УДК 539.31

ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

А. О. СЕРДЮК, Д. О. СЕРДЮК
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (НИУ),
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, Д. В. ЛЕОНЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Тонкостенные конструкции, такие как пластины, широко применяются в общем машиностроении. Динамические расчеты при проектировании перспективных новых агрегатов являются неотъемлемым этапом конструирования. Вопросы нестационарной динамики занимают особое место, поскольку в таких задачах искомое решение существенно неоднородно по координатам и времени. Теоретический и прикладной интерес представляет знание закономерностей распространения нестационарных волн, а также напряженно-деформированное состояние анизотропных пластин при ударных нагрузках, моделируемых импульсными функциями.

В настоящее время наиболее полно исследованы вопросы, посвященные нестационарной динамике изотропных пластин [1, 2], в меньшей степени ортотропных [3, 4] и анизотропных [5, 6].

В настоящей работе представлен подход численно-аналитического построения функции влияния (функций Грина) нормальных перемещений пластины. Объектом исследования является тонкая неограниченная пластина постоянной толщины h. Движение пластины рассматривается относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадет со срединной плоскостью пластины. В начальный момент времени $t = 0$ на пластину воздействует нестационарное нормальное давление $p(x_1, x_2, t)$ с переменной по координатам и времени амплитудой. Материал пластины упругий и анизотропный с симметрией относительно плоскости Ox_1x_2. Для описания движения пластины принята модель пластины Тимошенко. Упругие свойства пластины характеризуются девятью независимыми упругими постоянным C^{1111}, C^{1122}, C^{1112}, C^{2222}, C^{2212}, C^{2323}, C^{2313}, C^{1313}, C^{1212} – компонентами тензора упругих свойств материала в главных осях. Постановка задачи включает в себя уравнения движения и начальные условия.

Цель работы заключается в построении нестационарной функций влияния для нормальных перемещений в анизотропной пластине Тимошенко.

Для построения функции влияния G нормальных перемещений применены прямые и обратные интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Оригиналы функций влияния по Лапласу найдены аналитически при помощи таблиц с предварительным разложением изображений на суммы простых дробей с применением метода неопределенных коэффициентов. Для построения оригиналов по Фурье использован метод, основанный на связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале:

$$G(x_1,x_2,\tau)=\frac{1}{2(k\tau)^2}H\left(k\tau-|x_1|\right)\cdot H\left(k\tau-|x_2|\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(A(\mu_{1n},\mu_{2m})\cdot \mathrm{sh}\left(s_1(\mu_{1n},\mu_{2m})\tau\right)+$$
$$+B(\mu_{1n},\mu_{2m})\cdot \mathrm{sh}\left(s_2(\mu_{1n},\mu_{2m})\cdot\tau\right)+C(\mu_{1n},\mu_{2m})\cdot \mathrm{sh}\left(s_3(\mu_{1n},\mu_{2m})\tau\right)\Big)e^{-i(\mu_{1n}x_1+\mu_{2m}x_2)},$$

где

$$\mu_{1m}=\mu_{1m}(\tau)=\frac{\pi n}{k\tau},\ \mu_{2m}=\mu_{2m}(\tau)=\frac{\pi m}{k\tau},$$

$$A = A(q_1,q_2) = \frac{s_1^4 + R_1 s_1^2 + R_2}{2s_1\left(s_1^2 - s_3^2\right)\left(s_1^2 - s_2^2\right)}, B = B(q_1,q_2) = -\frac{s_2^4 + R_1 s_2^2 + R_2}{2s_2\left(s_1^2 - s_2^2\right)\left(s_2^2 - s_3^2\right)},$$

$$C = C(q_1,q_2) = \frac{s_3^4 + R_1 s_3^2 + R_2}{2s_3\left(s_2^2 - s_3^2\right)\left(s_1^2 - s_3^2\right)},$$

$$s_1 = s_1(q_1,q_2) = \frac{\sqrt{6U^{1/3}\left(-2R_3U^{1/3} + J_1\right)}}{6U^{1/3}}, s_2 = s_2(q_1,q_2) = \frac{\sqrt{3U^{1/3}\left(J_2 - 4R_3U^{1/3} - J_1\right)}}{6U^{1/3}},$$

$$s_3 = s_3(q_1,q_2) = \frac{\sqrt{-3U^{1/3}\left(J_2 + 4R_3U^{1/3} + J_1\right)}}{6U^{1/3}},$$

$$J_1 = J_1(q_1,q_2) = U^{2/3} + 4R_3^2 - 12R_4,\ J_2 = J_2(q_1,q_2) = I\sqrt{3}U^{2/3} - 4I\sqrt{3}R_3^2 + 12I\sqrt{3}R_4,$$

$$U = U(q_1,q_2) = 36R_4R_3 - 108R_5 - 8R_3^3 + 12\sqrt{12R_5R_3^3 - 3R_4^2R_3^2 - 54R_4R_3R_5 + 12R_4^3 + 81R_5^2},$$

$$R_1 = R_1(q_1,q_2) = Q_1 + Q_4,$$

$$R_2 = R_2(q_1,q_2) = Q_1Q_4 - Q_2^2,\ R_3 = R_3(q_1,q_2) = Q_1 + Q_4 + Q_6,$$

$$R_4 = R_4(q_1,q_2) = Q_1Q_4 + Q_1Q_6 - Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4Q_6 + Q_5^2,$$

$$R_5 = R_5(q_1,q_2) = Q_1Q_4Q_6 + Q_1Q_5^2 - Q_6Q_2^2 - 2Q_2Q_3Q_5 + Q_4Q_3^2,$$

$$Q_1 = Q_1(q_1,q_2) = c_1q_1^2 + 2c_3q_1q_2 + q_2^2 + c_8,\ Q_2 = Q_2(q_1,q_2) = c_3q_1^2 + (c_2+1)q_1q_2 + c_5q_2^2 + c_7,$$

$$Q_3 = Q_3(q_1,q_2) = c_8iq_1 + c_7iq_2,\ Q_4 = Q_4(q_1,q_2) = q_1^2 + 2q_1q_2c_5 + c_4q_2^2 + c_6,$$

$$Q_5 = Q_5(q_1,q_2) = c_7iq_1 + c_6iq_2,\ Q_6 = Q_6(q_1,q_2) = q_1^2c_8 + 2q_1q_2c_7 + q_2^2c_6,$$

$$c_1 = \frac{c_{11}}{c_{66}},\ c_2 = \frac{c_{12}}{c_{66}},\ c_3 = \frac{c_{16}}{c_{66}},\ c_4 = \frac{c_{22}}{c_{66}},\ c_5 = \frac{c_{26}}{c_{66}},\ c_6 = k^2\frac{c_{44}}{c_{66}},\ c_7 = k^2\frac{c_{45}}{c_{66}},\ c_8 = k^2\frac{c_{55}}{c_{66}},$$

$$c_{11} = C^{1111},\ c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112},\ c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{2212}, c_{44} = C^{2323},$$

$$c_{45} = C^{2313}, c_{55} = C^{1313}, c_{66} = C^{1212}.$$

Здесь τ – безразмерное время; k^2 = 5/6 – коэффициент сдвига; q_1, q_2 – параметры преобразования Фурье.

В качестве верификации построенной нестационарной пространственной функций Грина выполнено сопоставление результатов численного решения с результатами, получаемыми с применением известной нестационарной функции Грина для изотропной тонкой упругой прямоугольной шарнирно опертой пластины Тимошенко.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-58-00023 Бел_а) и БРФФИ (проект № Т20Р–047).

Список литературы

1 **Моргачев, К. С.** Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменой толщины / К. С. Моргачев // Вестник Самарского государственного технического университета. – 2007. – Т 15, № 2. – С. 162–164.

2 **Дьяченко, Ю. Г.** Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке : автореф. дис. … канд. физ-мат. наук / Ю. Г. Дьяченко. – Саратов, ГОУ ВПО «СГУ», – 2008. – С. 19.

3 **Шевченко, В. П.** Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 207–215.

4 **Wahab, M. A.** Prediction of impact damage in composite sandwich plates / M. A. Wahab, T. Jabbour, P. Davies // Materiaux & Techniques. – 2019. – Vol. 107, no. 2. – DOI: 10.1051/mattech/2019006.

5 **Nayfeh, A. H.** Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media / A. H. Nayfeh, D.E. Chimenti // Journal of applied mechanics-transactions of the ASME. – 1989. – Vol. 56, no. 4. – P. 881–886. – DOI: 10.1115/1.3176186.

6 **Daros, C. H.** The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates / C. H. Daros // Engineering analysis with boundary elements. – 2015. – Vol. 54, no. 2. – P. 19–27. – DOI: 10.1016/j.enganabound.2015.01.001.