U*\tilde U$; α_n – параметр регуляризации по каждой из собственных гармоник.

Решение вида (11) позволяет ставить задачу наилучшего среднеквадратичного приближения решения $\bar I_\alpha$ к решению, если бы задача решалась с точно заданным оператором, что эквивалентно минимизации математического ожидания величины

$$M(\|\bar I_\alpha-\bar I\|^2)\to\min,\quad(12)$$

где $\bar I=\sum_{n=1}^{N}\frac{(U*\bar F_0)_n}{\lambda_n}\bar g_n$ – точное решение, $U*$ – точный оператор.

Оптимальные параметры λ_n^0 находятся из условия $(\partial T(\lambda)/\partial\lambda)=0$ и являются корнями кубического уравнения [1]

$$\begin{gathered}\lambda_n^3f_n^2+\alpha_n^2\lambda_n[2f_n^2-\beta_n^2-\gamma_n^2f_n^2]+\\ \alpha_n[\lambda_n^2(f_n^2-2\beta_n^2)+3\sigma_n^2f_n^2-2\gamma_n^2\lambda_n^2+\\+3f_n^2\lambda_nr_n]-\lambda_n[\lambda_n^2\beta_n^2+3f_n^2\sigma_n^2+\\+\gamma_n^2f_n^2\lambda_n^2-3f_n^2\lambda_nr_n]=0,\end{gathered}\quad(13)$$

где

$$\begin{gathered}f_n=(\bar U*\bar F)_n;\ \beta_n^2=M(\delta f_n)^2;\ \sigma_n^2=\\=M(\delta\lambda_n)^2;\ \gamma_n^2=\sum_kM(\Delta\xi_{kn})^2;\end{gathered}$$

$\Delta\xi_{kn}$ – погрешности составляющих собственного вектора $\tilde U*\tilde U$; $\Delta g_n=\sum_k\Delta\xi_{kn}g_k$.

Оптимальный параметр α_n^0 в этом случае может быть взят равным [4]

$$\alpha_n^0=\lambda_n(\frac{\beta_n^2}{f_n^2}+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}-3\frac{r_n}{\lambda_n}+\gamma_n^2).\quad(14)$$

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза с ограничением на норму решения. Минимизацию функционала (12) рассмотрим при ограничении нормы решения

$$\|\bar I\|^2\le R^2.\quad(15)$$

Выражение для математического ожидания нормы $\|\bar{I}\|^2$

$$M(\alpha)=M(\|\bar{I}\|^2)=\sum_{n=1}^{N} M_n(\alpha_n),$$

где

$$M_n(\alpha_n) = \frac{f_n^2+\beta_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}+\frac{3\sigma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^4}+ \\ +\frac{\gamma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}-\frac{2r_n f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^3}. \quad (16)$$

Для регуляризированного решения уравнения (4) в выражении (15) знак неравенства заменяется на равенство. Тогда задача минимизации функционала (12) идет при ограничении (15) вида

$$M(\alpha)=\sum_n M_n(\alpha_n)=R^2. \quad (17)$$

Применяя метод множителей Лагранжа, находим минимум функционала

$$\Phi(\alpha)=T(\alpha)+tM(\alpha). \quad (18)$$

Из условий $\partial\Phi(\alpha)/\partial\alpha_n=0$, $n=1,2,\ldots$ вытекает, что параметры регуляризации α_n для решения задачи с ограничением являются корнями следующих кубических уравнений:

$$\lambda_n^3 f_n^2+\alpha_n^2\lambda_n[2f_n^2-\beta_n^2-\gamma_n^2 f_n^2-tf_n^2-t\beta_n^2-t\gamma_n^2 f_n^2]+ \\ +\alpha_n[\lambda_n^2 f_n^2-2\beta_n^2\lambda_n^2+3\sigma_n^2 f_n^2-2\gamma_n^2\lambda_n^2 f_n^2+3f_n^2\lambda_n r_n- \\ -2tf_n^2\lambda_n^2-2t\beta_n^2\lambda_n^2-2t\gamma_n^2 f_n^2\lambda_n^2+3tf_n^2\lambda_n r_n]- \\ -\lambda_n(\beta_n^2\lambda_n^2+3\sigma_n^2 f_n^2+\gamma_n^2\lambda_n^2 f_n^2-3f_n^2\lambda_n r_n+tf_n^2\lambda_n^2+ \\ +t\beta_n^2\lambda_n^2+t\gamma_n^2 f_n^2\lambda_n^2-3tf_n^2\lambda_n r_n+6t\sigma_n^2 f_n^2)=0. \quad (19)$$

При $t = 0$ уравнение (18) превращается в (13), что соответствует частному случаю решения (11) без ограничения.

Помимо уравнений (19) параметры регуляризации задачи с ограничением удовлетворяют также соотношению

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{f_n^2+\beta_n^2+\gamma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}+\frac{3\sigma_n^2 f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^4}-\frac{2r_n f_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^3}\right)=R^2. \quad (20)$$

В работе [5] показано, что для вычисления параметров регуляризации α_n в задаче с ограничением справедлива приближенная формула

$$\alpha_n \cong \lambda_n\left(\frac{\beta_n^2}{f_n^2}+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}+\gamma_n^2-3\frac{r_n}{\lambda_n}+t\right), \quad (21)$$

где $t > 0$ находится из соотношения

$$\sum_{n=1}^{N} f_n^2\left[\lambda_n^2\left(1+\frac{\beta_n^2}{\lambda_n^2}+\gamma_n^2+3\frac{\sigma_n^2}{\lambda_n^2}-3\frac{r_n}{\lambda_n}+t\right)^2\right]^{-1}=R^2. \quad (22)$$

Итак, регуляризированные решения уравнения (1) имеют вид (11), в котором параметры регуляризации α_n берутся в виде (21).

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза антенн с минимальной погрешностью приближения реализуемой диаграммы от заданной при ограничении полной мощности антенны. Рассмотрим постановку задачи в форме, удобной для практического применения, когда желательно наилучшим образом воспроизвести требуемую д. н. антенны и получить реализуемое распределение сигналов возбуждения по излучателям.

Математическая задача формулируется в виде

$$M(\|\tilde{U}\bar{I}_\alpha-\bar{F}_0\|^2)\to\min, \quad (23)$$

при условии

$$M(\|\bar{I}_\alpha\|^2)\le R^2. \quad (24)$$

В силу свойств скалярного произведения выражение (23) может быть записано в форме

$$M(\|\tilde{U}\bar{I}_\alpha-\bar{F}_0\|^2)= \\ =M(\bar{I}_\alpha,(\tilde{U}^*\tilde{U}\bar{I}_\alpha-2\tilde{U}^*\bar{F}_0))+M(\bar{F}_0\bar{F}). \quad (25)$$

Откуда следует, что поставленная задача эквивалентна максимизации функционала

$$c=M(\bar{I}_\alpha,(2\tilde{U}^*\bar{F}_0-\tilde{U}^*\tilde{U}\bar{I}_\alpha)\to\max,$$

при условии $d=M(\|\bar{I}_\alpha\|^2)=R^2$.

Составляя функцию Лагранжа задачи $\Phi = c + td$, находим выражение системы уравнений для определения $2n$, $n = 1, 2 \ldots N$ из условия $\partial\Phi/\partial\alpha_n=0$. Учитывая, что для дискретной антенной системы практически всегда все $\alpha_n\ne 0$, а параметры α_n достаточно малы, тогда $\alpha_n^{\ 3}$ и $\alpha_n^{\ 2}$ исключаем и для каждого n-го параметра регуляризации

$$\alpha_n=\frac{-t}{\left[1+\frac{2t}{\lambda_n}\frac{1+(\beta_n/f_n)^2}{1+(\beta_n/f_n)^2+6(\sigma_n/\lambda_n)^2}\right]}. \quad (26)$$

Подставляя α_n из (26) в условие (24), находим t из уравнения

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{f_n^2+\beta_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^2}+\frac{3f_n^2\sigma_n^2}{(\lambda_n+\alpha_n)^4}\right)=R^2. \quad (27)$$

Оптимальная статистическая регуляризация решения задачи синтеза антенн при ограничениях на величину отклонения реализуемой д. н. от заданной при минимуме полной мощности излучения. Эта постановка задачи близка по физическому смыслу к рассмотренной задаче синтеза антенны с оптимальной статистической регуляризацией решения, когда ограничена полная мощность (но не минимальна) и отыскивается такое распределение $\bar{I}_\alpha$, которое минимизирует Δ^2 ошибку приближения реализуемой д.н. к заданной д.н. Сейчас же необходимо задать ограничение на Δ^2 и минимизировать (а не фиксировать) полную мощность в антенне.

Итак, необходимо найти

$$d = M(\|\bar{I}_\alpha\|^2) \to \min, \tag{28}$$

если

$$c = M(\|\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0\|^2) \le \Delta_0^2. \tag{29}$$

Преобразуя (29) к виду

$$M(\|\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0\|^2) = M((\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}), (\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0)) =$$

$$= M(\bar{I}_\alpha, (\widetilde{U}^*\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - 2\widetilde{U}^*\bar{F}_0)) + M(\bar{F}, \bar{F}_0) \le \Delta_0^2.$$

Поэтому минимизация d из (28) выполняется при условии равенства

$$l = M(\bar{I}_\alpha, (\widetilde{U}^*\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - 2\widetilde{U}^*\bar{F}_0)) \le \delta_1^2,$$

где $$\delta_1^2 = M(\|\ \bar{F}_0{}^2\ \|) - \Delta_0^2. \tag{30}$$

Подставляя в (28) $\bar{I}_\alpha$, представленное в стандартной форме

$$\bar{I}_\alpha = \sum_n \left(\frac{(\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n}{\lambda_n + \alpha_n}\bar{g}_n\right) =$$

$$= \sum_n \frac{(U^*\bar{F}_0)_n + \delta(U^*\bar{F}_0)_n}{\lambda_n + \delta\lambda_n + \alpha_n}(\bar{g}_n + \delta\bar{g}_n), \tag{31}$$

получим

$$d = \sum_n \left(\frac{(\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n^2 + \beta_n^2}{(\lambda_n + \alpha_n)^2} + 3\frac{\sigma_n^2(\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n^2}{(\alpha_n + \lambda_n)^4}\right).$$

Так как

$$\widetilde{U}^*\bar{F}_0 = \sum_n (\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n g_n, \quad \widetilde{U}^*\widetilde{U}\bar{I}_\alpha = \sum_n \frac{\lambda_n(\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n}{\lambda_n + \alpha_n} g_n.$$

Величина

$$l = \sum_n \left(\frac{((\widetilde{U}^*\bar{F}_0)^2{}_n + \beta_n^2)(\lambda_n + 2\alpha_n)}{(\lambda_n + \alpha_n)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\sigma_n^2(\widetilde{U}^*\bar{F}_0)_n^2}{(\alpha_n + \lambda_n)^3} - \frac{3\sigma_n^2 f_n^2 \lambda_n}{(\alpha_n + \lambda_n)^4}\right).$$

Для решения задачи синтеза запишем функцию Лагранжа $\Phi = d + tl$ и, приравняв к нулю частную производную от $\partial\Phi/\partial\alpha_m$, получим следующие практические уравнения для определения α_n:

$$\alpha_n^3[t(f_n^2 + \beta_n^2)] + \alpha_n^2[f_n^2 + \beta_n^2] + 2t(f_n^2 + \beta_n^2)\lambda_n] +$$

$$+ \alpha_n[2\lambda_n(f_n^2 + \beta_n^2) + 6t\sigma_n^2 f_n^2 + t\lambda_n^2(f_n^2 + \beta_n^2)] + \tag{32}$$

$$+ [(\beta_n^2 + f_n^2)\lambda_n^2 + 6\sigma_n^2 f_n^2] = 0.$$

Определив из этих уравнений параметры регуляризации α_n, $n = 1, 2, \ldots$ как функции параметра t, параметр t находим из условия (30).

При малых заданных значениях Δ_n^2 погрешности воспроизведения требуемой д.н. будут малы и параметры α_n, тогда величинами α_n^2 и α_n^3 можно пренебречь. Для определения α_n получаем

$$\alpha_n = -\frac{1}{\left[t + \dfrac{2\lambda_n^2(f_n^2 + \beta_n^2)}{(\lambda_n^2(f_n^2 + \beta_n^2) + 6\sigma_n^2 f_n^2)}\right]}. \tag{33}$$

Подставляя α_n в уравнение (30), найдем t, которые подставляются в α_n, что обеспечивает вычисление параметров регуляризации зависящих от погрешностей данных и введенных ограничений.

Другие постановки решения задач синтеза при оптимальной статистической регуляризации. Рассмотрим две задачи синтеза антенн:

1 ***Получение максимального коэффициента усиления от антенной системы при ограничениях погрешности воспроизведения требуемой д. н. и ограничении полной мощности.*** Найдем максимум КУ в направлении Θ_0

$$КУ = 4\pi M(\|\widetilde{U}\bar{I}_\alpha(\Theta_0)\|^2) / M(\|\bar{I}_\alpha\|^2) \to \max. \tag{34}$$

При ограничениях на полную мощность $d = M(\|\bar{I}_\alpha\|^2) \le R^2$ и погрешность вопроизведения требуемой д. н. $c = M(\|\widetilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0)\|^2) \le \Delta_0^2$. Известно, что максимуму КУ требуется функция $\bar{F}_0(\Theta_0)$, близкая дельта-функции $\bar{\delta}_0(\Theta_0)$.

Тогда

$$\|\widetilde{U}\bar{I}_\alpha(\Theta_0)\|^2 = (\widetilde{U}\bar{I}_\alpha(\Theta_0), \delta(\Theta_0)) =$$

$$= (\bar{I}_\alpha(\Theta_0), \widetilde{U}^*\delta(\Theta_0)) \cong (\bar{I}_\alpha, \bar{\varphi});$$

$$\bar{\varphi} = \widetilde{U}^*\bar{F}_{об}.$$

Величина КУ может быть записана в виде $КУ = 4\pi M(I_\alpha, \bar{\varphi}) / M(\|\bar{I}_\alpha\|^2)$.

И, обозначив $M(I_\alpha, \overline{\varphi}) = a$, приходим к следующей постановке исходной задачи $a = M(I_\alpha, \overline{\varphi}) \to \max$, при

$$d = M(\|\bar{I}_\alpha\|^2) \le R^2,\ c = M(\|\tilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0\|^2) \le \Delta_0^2. \quad (35)$$

Считая, что максимум достигается при $d = R^2$, запишем функцию Лагранжа задачи в виде $\Phi(a) = a + td + sc$ и приравняем нулю ее частные производные по α_n:

$$\partial\Phi(\alpha)/\partial\alpha_n = 0.$$

Это приведет к системе кубических уравнений для $\alpha_n\ (t, s)$. Решая эти системы и выражая функционалы d и c через параметры t и s, получим систему двух уравнений:

$$d(t, s) = R^2;$$
$$c(t, s) = \Delta^2. \quad (36)$$

Из этой системы уравнений находятся параметры t и s, которые подставляются в выражения для α_n.

Учитывая то обстоятельство, что Δ_0^2 обычно мало, то рабочая формула для параметров α_n имеет вид

$$\alpha_n = \frac{\left(\frac{\varphi_m}{f_n}\right)\left[1+3\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right] + \frac{3t}{\lambda_n}\left[1+\left(\frac{\beta_n}{f_n}\right)^2 + 6\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right]}{\left(\begin{array}{c} 2s\left[1+\left(\frac{\beta_n}{f_n}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right] - \\ -\frac{3}{\lambda_n}\left(\frac{\varphi_m}{f_n}\right)\left[1+\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right] - \frac{4t}{\lambda^2{}_n}\left[1+\frac{\beta^2{}_n}{f^2{}_n}\right]\end{array}\right)}, \quad (37)$$

где $\varphi_n = (\overline{\varphi}, \overline{g}_n)$, т.е. представлена через собственные функции оператора $\tilde{U} * \tilde{U}$.

Анализ изменения параметров α_n при фиксированных t или s позволяет получить еще более простые приближенные соотношения для

$$\alpha_n = \frac{\left(\frac{\varphi_m}{f_n}\right)\left[1+3\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right]}{2s\left[1+\left(\frac{\beta_n}{f_n}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)^2\right]} \quad (38)$$

и находить параметр S из условия $c(s) = \Delta^2$, тогда решение задачи имеет вид

$$\bar{I}_\alpha = \sum_n \left(\frac{(\tilde{U} * \bar{F}_0)_n}{\lambda_n + \alpha_n(s)}\right)\bar{g}_n. \quad (39)$$

2 *Синтез антенной системы с максимальной величиной коэффициента полезного излучения.* Коэффициент полезного излучения характеризует энергетическую обеспеченность системы [1]:

$$\beta = |\ \tilde{U}\bar{I}_\alpha\bar{F}_0\ |^2 \ / \ (\|\bar{F}_0\|^2 \|\bar{I}_\alpha\|^2). \quad (40)$$

Его максимизация целесообразна при ограничениях на полную мощность $\|\bar{I}_\alpha\|^2 \le R^2$ и точность воспроизведения требуемой д. н. $\|\ \tilde{U}\bar{I}_\alpha - \bar{F}_0\ \|^2 \le \Delta_0^2$. Сохраняя прежние обозначения, запишем

$$\beta = M|\ \tilde{U}\bar{I}_\alpha\bar{F}_0\ |^2 \ / \{\ M(\|\bar{F}_0\|^2) M(\|\bar{I}_\alpha\|^2)\ \} \to \quad (41)$$
$$\to \max, \text{при}\ d \le R^2, c \le \Delta_0^2.$$

Анализ (41) позволяет записать задачу в виде

$$a_0 = M(|\ \bar{I}_\alpha, \bar{F}_0\ |) \to \max. \quad (42)$$

При $d = M(\|\bar{I}_\alpha\|^2) = R^2$

$$l = M\{\ (\bar{I}_\alpha, (\tilde{U} * \tilde{U}\bar{I}_\alpha - 2\tilde{U} * \bar{F}_0))\ \} = \delta_1^2,$$

где $\delta_1^2 = M(\|\ \bar{F}_0\ \|^2 - \Delta_0^2)$.

Система (42) позволяет составить функционал Лагранжа $\Phi(\alpha_n) = a_0 + td + sc$.

Используя полученные результаты из разделов рассмотренных выше, получим следующие уравнения связи α_n, t, s:

$$\begin{aligned}&(f_n^2 + \beta_n^2)(\alpha_n + \lambda_n)^3 + \sigma_n^2 f_n^2(\alpha_n + \lambda_n) + \\ &+ t[2(f_n^2 + \beta_n^2)(\alpha_n + \lambda_n)^2 + 12\sigma_n^2 f_n^2] + \\ &+ s[2\alpha_n(f_n^2 + \beta_n^2)(\alpha_n + \lambda_n)^2 + \\ &+ 12\sigma_n^2 f_n^2(\alpha_n + \lambda_n) - 12\sigma_n^2 f_n^2 \lambda_n] = 0.\end{aligned} \quad (43)$$

Полагая, что α_n будут достаточно малы, если заданы малые Δ_0^2, то $\alpha_n(t, s)$ находят из соотношения

$$\alpha_n(t, s) = \frac{\left(\begin{array}{c}(f_n^2 + \beta_n^2)\lambda_n^3 + \sigma_n^2 f_n^2 \lambda_n + \\ + t[2(f_n^2 + \beta_n^2)\lambda_n^2 + 12\sigma_n^2 f_n^2]\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}3(f_n^2 + \beta_n^2)\lambda_n^2 + \sigma_n^2 f_n^2 + 4t\lambda_n(f_n^2 + \beta_n^2) + \\ + s[2\lambda_n^2(f_n^2 + \beta_n^2) + 12\sigma_n^2 f_n^2]\end{array}\right)}. \quad (44)$$

Параметры s и t находят из равенств (42). Оптимальное решение уравнения задачи синтеза имеет вид (39) с $\alpha_n(t, s)$.

Список литературы

1 *Дымский В.Н.* Об одном приближенном методе синтеза антенн // Труды Казанского авиационного института. – 1964. – Вып. 85. – С. 11 – 24.

2 *Зелинский Д.Н.* Перспективная антенна для систем скоростного доступа в Интернет // Материалы 5-й Международной научно-технической конференции, 25–27 апреля 2000 г.: В 5 ч. Ч. 4. – Гродно, 2000. – С. 143.

3 *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем : Теория и методы расчета. – М.: Сов. радио, 1974. – 232 с.

4 *Савелова Т.И.* Об оптимальной регуляризации операторных уравнений с погрешностями в задании оператора и правой части // АН СССР. Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1977. – Т7. – № 6. – С. 1579 – 1583.

5 *Мизгайлов В.Н., Мухин В.В., Романов В.А.* Об оптимальной статистической регуляризации операторных уравнений с ограничением на норму решения // АН СССР, Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – № 4. – С. 1036 – 1040.

Получено 25.04.2002

V. N. Mizgaylov, D. N. Zelinski. Optimum constructive synthesis radiating systems, including radioholographic.

The optimum algorithms for decision tasks of synthesis radiating systems any physical type under the given orientation diagram are considered, when the task operators are constructed experimentally and on the decisions the technical restrictions are imposed. The tasks of practical synthesis are considered as incorrect tasks of mathematical physics. The estimations of accuracy of the task synthesis decision are given.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2002. № 1 (4)

УДК 656. 071.13

С. А. ПОЖИДАЕВ, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ ЗЕМЛЯНЫХ МАСС В ПРОЕКТАХ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАНИРОВКИ ТРАНСПОРТНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Предлагается использовать сплайновый метод для автоматизации расчетов земляных масс в проектах вертикальной планировки сооружений транспортных коммуникаций, в основе которого лежит применение интеграционных свойств кубического сплайна на регулярной сетке GRID – модели.

В современных рыночных условиях хозяйствования требования к проектным решениям при разработке вертикальной планировки инженерных сооружений значительно возросли. Во избежание финансовых потерь проектных организаций и заказчиков методы расчета объемов земляных работ должны быть надежными, обеспечивать заданную точность расчета, полученные значения должны неоднократно проверяться с использованием альтернативных методов. Автоматизация расчетов объемов земляных работ позволяет рассмотреть большое количество проектных вариантов и получить оптимальные параметры проектов.

При проектировании вертикальной планировки транспортных коммуникаций могут применяться следующие методы определения объемов земляных работ: *метод горизонтальных профилей, метод изолиний рабочих отметок, метод квадратов, метод треугольных призм, метод поперечных профилей, метод квадратов с аппроксимацией естественного рельефа поверхностями n–порядка*. Все они являются проверенными, надежными методами ручного счета. Опыт их использования позволяет сделать следующие выводы:

1 Основными методами расчета объемов земляных работ при проектировании вертикальной планировки являются метод квадратов и его модификации (проектирование площадных сооружений) и метод поперечных профилей (проектирование линейных сооружений). Не выяснено, каковы основные источники погрешностей определения объемов земли по ним.

2 Опыт применения указанных методов в автоматизированных системах показывает, что простое копирование технологии ручного расчета создает значительные трудности при разработке программ (практически невозможно формализовать все различные ситуации, которые могут встретиться при расчетах). Применяемые при этом формулы основаны на линейной интерполяции отметок промежуточных точек и на правилах элементарной геометрии.

3 Для повышения точности расчетов используют нелинейные функции, которые поддаются интегрированию, однако применение таких функций сопровождается рядом серьезных недостатков.

4 На основе регулярной двухмерной сплайновой математической модели местности (GRID– и TIN–модели) и интегральных вычислений в автоматизированных системах может быть применен сплайновый метод расчета объемов земляных работ. Сплайн–функции хорошо дифференцируются