

3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

4 Starovoirov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoirov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

5 Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

6 Starovoirov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoirov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.

7 Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoirov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, no. 9. – P. 1196–1203.

8 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

9 Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12. – С. 152–157.

10 Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т. 33, № 4. – С. 53–57.

11 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 127–133.

12 Moskvitin, V. V. Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V. V. Moskvitin, E. I. Starovoirov // Mechanics of Composite Materials. – 1985. – Vol. 21, no. 3. – P. 267–273.

13 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

14 Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

15 Ильюшин, А. А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. – М. : Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ

*Московский авиационный институт (Технический университет), Российская Федерация*

Общие подходы к исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых элементов конструкций при динамических нагрузках разработаны в монографиях [1–3]. Колебания трехслойных пластин исследовались в [4–6]. Нестационарное нагружение трехслойных оболочек изучалось в работе [7–10]. Статьи [11–16] посвящены исследованию квазистатического деформирования трехслойных пластин и оболочек.

Здесь рассматриваются собственные колебания упругой трехслойной круговой пластины, обусловленные воздействием нестационарного температурного поля. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Для тонких внешних несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого наполнителя справедлива гипотеза Тимошенко. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы.

Физические соотношения для материалов слоев учитывают воздействие стационарного температурного поля  $T(t)$ :

$$s_{\alpha\beta}^k = 2G_k^* \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \quad \sigma^k = 3K_k (\varepsilon^k - \alpha_k T),$$

где  $G_k(T_k), K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования.

Система уравнений пластины следует из вариационного принципа Лагранжа с учетом сил инерции:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) &= 0, & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned}$$

где  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Для описания прогиба рассматриваемой пластины, закрепленной по контуру, при поперечных колебаниях вводится система собственных ортонормированных функций  $v_n \equiv v(\beta_n, r)$ :

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right],$$

где  $\beta_n$  – собственные числа,  $d_n$  – нормировочные коэффициенты.

Решение дифференциальных уравнений собственных колебаний будет

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t),$$

где система функций  $\varphi_n(r)$ , функции времени  $T_n(t)$  и температурный момент  $M_t$  следующие:

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} (I_1(\beta_n r_1) r - I_1(\beta_n r)) \right],$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau,$$

$$M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k \int_{h_k} T z dz.$$

Численные результаты для пластины единичного радиуса ( $r_0 = 1$ ), заземленной по контуру, получены в случае материалов слоев Д16-Г–фторопласт-4–Д16-Г. Зависимости характеристик материалов слоев от температуры описывались формулой Белла. Предполагалось, что вся пластина прогревается равномерно до заданной температуры. Наблюдалось, что нагревание пластины на 100 °С приводит к уменьшению частот на 3,6 %, при нагревании на 200 °С – уменьшение 7 %.

**Выводы.** Предложенная механико-математическая модель позволяет учитывать влияние температурного поля на динамические характеристики свободных колебаний трехслойных упругих круговых пластин. Численные результаты показали, что собственные числа и частоты колебаний при стационарном температурном поле слабо зависят от температуры. Собственные частоты основного тона колебаний существенно зависят от толщины несущих слоев, увеличиваясь вместе с их ростом. При увеличении толщины заполнителя эти частоты слабо убывают.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T20P-047).*

#### Список литературы

- 1 Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 540 с.
- 2 Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Бел. наука, 2017. – 275 с.
- 3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
- 4 Starovoirov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoirov, D. V. Leonenko, A. V. Yaroyaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.
- 5 Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52. – № 5. – С. 943–954.
- 6 Starovoirov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoirov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.
- 7 Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoirov, A. V. Yaroyaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, no. 9. – P. 1196–1203.
- 8 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.
- 9 Вестяк, В. А. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 130–140.
- 10 Старовойтов, Э. И. Исследование решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей колебания трехслойной вязкоупругой оболочки / Э. И. Старовойтов, С. А. Воробьев // Известия академии наук Белорусской ССР. Серия Физико-математические науки. – 1990. – № 1. – С. 19–24.

- 11 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
- 12 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – Т. 33, № 4. – С. 53–57.
- 13 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – № 11. – С. 127–133.
- 14 **Moskvitin, V. V.** Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V. V. Moskvitin, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Composite Materials.* – 1985. – Vol. 21, no. 3. – P. 267–273.
- 15 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2016. – № 1. – С. 91–97.
- 16 **Старовойтов, Э. И.** Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* – 1989. – № 5. – С. 114–119.

УДК 539.37

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДАТЛИВОЙ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ДЕЙСТВИИ КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ

*Е. А. СТОРОЖУК*

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев*

Рассмотрим незамкнутую бесконечно длинную пологую цилиндрическую оболочку радиуса  $R$  и толщины  $h$  с шарнирно закрепленными продольными краями, изготовленную из трансверсально-изотропного материала (рисунок 1). Отнесем оболочку к криволинейной ортогональной системе

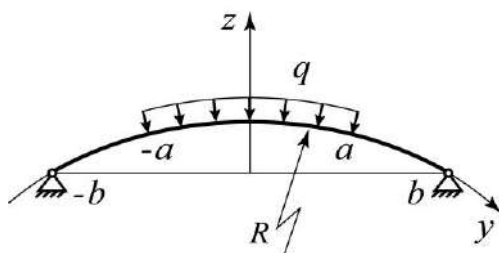


Рисунок 1 – Цилиндрическая панель под действием кусочно-равномерной нормальной нагрузки

координат  $(x, y, z)$  с началом в вершине поперечного сечения, где  $x, y, z$  – длины образующей, направляющей и нормали к срединной поверхности оболочки. Предполагаем, что оболочка имеет постоянные жесткостные характеристики и находится под действием симметричной относительно вершины нормальной поверхностной нагрузки интенсивности  $q$ , которая равномерно распределена по бесконечно длинной полосе шириной  $2a$  и приложена со стороны выпуклости оболочки.

При исследовании напряженно-деформированного состояния данного класса цилиндрических оболочек используем уравнения геометрически нелинейной теории пологих оболочек в квадратичном приближении, которая базируется на гипотезе прямой линии (учитываются деформации поперечного сдвига). В этом случае для геометрических соотношений имеем выражения:

$$\varepsilon = \frac{du}{dy} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dy} \right)^2; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{dy}; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{dy}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon, \mu, \gamma$  – компоненты деформации оболочки;  $u, w$  – тангенциальное перемещение и прогиб точек срединной поверхности оболочки;  $\vartheta$  – угол поворота нормали;  $k = 1/R$  – кривизна цилиндра.

Связь внутренних усилий ( $N, Q$ ) и момента ( $M$ ) с компонентами деформации оболочки записываем согласно закону Гука:

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad Q = D_Q \gamma; \quad D_Q = mG_{yz}h; \quad M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12. \quad (2)$$

В соотношениях (2) обозначено:  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки в плоскости изотропии;  $G_{yz}$  – модуль сдвига в плоскости поперечного сечения;  $m$  – коэффициент, который зависит от характера распределения сдвига по толщине.