УДК 539.3

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЁХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

М. В. МАРКОВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В современном мире многослойные элементы конструкций всё чаще становятся более приоритетными среди альтернативных вариантов ввиду того, что в них наблюдается оптимальное сочетание прочности, жёсткости и теплотехнических качеств при минимальном удельном весе. Исследованию динамического деформирования трёхслойных конструкций уже уделялось многократное внимание и посвящён целый ряд работ [1–7]. Здесь предложена уточнённая модель математического описания процесса колебания трёхслойной круговой пластины.

В работе [7] представлена система дифференциальных уравнений, моделирующая колебание трёхслойной пластины переменной толщины через перемещения, возникающие в ней. Вывод данной системы базировался на использовании вариационного принципа Гамильтона и гипотезы «ломаной нормали». Рассматриваемая пластина радиусом r представляла собой пакет из несущих внешних слоёв, толщина которых выражалась при помощи произвольных функций $h_1 = h_1(r)$ и $h_2 = h_2(r)$, и лёгкого срединного заполнителя – h_3 = const, функциональное назначение которого заключается в перераспределении усилий между несущими слоями и обеспечении их совместной работы. Приняв h_1 = const и h_2 = const, представленная в работе [7] система будет применима для описания процесса колебания трёхслойной пластины постоянной толщины и приобретёт следующий вид:

$$a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w,_r) = M_1\ddot{u} + M_2\ddot{\psi} - M_3\ddot{w},_r;$$

$$a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w,_r) = M_2\ddot{u} + M_4\ddot{\psi} - M_5\ddot{w},_r;$$

$$a_3^+ L_3(u) + a_5^+ L_3(\psi) - a_6^+ L_3(w,_r) = M_3\left[\frac{\ddot{u}}{r} + \ddot{u},_r\right] + M_5\left[\frac{\ddot{\psi}}{r} + \ddot{\psi},_r\right] - M_6\left[\frac{\ddot{w},_r}{r} + \ddot{w},_{rr}\right] + M_1\ddot{w} - q, \qquad (1)$$

здесь w, ψ и u – соответственно прогиб, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной поверхности пластины; q – внешняя нагрузка, воспринимаемая пластиной; M_n и a_n^+ – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв рассматриваемой пластины; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

В дальнейших исследованиях система (1) также может быть использована для моделирования процесса колебания ступенчатой пластины, представляющей собой совокупность различных трёхслойных кольцевых элементов постоянной толщины, сопряжённых единым заполнителем.

При исследовании процесса свободных (при $q = 0$) поперечных колебаний инерционными силами в продольном направлении и инерционными силами поворота нормали заполнителя при изгибе пластины можно пренебречь ввиду их незначительного влияния на поперечные перемещения [8]. Тогда, с учётом первых двух уравнений, последнее выражение системы (1) преобразуется к виду

$$\Delta\Delta w \pm Dm\Delta\ddot{w} + DM_1\ddot{w} = 0, \qquad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, а D и m – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины. Знак «$\pm$» перед коэффициентом m обусловлен тем, что в зависимости от весовых и жёсткостных характеристик слоёв пластины и их взаимной толщины данный коэффициент может иметь как положительное, так и отрицательное значение.

Уравнение (2) отличается от уравнений, ранее используемых при моделировании свободных колебаниях круговых трёхслойных пластин постоянной толщины [3, 6], наличием дополнительного инерционного члена: $\pm Dm\Delta\ddot{w}$.

Анализ численных различий в результатах расчёта по двум механико-математическим моделям динамического деформирования пластины (с дополнительным инерционным членом $\pm Dm\Delta\ddot{w}$ и без него) был выполнен для частот свободных колебаний.

Используя метод Фурье, решение уравнения (2) для любого момента времени t можно представить в виде следующего выражения:

$$w = \left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]\left[C_1 J_0\left(r\gamma^-\right) + C_2 Y_0\left(r\gamma^-\right) + C_3 I_0\left(r\gamma^+\right) + C_4 K_0\left(r\gamma^+\right)\right],$$

здесь $J_0(r)$ и $Y_0(r)$ – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, соответственно; $I_0(r)$ и $K_0(r)$ – модифицированные функция Бесселя нулевого порядка первого и второго рода; ω – частота свободных колебаний; C_n, A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий;

$$\gamma^{\pm} = \sqrt{\sqrt{0,25\cdot\omega^4 D^2 m^2 + \omega^2 D M_1} \pm 0,5\cdot\omega^2 Dm}\ .$$

В результате выполненного исследования было установлено, что учёт дополнительного инерционного члена оказывает весомое влияние на результаты расчёта лишь для пластин, в которых используется заполнитель с высокой плотностью. При изменении толщины внешних слоёв или срединного заполнителя пластины увеличение различий между результатами расчёта происходит при увеличении суммарной массы и не связано при этом с изменением жёсткости пластины. Кроме того, процент отклонения результатов расчёта тем выше, чем выше порядковый номер определяемой частоты свободных колебаний.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

Список литературы

1 **Громыко, Ю. В.** Колебания трёхслойной круговой пластины с отверстием при резонансе / Ю. В. Громыко // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 41–48.

2 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.

3 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – Т. 5, № 3. – С. 42–47.

4 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

5 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – № 5. – С. 70–79.

6 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

7 **Маркова, М. В.** Механико-математическая модель колебаний круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова // Актуальные вопросы физики и техники : материалы X Респ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов, Гомель, 22 апреля 2021 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2021. – Ч. 1. – С. 308–310.

8 **Гольденвейзер, А. Л.** Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИЛА ПРИ НАЛИЧИИ РАССЛОЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

М. И. МАРТИРОСОВ, Д. В. ДЕДОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Среди конструкционных материалов, используемых в настоящее время в авиационной технике (АТ), большое распространение приобретают полимерные композиционные материалы (ПКМ), которые обладают определенным комплексом преимуществ по сравнению с традиционными металлическими материалами. Среди таких преимуществ следует выделить высокую удельную прочность и жёсткость, высокую износостойкость и термостойкость, сопротивление усталости, химическую и радиационную стойкость, низкие коэффициенты трения и термического расширения.