

$$a_4 = R_2 - \frac{1}{c_q^2 k_B^2} \cdot R_1; \quad a_5 = -\frac{R_1}{c_q^2}; \quad a_6 = R_1; \quad R_1 = -\frac{c_q^2 k_B^2 \omega_3^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}; \quad R_1 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2};$$

$c_q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ – значения групповой скорости и частот, соответственно, определенных из точного спектра частот данной задачи; k_B – значение волнового числа на конце первой зоны Бриллюэна.

Список литературы

- 1 Абдусаттаров, А. Методы решения задач механики композитных материалов и неупругих элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, А. М. Каримов. – Ташкент : Узбекистан, 2020. – 198 с.
- 2 Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
- 3 Каримов, А. М. Дисперсионное уравнение вязкоупругих композитов периодической структуры / А. М. Каримов // Проблемы механики. – 2019. – № 1. – С. 18–20.
- 4 A Dispersive Nonlocal Model for In-Plane Wave Propagation in Laminated Composites with Periodic Structures / Н. Brito-Santana [et al.] // Journal of Applied Mechanics. – 2015. – Vol. 82, no. 3. – P. 31–46.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ИЗГИБ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИЕ ПАСТЕРНАКА

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В современном транспортном машиностроении актуально применение композиционных материалов. Широкое распространение получили многослойные, в том числе трехслойные элементы конструкций. При относительно небольшой массе подобные слоистые системы не только сочетают в себе высокую изгибную жесткость и прочность, но и обладают хорошей способностью противостоять тепловым, химическим, радиационным воздействиям. Возникает необходимость создания соответствующих математических моделей, усовершенствованию методов расчета их напряженно-деформированного состояния в различных условиях эксплуатации.

Неосесимметричное нагружение упругих трехслойных круговых пластин рассматривалось в статьях [1, 2]. Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойных пластин исследовалось в работах [3, 4]. Анализ температурного воздействия на трехслойные элементы конструкции, в том числе контактирующие с упругим основанием Винклера, выполнен в статьях [5, 6]. Деформирование упругих круговых трехслойных пластин на основании Пастернака рассматривалось в работах [7, 8], упругопластических – в [9, 10].

Здесь рассматривается квазистатическое деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака при термосиловом нагружении. Для несимметричной по толщине трехслойной пластины принята гипотеза ломаной линии: для внешних жестких слоев ($h_1 \neq h_2$) принимаются гипотезы Кирхгофа, в легком и достаточно толстом заполнителе ($h_3 = 2c$), справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Работа заполнителя в тангенциальном направлении не учитывается. Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя поперечная нагрузка, действующая на верхний слой пластины, симметрична, т. е. не зависит от координаты φ : $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R , действующей на нижний слой пластины, и прогиба принимается согласно модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w,$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, формально совпадающий с коэффициентом постели Винклера, Па/м; t_f – коэффициент сдвига основания, Па·м; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания, м; Δ – оператор Лапласа.

Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу.

За искомые функции принимаются прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$.

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака была получена с помощью принципа Лагранжа в [7]. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную.

Выразив обобщенные внутренние усилия через перемещения и подставив их в уравнения равновесия, имеем:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w &= -q, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы, a_i – коэффициенты, учитывающие геометрические параметры, зависимость модулей упругости материалов слоев от температуры,

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\ a_5 &= K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \quad K_{kn} = \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается присоединением к (1) граничных условий. В случае жесткой заделки контура пластины при $r = R$

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0;$$

при шарнирном опирании контура пластины

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0;$$

в случае свободного контура пластины

$$\psi = 0, \quad T_r = 0, \quad M_r = 0, \quad Q = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

Список литературы

- 1 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 195–203.
- 2 **Старовойтов, Э. И.** Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 38–45.
- 3 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
- 4 **Леоненко, Д. В.** Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2(43). – С. 77–82.
- 5 **Леоненко, Д. В.** Колебания элементов авиационных конструкций, возбужденные тепловым воздействием / Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский, Э. И. Старовойтов // Известия вузов. Авиационная техника. – 2016. – № 4. – С. 25–32.
- 6 **Starovoitov, É. I.** Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, no. 9. – P. 1032–1040.
- 7 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.
- 8 **Старовойтов, Э. И.** Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 106–113.
- 9 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 165–171.
- 10 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.