$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0 .$$

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась в виде

$$P_3(s_1, s_2, t) = \begin{cases} A\sin\dfrac{\pi t}{T}, & \text{при} \quad t \le T, \\ 0, & \text{при} \quad t > T, \end{cases}$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки [2].

Были проведены расчеты для четырех вариантов некругового (эллиптического) поперечного сечения конической оболочки. Исходя из анализа расчетов установлено, что максимальные значения всех компонентов напряженно-деформированного состояния конических оболочек эллиптического сечения превышают (по абсолютному значению) соответствующие значения величин для круговой оболочки в сечении $s_2 = 0$.

Список литературы

1 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : ИПЦ «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

2 **Meish, V. F.** Nonstationary Dynamics of Elliptic Isotropic Conical Shells Under Distributed Loads / V. F. Meish, Yu. A. Meish, M. A. Belova // International Applied Mechanics. – 2020. – 56(4). – P. 424–431.

3 **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

Используемые в инженерных, транспортных или строительных конструкциях пластины нередко имеют технологические отверстия, являющиеся концентраторами напряжений. Как известно, необратимые деформации и разрушение происходят сначала в местах наибольшей концентрации напряжений. Для повышения надежности и безопасности сооружения или конструкции желательно отыскать такой контур отверстия, который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков (равнопрочный контур [1]).

Пластина (тонкостенный листовой элемент конструкции) может быть подкреплена системой ребер жесткости.

Рассмотрим пластину с отверстием усиленную ребрами жесткости (стрингерами). На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Принято, что точки крепления стрингеров расположены с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины. Условия нагружения считаются квазистатическими. В пластине реализуется плоское напряженное состояние.

Действие точек крепления моделируем: в стрингере – действием сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления; в пластине – действием сосредоточенной силы P_{mn}. Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения стрингеров с пластиной. Полагаем, что пластина и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$ (m = 0, 1, 2, …; k = 1, 2, …).

На неизвестном контуре L_0 отверстия граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_n = 0, \;\; \tau_{nt} = p.$$

Требуется найти контур, при котором тангенциальное нормальное напряжение σ_t, действующее на этом контуре, будет постоянной величиной. Следовательно, требуем, чтобы на контуре отверстия выполнялось условие

$$\sigma_t = \sigma_* = \text{const}. \tag{1}$$

Здесь t и n – касательная и нормаль к контуру отверстия. Для упругой среды σ_* подлежит определению в процессе решения задачи.

Пусть материал пластины является упругопластическим, а пластическая деформация впервые появляется на контуре отверстия. Кроме того, считаем, что условие пластичности [2] имеет вид

$$f\left(\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}\right) = 0, \tag{2}$$

где f – заданная функция.

Требуем, чтобы пластическая область в момент зарождения охватывала сразу весь контур отверстия, не проникая вглубь. Известно [1], что такое тело является наиболее прочным в смысле равномерного распределения напряжений по всем точкам контура отверстия. Из условия пластичности (2) следует, что напряжение σ_t постоянно всюду на искомой границе контура отверстия.

Рассматриваемая задача состоит в определении равнопрочного контура отверстия, величин сосредоточенных сил P_{mn}, напряженно-деформированного состояния стрингерной пластины.

Граничные условия задачи запишем в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = p + \sigma_*, \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = e^{-2i\alpha}(\sigma_* - p), \tag{3}$$

При этом использовались соотношения

$$\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{nt} = \frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}),$$

$$\sigma_t + \sigma_n = \sigma_y + \sigma_x, \qquad \zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Для решения задачи граничные условия представляются в виде краевой задачи для отыскания комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ и неизвестного равнопрочного контура отверстия.

Перейдем на вспомогательную параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение области D_z занятой средой на область D_ζ в параметрической плоскости в соответствии с координатными осями. Область D_ξ является внешностью окружности Γ радиуса λ с центром в начале координат. Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает внешность окружности в параметрической плоскости ζ на внешность неизвестного контура L_0 в плоскости z, с соответствием бесконечно удаленных точек $\omega(\infty) = \infty$.

Не уменьшая общности рассматриваемой задачи, принимаем, что искомая функция $\omega(\zeta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде ряда Фурье.

Для нахождения сосредоточенных сил P_{mn} используем закон Гука. Принимаются следующие допущения: при деформации толщина стрингера неизменна, а напряженное состояние – одноосное; стрингеры не подвергаются изгибу и работают лишь на растяжение. Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы P_{mn}, действующей на каждую точку крепления со стороны ребра жесткости,

$$P_{mn} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n}\Delta v_{mn} \quad (m, n = 1,2,\ldots), \tag{4}$$

где E_s – модуль Юнга материала стрингера, $2y_0n$ – расстояние между точками крепления, Δv_{mn} – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a_0 радиус точки крепления. Примем [3] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $mL \pm i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче равно взаимному смещению точек крепления Δv_{mn}. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение задачи.

Для решения задачи на параметрической плоскости для определения трех аналитических функций $\Phi[\omega(\zeta)]$, $\Psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$ строятся общие представления решений, описывающие класс задач с распределением напряжений. Удовлетворяя граничным условиям задачи (3) получаем нелинейные алгебраические системы для определения искомых коэффициентов общих представлений решений.

Для совместного решения полученных систем уравнений преобразовываем систему (4) для параметрической плоскости. Затем, решая построенную систему, находим величины сосредоточенных сил P_{mn}.

Решая построенные алгебраические системы уравнений методом Ньютона – Рафсона, находим искомые коэффициенты.

Полученные алгебраические системы совместно с системой уравнений (4) позволяют определить искомую форму равнопрочного контура, напряженно-деформированное состояние подкрепленной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_* для случая упругого материала.

Таким образом, построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования формы отверстия в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины, оценить эффекты упрочнения пластины, подкрепленной регулярной системой стрингеров.

Список литературы

1 **Черепанов, Г. П.** Обратные задачи плоской теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 6. – С. 963–979.

2 **Ишлинский, А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.

3 **Мирсалимов, В. М.** Некоторые задачи конструкционного торможения трещины / В. М. Мирсалимов // Физико-химическая механика материалов. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 84–88.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕРХНОСТНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОКРЫТИЕМ ТИПА ПЛАСТИНЫ

Е. Ю. МИХАЙЛОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Исследуется плоское напряжённо-деформированное состояние полупространства (основания) с покрытием типа пластины Кирхгофа при воздействии нестационарного давления $p = p(x,\tau)H(x_p - |x|)$, где $H(x)$, x_p – функция Хэвисайда и граница области нагружения соответственно. При этом контакт между пластиной и основанием происходит в условиях свободного проскальзывания.

Движение полупространства с покрытием рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_3 направлена вглубь полупространства, оси x_1, x_2 расположены на срединной поверхности пластины и составляют правую тройку векторов с x_3. Пусть основание и покрытие заполнены однородной изотропной линейно упругой средой с параметрами Ламе $\lambda,\ \mu$.

Постановка задачи включает в себя:

– уравнения движения среды

$$\Delta\varphi = \gamma_1^2\ddot{\varphi},\ \Delta\psi = \gamma_2^2\ddot{\psi};$$