**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра физики и энергоэффективных технологий

К. П. ШИЛЯЕВА, И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, Н. А. АХРАМЕНКО

ФИЗИКА.
КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Пособие

Гомель 2021

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра физики и энергоэффективных технологий

К. П. ШИЛЯЕВА, И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, Н. А. АХРАМЕНКО

ФИЗИКА.
КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для обучающихся по специальностям
1-37 02 01 «Тяговый состав железнодорожного транспорта
(по направлениям)»,
1-37 02 02 «Подвижной состав железнодорожного транспорта
(по направлениям)»,
1-37 02 03 «Техническая эксплуатация погрузочно-разгрузочных, путевых,
дорожно-строительных машин и оборудования» в качестве пособия
по учебной дисциплине «Физика»*

Гомель 2021

УДК 53(075.8)
ББК 22.3
Ш60

Р е ц е н з е н т ы: кафедра общей физики ГГУ им. Ф. Скорины (заведующий кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Е. Б. Шершнев*); профессор кафедры вагонов д-р техн. наук, профессор *О. В. Холодилов* (БелГУТ)

Шиляева, К. П.

Ш60 Физика. Краткая теория и задачи : пособие / К. П. Шиляева, И. О. Деликатная, Н. А. Ахраменко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 211 с.

ISBN 978-985-891-029-7

Приведены общие методические указания, вопросы для изучения теоретического материала по разделам программы, основная и дополнительная литература, сведения из теории, примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы и справочные таблицы по разделам программы курса физики.

Предназначено для методического обеспечения практических занятий и самостоятельной работы по физике студентов инженерно-технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3

ISBN 978-985-891-029-7

ВВЕДЕНИЕ

Процесс изучения курса физики студентом состоит из следующих основных этапов: прослушивание курса лекций, самостоятельное изучение физики по учебной литературе, решение задач, выполнение контрольных и лабораторных работ, сдача зачетов и экзаменов.

Курс физики следует изучать систематически в течение всего учебного процесса. Освоение курса физики в сжатые сроки перед зачетом или экзаменом не дает глубоких и прочных знаний. Студент не должен ограничиваться только запоминанием физических формул. Он должен осмыслить их и уметь самостоятельно вывести.

Одним из основных условий успешного освоения курса физики является систематическое решение задач, которое помогает уяснить физический смысл явлений, закрепить законы и формулы, выработать навыки практического применения теоретических знаний.

При подготовке к практическим занятиям по изучаемой теме следует воспользоваться лекционным материалом, учебниками и методическими пособиями из списка рекомендуемой литературы.

Целью практических занятий является обобщение и закрепление имеющихся у студентов знаний по изучаемым темам.

Задачами практических занятий являются:

– контроль уровня усвоения студентами основных понятий и закономерностей по рассматриваемой теме;

– формирование умения применять полученные теоретические знания для решения задач;

– формирование умения составлять таблицы при систематизации и обобщении знаний;

– формирование понимания, что моделирование и описание выступают как методы изучения фактов при обобщении явлений на разных уровнях;

– формирование умения выделять признаки сходства в описании изучаемых явлений.

Контроль за подготовкой к практическим занятиям осуществляется устным и (или) письменным ответом на вопросы, а также выполнением тестовых заданий.

1 МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Механика − раздел физики, изучающий закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение − изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Поступательное движение − движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение − движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения.***

Кинематика − раздел физики, изучающий движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Материальная точка − тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело − тело которое ни при каких условиях не может деформироваться.

Система отсчета − совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета, относительно которого и определяется положение данной материальной точки в пространстве.

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z ,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); *x, y, z* – координаты точки.

Кинематические уравнения движения (в координатной форме)

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t),$$

где t – время; $f_i(t)$ − функции, выражающие зависимость координат от времени.

Траектория движения материальной точки − линия, описываемая этой точкой в пространстве.

Путь – скалярная величина, длина участка траектории, пройденного телом за определенное время.

Перемещение − вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начального положения точки в ее конечное положение.

Скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту и направление движения.

Средняя скорость движения

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ – перемещение материальной точки в интервале времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$.

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\, v_x + \vec{j}\, v_y + \vec{k}\, v_z,$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ – проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат.

Абсолютная величина (модуль) скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ .$$

Ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению,

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

где $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, $a_z = dv_z/dt$ – проекции ускорения $\vec{a}$ на оси координат.

Абсолютная величина (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

При произвольном (криволинейном) движении полное ускорение можно представить как сумму нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Тангенциальное ускорение определяет быстроту изменения скорости по модулю, направлено по касательной к траектории.

Нормальное ускорение определяет быстроту изменения скорости по направлению, направлено по главной нормали к центру кривизны траектории.

Абсолютная величина (модуль) этих ускорений

$$a_n = v^2/R\,,\quad a_\tau = dv/dt\,,\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,,$$

где R – радиус кривизны в данной точке траектории.

Кинематические уравнения движения материальной точки вдоль оси X:

– при равномерном движении:

$$x = x_0 + v_x t, \quad v = \text{const}, \quad a_x = 0;$$

– при равнопеременном движении:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad v_x = v_{0x} + a_x t, \quad a_x = \text{const}.$$

При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) φ. Кинематическое уравнение вращательного движения в общем виде

$$\varphi = f(t).$$

Средняя угловая скорость

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

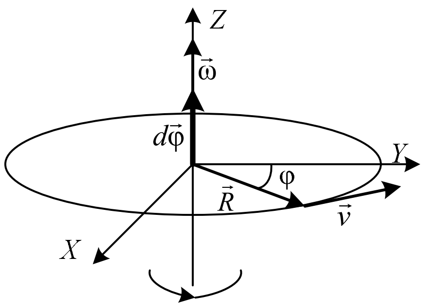
где $\Delta\varphi$ – изменение угла поворота за интервал времени Δt.

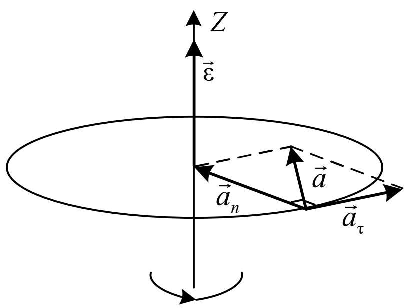
Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$





Кинематическое уравнение вращения тела относительно оси Z:

– при равномерном вращении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \omega = \text{const}, \quad \varepsilon = 0;$$

– при равнопеременном вращении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varepsilon = \text{const}.$$

Равномерное вращение также характеризуется периодом T и частотой вращения n. ***Период вращения*** − время, за которое точка совершает один полный оборот. ***Частота вращения*** − число полных оборотов, совершаемых телом в единицу времени

$$T = \frac{t}{N} = \frac{2\pi}{\omega}, \; n = \frac{1}{T},$$

где N – число оборотов, совершаемых телом за время t.

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими движение материальной точки, принадлежащей вращающемуся телу:

– длина пути, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R при повороте тела на угол φ,

$$s = \varphi R;$$

– линейная скорость точки

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right], \; v = \omega R \; ;$$

– тангенциальное ускорение точки

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right], \; a_\tau = \varepsilon R \; ;$$

– нормальное ускорение точки

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}, \; a_n = \omega^2 R \; .$$

Динамика – раздел физики, изучающий законы движения тел и причины, вызывающие и/или изменяющие это движение.

Первый закон Ньютона: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока *воздействие* со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние**.**

Инерциальная система отсчета − система отсчета, по отношению к которым выполняется первый закон Ньютона**.** Относительно таких систем материальная точка, *свободная от внешних воздействий,* либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Масса тела − одна из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства.

Сила − векторная величина, мера механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

Импульс – векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости.

Второй закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела). Или: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.

Уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) в векторной форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ ,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса этой точки; $\vec{a}$ – ускорение; $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс.

В проекциях на оси координат имеем систему уравнений:

$$ma_x = \sum F_{x,i} \ , \quad ma_y = \sum F_{y,i} \ , \quad ma_z = \sum F_{z,i} \ .$$

Третий закон Ньютона: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Механическая система – совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Координаты центра масс системы материальных точек

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где m_i – масса i-й материальной точки; x_i , y_i , z_i – ее координаты.

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Внутренние силы − силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы.

Внешние силы − силы, с которыми на материальные точки данной системы действуют внешние тела.

Замкнутая (изолированная) механическая система – система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const или} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const} \ ,$$

где n – число материальных точек (тел), входящих в систему.

Деформация – изменение объема и/или формы тела под действием внешних сил.

Сила упругости − сила, стремящаяся вернуть частицы в их прежнее положение, которому соответствует минимум их потенциальной энергии.

Напряжение при упругой деформации тела

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения тела.

Относительное удлинение (продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – абсолютное удлинение (деформация); l – длина тела до деформации.

Закон Гука для упругой деформации растяжения (сжатия)

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l,$$

где k – коэффициент упругости (жесткость); Δl – абсолютное удлинение (деформация). Или в другой форме

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

Сила внешнего трения − сила, которая препятствует перемещению соприкасающихся тел относительно друг друга.

Сила трения покоя

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 N,$$

где μ_0 – коэффициент трения покоя; N – сила нормального давления.

Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

Сила трения качения

$$F_{\text{тр}} = \mu_{\text{к}} \frac{N}{R},$$

где $\mu_{\text{к}}$ – коэффициент трения качения; N – сила нормального давления; R – радиус катящегося тела.

Сила гравитационного взаимодействия

$$F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, рассматриваемых как материальные точки; r – расстояние между центрами масс этих тел.

Сила тяжести – сила, действующая на любое тело, в системе отсчета, связанной с Землей

$$F = mg.$$

Вес тела – сила, с которой тело действует на опору или подвес.

Неинерциальные системы отсчета – системы, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем отсчета.

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

где $\vec{a}'$ − ускорение тела в неинерциальной системе отсчета; $\vec{a}$ − ускорение тела в инерциальной системе отсчета; $\vec{F}_{\text{ин}}$ − результирующая сил инерции.

Силы инерции, действующие на тело, при поступательном ускоренном движении системы

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0,$$

где $\vec{a}_0$ − ускорение неинерциальной системы отсчета.

Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета

$$F_{\text{ин}} = -m\omega^2 R,$$

где ω – угловая скорость вращения системы, R – расстояние от тела до оси вращения.

Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета

$$\vec{F}_{\text{ин}} = 2m\left[\vec{v}_0\,\vec{\omega}\right],$$

где $\vec{v}_0$ − скорость движения тела, относительно неинерциальной системы отсчета, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения системы.

Энергия – скалярная величина, универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Работа силы – скалярная величина, количественно характеризующая процесс обмена энергией между взаимодействующими телами.

Элементарная работа силы $dA = \vec{F}d\vec{r} = F(r)dr\cos\alpha$;

− работа постоянной силы $A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$;

− работа переменной силы $A = \int \vec{F}(r)d\vec{r} = \int F(r)\cos\alpha\, dr$,

где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение, $\Delta\vec{r}$ – перемещение, α – угол между направлениями силы и перемещением.

Мощность – скалярная величина, характеризующая скорость совершения работы.

Мощность средняя $\langle N\rangle = \dfrac{A}{\Delta t}$.

Мгновенная мощность $N = \dfrac{dA}{dt}$, или $N = Fv\cos\alpha$.

Кинетическая энергия тела (системы тел) – энергия, обусловленная механическим движением этого тела (системы тел).

Кинетическая энергия материальной точки (или тела, движущегося поступательно)

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия − механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$\Pi = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$\Pi = mgh,$$

где h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии. Эта формула справедлива при $h << R_з$ ($R_з$ – радиус Земли).

Сила, действующая на данное тело в данной точке поля, и потенциальная энергия связаны соотношением

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right).$$

Полная механическая энергия системы − энергия механического движения и взаимодействия, равна сумме кинетической и потенциальной энергий системы

$$E = \mathrm{T} + \Pi.$$

Консервативные силы – силы, для которых работа не зависит от того, по какой траектории произошло перемещение тела, а зависит только от начального и конечного положений тела.

Консервативные системы – механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы.

Закон сохранения механической энергии: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется

$$E = \mathrm{T} + \Pi = \mathrm{const}.$$

Диссипативные системы – системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии.

Закон сохранения и превращения энергии: энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

Момент инерции материальной точки

$$I = mr^2,$$

где m – масса точки; r – ее расстояние от оси вращения. Момент инерции системы n материальных точек

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Момент инерции твердого тела

$$I = \int r^2 dm.$$

Если тело однородно, т. е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$I = \rho \int r^2 dV.$$

Теорема Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси

$$I = I_0 + md^2,$$

где I_0 – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно заданной оси; m – масса тела; d – расстояние между осями.

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:

$I = \frac{1}{12} ml^2$	Однородный тонкий стержень массой m и длиной l, ось проходит через центр тяжести перпендикулярно стержню
$I = \frac{1}{3} ml^2$	Однородный тонкий стержень массой m и длиной l, ось проходит через край стержня перпендикулярно центру
$I = mR^2$	Тонкое кольцо, обруч, полый цилиндр, труба радиусом R и массой m, ось проходит через центр, перпендикулярно плоскости основания
$I = \frac{1}{2} mR^2$	Круглый однородный диск, цилиндр радиусом R и массой m, ось проходит через центр перпендикулярно плоскости основания
$I = \frac{2}{5} mR^2$	Однородный шар радиусом R и массой m, ось проходит через центр

Момент силы $\vec{F}$, действующей на тело, относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right], \; M = rF\sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из данной точки к точке приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Моментом силы относительно некоторой оси называют проекцию на эту ось вектора $\vec{M}$, определенного относительно произвольной точки этой оси.

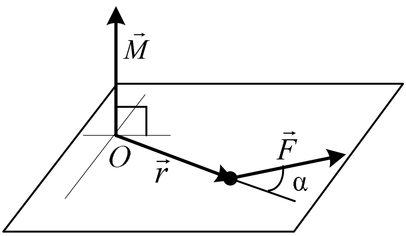
Момент импульса вращающейся точки относительно неподвижной точки

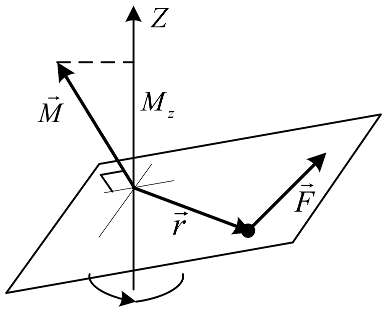
$$\vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right],\ M = r\,p\sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс точки, α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Моментом импульса относительно некоторой оси называют проекцию на эту ось вектора $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки этой оси. Если I – момент инерции тела относительно некоторой оси, то момент импульса тела относительно этой же оси

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где ω – угловая скорость вращения тела.





Основное ***уравнение динамики вращательного движения*** твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}.$$

Если относительно этой оси I = const, то

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \text{const},\ \text{или}\ \sum_{i=1}^{n}I_i\vec{\omega}_i = \text{const},$$

где L_i – момент импульса i-го тела, входящего в состав замкнутой системы, состоящей из n тел.

Элементарная работа при вращении вокруг неподвижной оси

$$dA = M\,d\varphi.$$

Работа постоянного момента силы M, действующего на вращающееся тело,

$$A = M\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела,

$$N = M\omega.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$\mathrm{T} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения (совершающего плоское движение),

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где v – скорость центра инерции тела; первое слагаемое соответствует кинетической энергии поступательного движения тела; второе – кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Принцип относительности Галилея: во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму.

Преобразования координат Галилея при переходе от неподвижной системы K, к системе K', движущейся относительно K прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{u}$.

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t, \quad \begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_x t, \\ z = z' + u_x t. \end{cases}$$

Правило сложение скоростей в классической механике

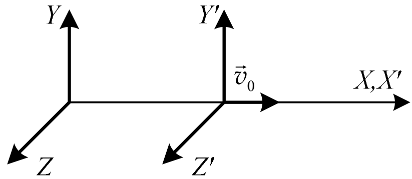
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u},$$

где $\vec{v}$ – скорость тела относительно системы K; $\vec{v}\,'$ – скорость тела относительно системы K'; $\vec{u}$ – скорость системы K' относительно K.

Постулаты Эйнштейна:

I. Принцип относительности: все физические процессы в инерциальных системах отсчёта протекают одинаково, независимо от того, неподвижна ли система или она находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Отсюда следует, что все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.

II. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.



Преобразования Лоренца при переходе от неподвижной системы *K*, к системе K', движущейся относительно *K* вдоль оси *X* с постоянной скоростью v_0:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + v_0 x' / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \qquad \beta = \frac{v_0}{c}.$$

При малых скоростях v_0 (по сравнению со скоростью света *c*), т. е. когда $\beta \ll 1$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(v / c\right)^2},$$

где l_0 – длина стержня в системе координат K', относительно которой стержень покоится (собственная длина, стержень расположен вдоль оси *X*); *l* − длина стержня, измеренная в системе *K*, относительно которой он движется со скоростью *v*; *c* – скорость распространения электромагнитного излучения.

Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(v / c\right)^2}},$$

где Δt – промежуток времени между двумя событиями, измеренный по часам системы *K*; Δt_0 – промежуток времени между двумя событиями в одной и той же точке системы K' (собственное время движущихся часов).

Релятивистское сложение скоростей

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \left(v_0 v' / c^2\right)},$$

где *v* – абсолютная скорость (скорость тела относительно системы *K*); v' − относительная скорость (скорость тела относительно системы K'); v_0 − переносная скорость (скорость системы K' относительно *K*).

Релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

где m_0 – масса покоя.

Релятивистский импульс

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2, \ E = E_0 + \mathrm{T} = m_0 c^2 + \mathrm{T},$$

где Т – кинетическая энергия частицы; $E_0 = m_0 c^2$ – ее энергия покоя.

Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти координату x_1, скорость v_1 и ускорение a_1 в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение

Координату x_1 найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B, C и времени $t_1 = 2$ с:

$$x_1 = (4 + 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2)\ \text{м} = 6\ \text{м}.$$

Мгновенная скорость равна первой производной от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct.$$

Ускорение точки найдем как первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с:

$$v_1 = (2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2)\ \text{м/с} = 0\ \text{м/с}, \ a_1 = 2\,(-0{,}5) = -1\ \text{м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси.

Размерности искомых величин очевидны.

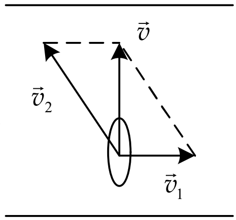
Ответ: $x_1 = 6$ м; $v_1 = 0$ м/с; $a_1 = -1$ м/с^2.

Пример 1.2. Скорость течения реки составляет 3 м/с, а гребец может грести со скоростью 5 м/с. Ширина реки – 40 м. Определить время, необходимое гребцу, чтобы пересечь реку, двигаясь перпендикулярно берегу.

Решение

Для нахождения времени движения лодки необходимо найти ее скорость относительно берега. По закону сложения скоростей она будет равна геометрической сумме векторов скорости течения воды и скорости лодки

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$



Вектор скорости $\vec{v}$ лодки относительно берега перпендикулярен вектору $\vec{v}_1$ скорости течения реки. Модуль скорости лодки относительно берега найдем из прямоугольного треугольника

$$v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}.$$

Так как движение лодки равномерное, то искомое время

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Проверим размерность конечной формулы и произведем расчет:

$$[t] = \frac{\text{м}}{\sqrt{(\text{м/с})^2 - (\text{м/с})^2}} = \text{с};$$

$$t = \frac{40}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = 10 \text{ с}.$$

Ответ: t = 10 с.

Пример 1.3. С высоты 200 м без начальной скорости падает тело. Одновременно с ним с высоты 220 м с некоторой начальной скоростью падает другое тело. Какую начальную скорость должно иметь второе тело, чтобы оба тела одновременно достигли поверхности Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Обозначим время падения обоих тел как t. В обоих случаях движение равноускоренное и в течение всего падения (так как $h_2 > h_1$) направлено вниз. Ускорения тел также направлены вниз и равны ускорению свободного падения. Исходя из кинематических уравнений движения, определим пройденную высоту для двух тел:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}; \tag{1}$$

$$h_2 = v_{02}t + \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) выразим время падения и подставим в (2):

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}; \quad h_2 = v_{02}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + h_1.$$

Выразим начальную скорость второго тела

$$v_{02} = \left(h_2 - h_1\right)\sqrt{\frac{g}{2h_1}}.$$

Проверим размерность конечной формулы

$$\left[v_{02}\right] = \left(\text{м} - \text{м}\right)\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2\text{м}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

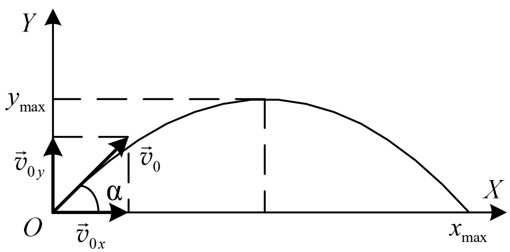
Подставим значения и произведем расчет

$$v_{02} = \left(220 - 200\right)\sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot 200}} = 3{,}1\ \text{м/с}.$$

Ответ: v_{02} = 3,1 м/с.

Пример 1.4. Камень брошен под углом α = 45° к горизонту. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета, если начальная скорость камня v_0 = 20 м/с.

Решение



Пренебрегая сопротивлением воздуха, можно считать, что ускорение камня в рассматриваемом движении постоянно и равно ускорению свободного падения $\left(\vec{a} = \vec{g}\right)$. Так как векторы ускорения $\vec{a}$ и начальной скорости $\vec{v}_0$ направлены под углом, не равным нулю, то движение камня криволинейное, траектория его лежит в плоскости XOY. Это криволинейное движение есть результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного вдоль оси X и равнопеременного вдоль оси Y.

В точке бросания составляющие скорости

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Запишем уравнения движения камня вдоль осей:

$$x = v_{0x}t, \quad v_x = v_{0x} = \text{const};$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_{0y} - gt.$$

В наивысшей точке траектории в момент времени t_1 скорость $v_{1y} = 0$, тогда

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0; \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Наибольшую высоту подъема найдем из уравнения движения камня вдоль оси Y:

$$y_{\max} = y_1; \quad y_1 = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Время подъема камня на наибольшую его высоту равно времени падения на землю. Тогда полное время полета

$$t_{\text{пол}} = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Наибольшая дальность полета

$$x_{\max} = v_x t_{\text{пол}} = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Проведем проверку размерностей:

$$[x_{\max}] = \frac{(\text{м}/\text{с})^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}, \qquad [y_{\max}] = \frac{(\text{м}/\text{с})^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$y_{\max} = \frac{20^2 \cdot (\sin 45°)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 10{,}2\,\text{м}; \quad x_{\max} = \left(\frac{20^2}{9{,}8}\sin 45°\right) = 40{,}8\,\text{м}.$$

Ответ: $y_{\max} = 10{,}2\,\text{м}; \quad x_{\max} = 40{,}8\,\text{м}.$

Пример 1.5. Вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10\ \text{с}^{-1}$ маховик при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика стало снова равномерным, но уже с частотой $n = 6\ \text{с}^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного вращения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Решение

Уравнение вращения тела при равнозамедленном движении имеет вид

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t. \qquad (2)$$

Выразим t из второго уравнения и подставим его в первое

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon}; \;\; \varphi = \omega_0 \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varepsilon}.$$

Тогда для углового ускорения получим

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi}.$$

Учтем, что $\varphi = 2\pi N$, а $\omega = 2\pi n$,

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi} = \frac{\pi(n_0^2 - n^2)}{N}. \qquad (3)$$

Определим время торможения, используя уравнения (2) и (3)

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = \frac{2\pi(n_0 - n)N}{\pi\left(n_0^2 - n^2\right)} = \frac{2N}{n_0 + n}.$$

Проведем анализ размерности искомых величин:

$$[\varepsilon] = \left(\text{c}^{-1}\right)^2 + \left(\text{c}^{-1}\right)^2 = \text{c}^{-2}; \quad [t] = \frac{1}{\left(\text{c}^{-1}\right)} = \text{c}.$$

Подставим значения и произведем расчет

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(10^2 - 6^2)}{50} = 4{,}02 \text{ c}^{-2}; \quad t = \frac{2 \cdot 50}{10 + 6} = 6{,}25 \text{ c}.$$

О т в е т: $\varepsilon = 4{,}02 \text{ c}^{-2}$; $t = 6{,}25$ c.

Пример 1.6. К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы $F_1 = 40$ Н и $F_2 = 100$ Н. Определить силу T натяжения стержня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1:2.

Р е ш е н и е

Если бы силы F_1 и F_2 были равны между собой, то сила натяжения в любом сечении стержня была бы одинаковой и равной силам, приложенным к концам стержня. Стержень в этом случае находился бы в состоянии покоя. Но так как сумма сил, действующих на стержень, отлична от нуля, то стержень будет двигаться с ускорением, величина и направление которого определяются по второму закону Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m},$$

где m – масса стержня.

Поскольку силы F_1 и F_2 противоположно направлены и действуют вдоль прямой (стержня), то геометрическую сумму можно заменить алгебраической:

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m}.$$

При ускоренном движении стержня силы натяжения в разных сечениях различны. Для определения силы натяжения применим следующий прием: разделим стержень на две части в интересующем нас сечении и отбросим одну из них, например левую. Действие левой части на правую заменим силой натяжения T. В результате действия разности сил ($F_2 - T$) оставшаяся часть стержня массой m_2 должна двигаться с ускорением

$$a = \frac{F_2 - T}{m_2},$$

равным ускорению всего стержня. Так как стержень однородный, то $m_2 = 2m/3$ и, следовательно, приравняв полученное выражение для ускорения, получим выражение для силы натяжения

$$T = F_2 - 2(F_2 - F_1)/3.$$

Подставив значения F_1 и F_2, получим

$$T = 100 - 2(100 - 40)/3 = 60 \text{ Н}.$$

Размерность величины очевидна.

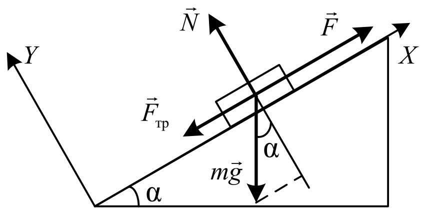
Ответ: $T = 60$ Н.

Пример 1.7. Какую силу нужно приложить для равноускоренного подъема вагонетки массой 500 кг по эстакаде с углом наклона 30° на расстояние 5 м в течение 10 с? Коэффициент трения равен 0,05.

Решение

Движение вагонетки прямолинейное равноускоренное. Запишем уравнение движения тела, используя второй закон Ньютона

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$



Спроецируем уравнение на оси координат X и Y

$$F - F_{тр} - mg\sin\alpha = ma; \quad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Силу трения определим при помощи уравнения (2)

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \tag{3}$$

Так как движение происходит из состояния покоя, то ускорение вагонетки можно выразить, зная время движения и пройденный путь,

$$s = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{t^2}. \tag{4}$$

Подставим формулы (3) и (4) в выражение (1) и найдем силу

$$F = mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) + \frac{2ms}{t^2}.$$

Проверим размерность и проведем вычисления

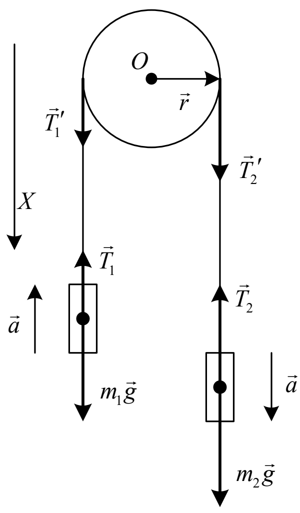
$$\left[F\right] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$F = 500\cdot 9{,}8\left(0{,}5 + 0{,}05\cdot 0{,}866\right) + \frac{2\cdot 500\cdot 5}{10^2} = 2712\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 2712$ Н.

Пример 1.8. Через блок в виде сплошного диска массой $m = 80$ г перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Решение



Воспользуемся основным уравнением динамики поступательного и вращательного движений. Для этого рассмотрим силы, действующие на каждый груз в отдельности и на блок.

На грузы действуют две силы: сила тяжести и сила упругости (сила натяжения нити). Запишем второй закон Ньютона для этих тел

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a};$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}.$$

Спроецируем эти силы на ось X, которую направим вертикально вниз, и запишем уравнения движения тел

$$-T_1 + m_1 g = -m_1 a; \tag{1}$$

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a. \tag{2}$$

Вращение блока вокруг оси O происходит вследствие действия двух моментов сил

$$\vec{M}_1 = \left[\vec{r}_1 \vec{T}_1'\right];$$

$$\vec{M}_2 = \left[\vec{r}_2 \vec{T}_2'\right].$$

Здесь $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радиус-векторы, проведенные в точки приложения сил, равные по модулю радиусу блока и противоположные по направлению.

Согласно уравнению динамики вращательного движения:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение блока; I – момент инерции блока относительно оси O.

Блок представляет собой сплошной диск, его момент инерции относительно данной оси можно вычислить по формуле

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Пусть ось O направлена «от нас», тогда в скалярном виде это уравнение запишется как

$$r\,T_2' - r\,T_1' = I\varepsilon. \qquad (3)$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$T_1' = T_1,\ T_2' = T_2.$$

Тангенциальное ускорение точек на ободе блока совпадает по значению с ускорением грузов, а тангенциальное и угловое ускорение этих точек связаны соотношением $a_\tau = \varepsilon r$, учитывая эту связь и подставляя выражение для момента инерции блока, запишем уравнение (3) в виде

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}. \qquad (4)$$

Совместное решение уравнений (1), (2), (4) дает

$$m_2 g - m_2 a - (m_1 g + m_1 a) = \frac{ma}{2}.$$

После перегруппировки членов найдем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g.$$

Размерность величины очевидна. Подставим данные и получим

$$a = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1 + 0,08/2} \cdot 9,81 = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2,88$ м/с^2.

Пример 1.9. Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определить: 1) скорость шаров после удара; 2) кинетические энергии шаров до и после удара; 3) долю кинетической энергии шаров, превратившуюся во внутреннюю энергию. Удар считать прямым, неупругим.

Решение

Неупругие шары не восстанавливают после удара свою первоначальную форму. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса. В векторной форме имеем

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Шары движутся по одной прямой вдоль оси X, положительное направление оси совпадает с направлением скорости первого шара.

В проекции на ось X получим

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

тогда

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Кинетические энергии шаров до и после взаимодействия

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad T_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Сравнение кинетических энергий шаров до и после удара показывает, что в результате неупругого удара шаров произошло уменьшение их кинетической энергии, за счет чего увеличилась их внутренняя энергия. Долю кинетической энергии шаров, пошедшей на увеличение их внутренней энергии, определим из соотношения

$$w = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Подставим числовые значения и сделаем вычисления:

$$u = \frac{2{,}5 \cdot 6 - 1{,}5 \cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3 \text{ м/с}, \quad T_1 = \frac{2{,}5 \cdot 6^2}{2} + \frac{1{,}5 \cdot 2^2}{2} = 48 \text{ Дж},$$

$$T_2 = \frac{(2{,}5 + 1{,}5) \cdot 3^2}{2} = 18 \text{ Дж}, \quad w = \frac{48 - 18}{48} = 0{,}62.$$

Размерность искомых величин очевидна.

Ответ: $u = 3$ м/с, $T_1 = 48$ Дж, $T_2 = 18$ Дж, $w = 0{,}62$.

Пример 1.10. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью 20 м/с. На какой высоте кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии? Сопротивлением воздуха пренебречь. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принять поверхность Земли.

Решение

У поверхности Земли полная механическая энергия равна начальной кинетической энергии тела, а на искомой высоте – сумме кинетической и потенциальной энергии. Так как по условию задачи сопротивлением воздуха можно пренебречь, то полная механическая энергия тела в процессе движения будет оставаться постоянной, поскольку на него действует только консервативная сила – сила тяжести. Таким образом, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh. \qquad (1)$$

Так как кинетическая и потенциальная энергии тела на искомой высоте равны, то

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh.$$

Отсюда

$$h = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Проведем проверку размерностей и численный расчет

$$[h] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}, \qquad h = \frac{20^2}{9{,}8} = 20{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 20{,}4$ м.

Пример 1.11. Сани выезжают с горки на горизонтальную поверхность с начальной скоростью 5 м/с. Коэффициент трения между полозьями саней и дорогой равен 0,1. Какой путь пройдут сани до остановки?

Решение

На сани действует сила трения, поэтому механическая энергия саней уменьшается, переходя во внутреннюю энергию.

Изменение механической энергии равно работе сил трения

$$E_2 - E_1 = A. \qquad (1)$$

Примем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли. При движении по горизонтальной поверхности потенциальная энергия саней не изменяется. Поэтому в момент остановки полная механическая энергия саней равна кинетической и равна нулю: $E_2 = \text{Т}_2 = 0$. В начальном положении

$$E_1 = \text{Т}_1 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Сила трения и ее работа на горизонтальном участке

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg,$$

$$A = F_{\text{тр}} s \cos\alpha = -F_{\text{тр}} s = -\mu mgs.$$

Работа силы трения отрицательна, так как угол между вектором силы трения и вектором перемещения $\alpha = 180°$.

Подставляя выражения для начальной энергии и работы в соотношение (1), получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgs.$$

Выразим искомый путь

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Проверим размерность и проведем численный расчет

$$[s] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м};$$

$$s = \frac{25}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8} = 12{,}8\,\text{м}.$$

Ответ: s = 12,8 м.

Пример 1.12. Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально со скоростью 500 м/с, ударяет в подвешенный на нитях деревянный брусок массой 5 кг и застревает в нем. На какую высоту поднимется брусок?

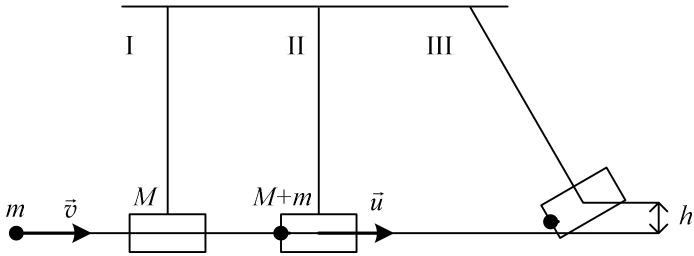
Решение

Система тел, состоящая из пули и бруска, не является замкнутой, однако взаимодействие этих тел при ударе кратковременно, поэтому действием внешних сил за время столкновения можно пренебречь.

Закон сохранения импульса можно применить, если рассматривать состояния системы непосредственно до (состояние I) и после (состояние II) удара. До удара импульс системы равен импульсу пули, после удара – суммарному импульсу бруска и пули, тогда

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ – скорость тел сразу же после удара.



Так как скорости $\vec{v}$ и $\vec{u}$ имеют одинаковое направление, то справедливо равенство модулей импульсов

$$mv = (M + m)u,$$

отсюда

$$u = \frac{mv}{M + m}. \qquad (1)$$

На тела системы после удара, т. е. при переходе бруска с пулей из нижней точки (состояние II) на высоту h (состояние III) действуют только силы тяжести и упругости нитей, т. е. только консервативные силы. Поэтому для этих двух положений можно применить закон сохранения механической энергии.

Расположим нулевой уровень потенциальной энергии в нижней точке, тогда в этом положении полная механическая энергия системы будет равна кинетической энергии бруска с пулей, а в состоянии III – их потенциальной энергии, т. к. на максимальной высоте подъема скорость тел равна нулю:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (1) в (2), получим для высоты подъема

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{mv}{M + m}\right)^2.$$

Проверим размерность конечной формулы

$$[h] = \frac{1}{\text{м/с}^2} \cdot \frac{\text{кг}^2(\text{м/с})^2}{(\text{кг} + \text{кг})^2} = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^2} = \text{м}.$$

Произведем вычисления

$$h = \frac{1}{2 \cdot 9{,}8}\left(\frac{0{,}01 \cdot 500}{5 + 0{,}01}\right)^2 = 0{,}051 \text{ м}.$$

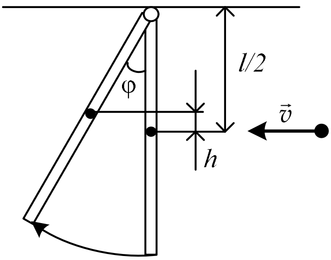
Ответ: h = 5,1 см.

Пример 1.13. Стержень длиной 1,5 м и массой 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью 500 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится стержень после удара?

Решение

Удар следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Рассмотрим подробнее процессы, происходящие при ударе. Ударившись о стержень, пуля за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию:



$$\mathrm{T} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на угол φ, причем его центр масс поднимается на высоту

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

В этом положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = Mgh = \frac{Mgl}{2}(1-\cos\varphi).$$

По закону сохранения энергии получим

$$\frac{Mgl}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad \cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}.$$

Так как момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, $J = Ml^2/3$, то получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \tag{1}$$

Чтобы из выражения (1) найти искомый угол, необходимо предварительно определить значение угловой скорости стержня. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

До удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня. Начальный момент импульса пули $L_{02} = mvr$, где $r = l/2$ – расстояние от точки попадания до оси вращения. В конечный момент времени стержень имел угловую скорость ω и момент импульса $L_1 = J\omega$, а пуля – линейную скорость v_1, равную линейной скорости точек стержня на расстоянии r от оси вращения. Так как $v_1 = \omega r$, то конечный момент импульса пули будет равен $L_{02} = mr^2\omega$.

Применим закон сохранения момента импульса

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2; \quad mvr = J\omega + mr^2\omega.$$

Подставив выражение для момента инерции стержня и расстояния r, выразим угловую скорость

$$\omega = \frac{mvr}{J + mr^2} = \frac{6mv}{(4M + 3m)l}.$$

Выражение (1) запишется в виде

$$\cos\varphi = 1 - \frac{12m^2v^2}{(4M + 3m)^2 lg}.$$

Проведем анализ размерностей

$$\left[\cos\varphi\right] = \frac{\text{кг}^2(\text{м/с})^2}{(\text{кг} + \text{кг})^2 \text{м} \cdot \text{м/с}^2} = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2} = 1,$$

т. е. получили безразмерную величину. Проведем вычисления

$$\cos\varphi = 1 - \frac{12 \cdot 0{,}01^2 \cdot 500^2}{(4 \cdot 10 + 3 \cdot 0{,}01)^2 1{,}5 \cdot 9{,}8} = 0{,}987,$$

следовательно, $\varphi = 9{,}2°$.

Ответ: $\varphi = 9{,}2°$.

Пример 1.14. Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение

Платформа вращается по инерции. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При данном условии момент импульса L системы «платформа – человек» остается постоянным:

$$L = I\omega = \text{const},$$

где I – момент инерции платформы с человеком относительно оси вращения; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому $I = I_1 + I_2$, где I_1 и I_2 – момент инерции платформы и человека. С учетом этого закон сохранения момента примет вид

$$\left(I_1 + I_2\right)\omega = \text{const}, \text{ или } \left(I_1 + I_2\right)\omega = \left(I_1' + I_2'\right)\omega',$$

где значение моментов инерции I_1 и I_2 относится к начальному состоянию системы, I_1', I_2' – к конечному. Момент инерции платформы при переходе человека не изменяется. Момент инерции человека относительно оси вращения изменяется: $I_2 = 0$ – в начальном состоянии, $I_2' = m_2 R^2$ – в конечном состоянии.

Подставим в закон сохранения момента импульса выражения для моментов инерции и начальной угловой скорости вращения платформы с человеком $\omega = 2\pi n$

$$\left(m_1 R^2/2 + 0\right)2\pi n = \left(m_1 R^2/2 + m_2 R^2\right)\omega'.$$

Выразим конечную угловую скорость системы

$$\omega' = \frac{2\pi n m_1}{m_1 + 2m_2},$$

используя связь между угловой и линейной скоростью, получим

$$v = \omega' R = \frac{2\pi n m_1 R}{m_1 + 2m_2}.$$

Проведем анализ размерности полученной формулы

$$[v] = \frac{\text{с}^{-1}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}} = \text{м/с}.$$

Подставим численные значения

$$v = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot(1/6)\cdot 1{,}5\cdot 180}{180 + 2\cdot 60} = 0{,}9 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 0{,}9$ м/с.

Пример 1.15. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию T электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}9c$ (где c – скорость света в вакууме).

Решение

Выражение для релятивистского импульса

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m_0 c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия T частицы определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы

$$\mathrm{T} = E - E_0.$$

Так как $E = mc^2$ и $E_0 = m_0c^2$, то, учитывая зависимость массы от скорости, получим

$$\mathrm{T} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Размерность импульса очевидна, проверим размерность энергии

$$[\mathrm{T}] = \text{кг}\cdot(\text{м/с})^2 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Вычислим значения

$$p = \frac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot3\cdot10^8\cdot0{,}9}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 5{,}6\cdot10^{-22}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\mathrm{T} = 9{,}11\cdot10^{-31}(3\cdot10^8)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} - 1\right) = 1{,}06\cdot10^{-17}\ \text{Дж}.$$

Во внесистемных единицах (1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж) имеем: $T = 0{,}66$ МэВ.

Ответ: $p = 5{,}6\cdot10^{-22}$ кг·м/с; $T = 0{,}66$ МэВ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1 Уравнение движения материальной точки по окружности радиуса $R = 1{,}5$ м имеет вид $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 0{,}4$ рад/с, $B = 0{,}1$ рад/с^3. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение точки в момент времени $t = 3$ с.

1.2 Автомобиль движется со скоростью 20 м/с. На протяжении 30 м производится торможение, после чего скорость уменьшается до 10 м/с. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти ускорение и время торможения.

1.3 Мяч бросили со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 50°$ к горизонту. Найти: 1) на какую высоту H поднимется мяч; 2) на каком расстоянии L от места бросания он упадет на землю; 3) сколько времени он будет в движении? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.4 С балкона вертикально вверх бросили мяч с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. Через $t = 3$ с мяч упал на землю. Определить высоту h балкона над землей и скорость v мяча в момент соприкосновения с землей.

1.5 Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите этот угол, если максимальная высота подъема меньше дальности полета в 4,5 раза.

1.6 Тело брошено со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1{,}5$ с после начала движения: 1) нормальное ускорение; 2) тангенциальное ускорение.

1.7 Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить радиус кривизны траектории тела через $t = 2$ с после начала движения.

1.8 Колесо радиусом $R = 20$ см вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую и линейную скорости; 2) тангенциальное, нормальное и полное ускорение.

1.9 За время $t = 2$ мин колесо при равнозамедленном вращении изменило частоту от 240 до 60 мин $^{-1}$. Определить угловое ускорение колеса и число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

1.10 Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Скорость вагона за время $t = 3$ с равномерно уменьшается от $v_1 = 18$ до $v_2 = 6$ км/ч. На какой угол α отклонится нить с шаром?

1.11 К нити подвешен груз массой 1 кг. Определить силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимается с ускорением $a = 5$ м/с^2; 2) опускается с ускорением $a = 2$ м/с^2.

1.12 С вершины клина, длина которого 2 м и высота 1 м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $\mu = 0{,}15$. Определить: 1) ускорение, с которым движется тело; 2) время движения тела вдоль клина; 3) скорость тела у основания клина.

1.13 На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту лежит брусок массой 2 кг, на который действует горизонтальная прижимающая сила. Определить коэффициент трения между бруском и плоскостью, если брусок начинает скользить при силе, равной 8 Н.

1.14 Два груза массой 0,5 кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, установленный на краю стола. Коэффициент трения первого груза о стол $\mu = 0{,}15$. Пренебрегая трением в блоке определить ускорение грузов и силу натяжения нити.

1.15 Определить жесткость системы пружин при их последовательном и параллельном соединениях. Жесткость пружин $k_1 = 2$ кН/м и $k_2 = 6$ кН/м.

1.16 К вертикальной проволоке длиной $l = 5$ м и площадью поперечного сечения $S = 2$ мм^2 подвешен груз массой $m = 5{,}1$ кг. В результате проволока удлинилась на $\Delta l = 0{,}6$ мм. Найти модуль Юнга материала проволоки.

1.17 Стационарный искусственный спутник движется по окружности в плоскости земного экватора, оставаясь над одним и тем же пунктом земной поверхности. Определить угловую скорость спутника и радиус его орбиты.

1.18 Диск радиусом R = 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения μ = 0,4, найти частоту вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

1.19 Грузик, привязанный к шнуру длиной l = 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определите период обращения, если нить отклонилась на угол 60° от вертикали.

1.20 Тело массой m = 5 кг поднимают с ускорением a = 2 м/с^2. Определить работу силы за первые пять секунд.

1.21 Автомобиль двигается со скоростью 60 км/ч. Коэффициент трения между шинами и дорогой 0,75. Определить минимальное расстояние, на котором машина может быть остановлена.

1.22 Верхний конец стального стержня длиной l = 5 м с площадью поперечного сечения S = 4 см^2 закреплен неподвижно, к нижнему подвешен груз массой $m = 2\cdot10^3$ кг. Определить: 1) нормальное напряжение σ материала стержня; 2) абсолютное x и относительное ε удлинения стержня; 3) потенциальную энергию П растянутого стержня.

1.23 Пружина жесткостью k = 10 кН/м сжата силой F = 200 Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружинку ещё на 1 см.

1.24 Материальная точка массой m = 1 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ (A = 6 м; B = 3 м/с; C = 5 м/с^2; D = 1 м/с^3). Определить мощность, затрачиваемую на движение точки в момент времени t = 1 с.

1.25 Груз массой m = 100 кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением a = 0,5 м/с^2. Длина наклонной плоскости 3 м, угол ее наклона к горизонту – 30°, коэффициент трения μ = 0,2. Определить работу, совершаемую подъемником, и его среднюю мощность.

1.26 Материальная точка массой m = 20 г движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия точки составляет 6,3 мДж. Определить тангенциальное ускорение.

1.27 На платформе, движущейся по инерции со скоростью v_0 = 3 км/ч, укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения. Масса платформы с орудием M = 10 т. Снаряд массой m = 10 кг вылетает из ствола под углом α = 60° к горизонту. Определить скорость снаряда относительно Земли, если после выстрела скорость платформы уменьшилась в 2 раза.

1.28 Снаряд массой m = 5 кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость v = 300 м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой m_1 = 3 кг полетел в обратном направлении со скоростью v_1 = 100 м/с. Определите скорость второго, меньшего, осколка.

1.29 Пуля массой $m = 15$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с, попала в баллистический маятник массой $M = 6$ кг и застряла в нем. На какую высоту h, откачнувшись после удара, поднялся маятник?

1.30 С какой скоростью вылетит из пружинного пистолета шарик массой $m = 11$ г, если пружина жесткостью $k = 210$ Н/м была сжата на $\Delta x = 6$ см.

1.31 При выстреле из орудия снаряд получил начальную скорость 300 м/с и летит вертикально вверх. На какой высоте над местом выстрела его кинетическая энергия будет равна потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.32 Два шара массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 1$ м/с. Определить скорость шаров после прямого, неупругого удара и кинетические энергии шаров до и после удара. Решить эту же задачу для упругого удара.

1.33 Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $m_1 = 1$ кг с прикрепленным к одному из его концов диском массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Определите момент инерции такого маятника относительно оси, перпендикулярной плоскости в которой маятник совершает колебания и проходящей через точку, отстоящую на расстояние $l/3$ от конца стержня.

1.34 Колесо радиусом $R = 30$ см и массой $m = 3$ кг скатывается без трения по наклонной плоскости длиной $l = 5$ м и углом наклона $\alpha = 25°$. Определить момент инерции колеса, если его скорость в конце движения составляла 4,6 м/с.

1.35 Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$($A = 1$ рад, $B = 2$ рад/с^2; $C = -0{,}5$ рад/с^3). Определите момент сил для $t = 3$ с.

1.36 На сплошной цилиндр массой 10 кг, вращающийся около горизонтальной оси, намотан шнур. К шнуру подвешена гиря массой 2 кг. С каким ускорением будет двигаться гиря, если ее предоставить самой себе.

1.37 Маховик, момент инерции которого $I = 120$ кг·м^2, вращался с частотой $n = 240$ об/мин. Найти тормозящий момент сил M, под действием которого маховик останавливается через $t = 3{,}14$ мин.

1.38 Платформа в виде диска радиуса $R = 1{,}5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n = 10$ об/мин. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

1.39 Определить, на сколько должна увеличиться полная энергия тела, чтобы его релятивистская масса возросла на $\Delta m = 2$ г.

2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Молекулярная физика − раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Молекулярно-кинетический (статистический) метод – метод, основанный на том, что свойства макроскопической системы определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и усредненными значениями динамических характеристик этих частиц.

Термодинамика – раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

Термодинамический метод – метод, основанный на установлении связей между макроскопическими свойствами вещества, без рассмотрения микроскопического строения вещества и механизма наблюдаемых явлений.

Термодинамическая система – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией между собой и с внешней средой.

Термодинамические параметры состояния системы – совокупность физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы.

Термодинамический процесс – изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров.

Система находится в ***термодинамическом равновесии***, если при неизменных внешних условиях ее состояние не изменяется с течением времени.

Количество однородного вещества (в молях)

$$\nu = \frac{N}{N_A} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{m}{\mu},$$

где N – число молекул; N_A – постоянная Авогадро; m – масса; μ – молярная масса вещества.

Если система представляет собой смесь нескольких газов, то количество вещества системы

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = \frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \ldots + \frac{N_n}{N_A} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{m_n}{\mu_n},$$

где ν_i, N_i, m_i, μ_i – соответственно количество вещества, число молекул, масса, молярная масса i-й компоненты смеси.

Идеальный газ – модель газа, согласно которой:

1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;

2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Уравнение состояния идеального газа (Менделеева − Клапейрона)

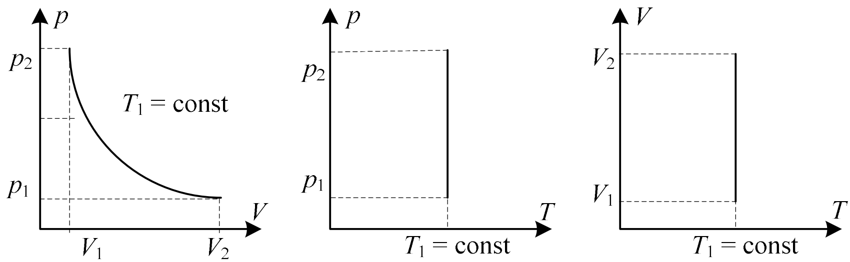
$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

где p – давление; V – объем; m – масса; μ – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная; ν – количество вещества; T – термодинамическая температура.

Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения состояния для изопроцессов:

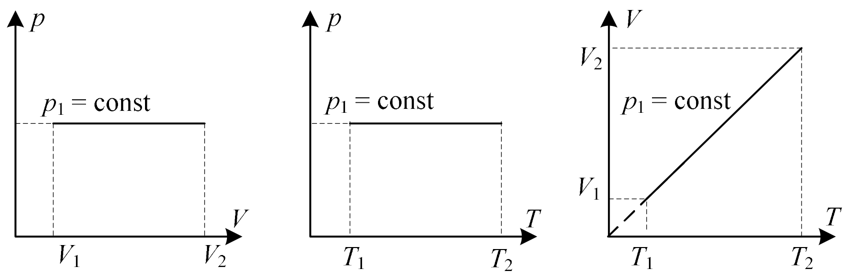
а) закон Бойля − Мариотта (изотермический процесс – T = const, m = const):

$$pV = \text{const}, \quad \text{или для двух состояний газа} \quad p_1V_1 = p_2V_2;$$



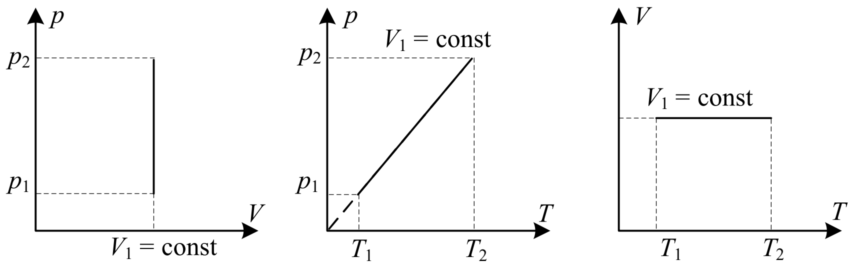
б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс – p = const, m = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$



в) закон Шарля (изохорный процесс – V = const, m = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$



г) объединенный газовый закон (m = const):

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где p_1, V_1, T_1 – давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси, состоящей из n идеальных газов,

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p_i – парциальное давление i-й компоненты смеси. Парциальным называется давление, которое производил бы этот газ, если бы в сосуде, занятом смесью, находился только он один.

Молярная масса смеси газов

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_n}.$$

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

Концентрация молекул – количество молекул в единице объема

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu} N_A,$$

где N – число молекул в системе; V – объем системы; ρ – плотность вещества; N_A – число Авогадро. Формула справедлива для любого состояния вещества.

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle \quad \text{или} \quad pV = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} E,$$

где n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}} \rangle^2$ – средняя квадратичная скорость молекул; <ε> – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул; m – масса газа в объеме V; E − суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул.

Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right),$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям, определяющая долю числа молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$.

Число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$,

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 \exp\left(-u^2 \right) du,$$

где $u = v/v_{\text{в}}$ – относительная скорость, равная отношению скорости молекул v к наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$; $f(u)$ – функция распределения по относительным скоростям.

Распределение молекул по энергиям. Число молекул, энергии которых заключены в интервале от ε до ε + dε,

$$dN(\varepsilon) = Nf(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(kT \right)^{-\frac{3}{2}} d\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon)$ – функция распределения по энергиям.

Скорость молекул (m_0 – масса молекулы):

− наиболее вероятная – $v_{\text{в}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$;

− средняя квадратичная – $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$;

− средняя арифметическая – $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя полная кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы.

Число степеней свободы – количество независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. Для одноатомной молекулы $i = 3$, для двухатомной молекулы $i = 5$, для многоатомной молекулы $i = 6$.

Барометрическая формула:

$$p_h = p_0 \exp\left[-\frac{\mu g (h - h_0)}{RT}\right],$$

где p_h и p_0 – давление газа на высоте h и h_0.

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right),$$

где n – концентрация частиц; n_0 – концентрация частиц в точках, где потенциальная энергия частиц $U = 0$.

Эффективный диаметр – наименьшее расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул.

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle ,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ − средняя арифметическая скорость молекулы.

Длина свободного пробега – путь, который молекула проходит между двумя последовательными столкновениями.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Явления переноса – процессы, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса.

Внутреннее трение – трение между частями одного и того же тела, например между слоями жидкости или газа, движущимися с различными скоростями. Внутреннее трение обусловлено переносом импульса между слоями из-за хаотического теплового движения молекул.

Импульс, переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности площадью ΔS за время dt,

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt ,$$

где η – динамическая вязкость газа; dv/dz – поперечный градиент скорости течения его слоев.

Динамическая вязкость вещества плотностью ρ

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Закон Ньютона для силы внутреннего трения (вязкости) между слоями площадью ΔS:

$$F = -\eta\frac{dv}{dz}\Delta S\ .$$

Теплопроводность – процесс выравнивания температур в различных областях вещества, обусловленный переносом энергии.

Закон Фурье для теплопроводности:

$$\Delta Q = -\lambda\frac{dT}{dx}S\Delta t,$$

где ΔQ – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадку S за время Δt; dT/dx – градиент температуры; λ – теплопроводность.

Для газов

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle v\rangle$ и $\langle l\rangle$ – средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега молекул.

Диффузия – явление самопроизвольного проникновения и перемешивания частиц двух соприкасающихся веществ, обусловлено переносом массы.

Закон Фика для диффузии:

$$\Delta m = -D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t,$$

где Δm – масса вещества, переносимая в результате диффузии через поверхность площадью S за время Δt; $d\rho/dx$ – градиент плотности; D – коэффициент диффузии.

Для газов

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Теплоемкость – количество теплоты, нужное для нагревания вещества на 1 К.

Молярная теплоемкость C – количество теплоты, нужное для нагревания 1 моля вещества на 1 К.

Удельная теплоемкость c – количество теплоты, нужное для нагревания 1 кг вещества на 1 К.

Удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением

$$C = c\mu,$$

где μ – молярная масса вещества.

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

где i – число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная.

Уравнение Майера:

$$C_p - C_V = R.$$

Внутренняя энергия термодинамической системы – энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы и энергия взаимодействия этих частиц.

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu}C_V T.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V \Delta T.$$

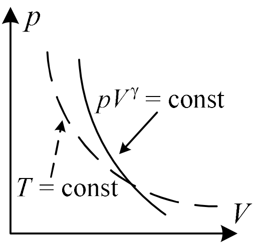
Адиабатный процесс – процесс, проходящий без теплообмена с окружающей средой.

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \; TV^{\gamma-1} = \text{const}, \; T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где γ – показатель адиабаты,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$



Политропный процесс – процесс, при котором теплоемкость остается постоянной. Изохорный, изобарный, изотермический и адиабатный процессы являются частными случаями политропного.

Уравнение политропы

$$pV^n = \text{const},$$

где $n = (C - C_p) / (C - C_V)$ – показатель политропы.

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = pdV.$$

Работа газа в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Работа при изобарном процессе (p = const)

$$A = p\,(V_2 - V_1),$$

– при изотермическом (T = const) –

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1},$$

– при адиабатном ($\Delta Q = 0$) –

$$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

– при политропном (C = const) –

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

где T_1, T_2, V_1, V_2, p_1, p_2 – соответственно начальные и конечные температура, объем и давление газа.

Первое начало термодинамики: теплота Q, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение ею работы A против внешних сил

$$Q = \Delta U + A.$$

Первое начало термодинамики при изобарном процессе

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T,$$

– при изохорном ($A = 0$) –

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T,$$

– при изотермическом ($\Delta U = 0$) –

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1},$$

– при адиабатном ($\Delta Q = 0$) –

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Закон Дюлонга и Пти: молярная теплоемкость C химически простых твердых тел

$$C = 3R.$$

Молярная теплоемкость ***твердых химических соединений*** (например, NaCl) равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих это соединение:

$$C = 3nR.$$

Термодинамический процесс называется ***обратимым,*** если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений.

Круговой процесс (цикл) − процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное.

Прямой цикл – цикл, при котором совершается положительная работа, используется в *тепловых двигателях* − периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты.

Обратный цикл – цикл, при котором совершается отрицательная работа, используется в *холодильных машинах* − периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

Приведенное количество теплоты – отношение теплоты, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре теплоотдающего тела.

Энтропия – функция состояния системы, дифференциал которой определяется как приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса,

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Неравенство Клаузиуса: энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов):

$$\Delta S \geq 0.$$

Изменение энтропии при равновесном переходе термодинамической системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Изменение энтропии идеального газа

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Изменение энтропии при изобарном процессе

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1},$$

– при изохорном –

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1},$$

– при изотермическом –

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

– при адиабатном –

$$\Delta S = 0.$$

Термодинамическая вероятность состояния системы – число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние. Термодинамическая вероятность и энтропия связаны выражением

$$S = k \ln W,$$

где k – постоянная Больцмана, W – термодинамическая вероятность.

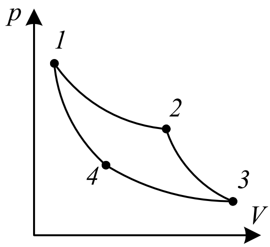
Второе начало термодинамики: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой; A – работа, совершаемая за цикл.

Теорема Карно: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела.



Цикл Карно – круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат:

1–2 T_1 = const, изотермическое расширение;

2–3 адиабатное расширение;

3–4 T_2 = const, изотермическое сжатие;

4–1 адиабатное сжатие.

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Холодильный коэффициент машины, работающей по обратному циклу Карно,

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{отв}}}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

где $Q_{\text{отв}}$ – количество теплоты, отведенное из холодильной камеры; A − совершенная работа; T_2 – температура более холодного тела (холодильной камеры); T_1 – температура более горячего тела (окружающей среды).

Реальный газ – газ, для которого учитывается размер молекул и их взаимодействие друг с другом.

Собственный объем молекул, находящихся в ν молях газа

$$V' = \frac{\nu b}{4},$$

где b – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая объем молекул газа.

Внутреннее давление, обусловленное действием сил притяжения между молекулами газа,

$$p' = \frac{\nu a}{V^2},$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{\nu a}{V}\right).$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа)

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT.$$

Изотермы Ван-дер-Ваальса – кривые зависимости давления от молярного объема при заданных температурах.

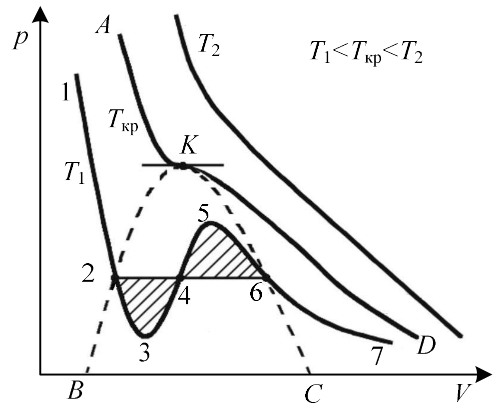
Изотерма 1-2-6-7 − экспериментальная изотерма. Изотерма 1-3-5-7 – теоретическая изотерма, участок 3-5 этой изотермы описывает процессы, которые невозможно осуществить. Участки 2-3 и 5-6 соответствуют неустойчивым (метастабильным) состояниям вещества – перегретой жидкости и пересыщенному пару.

Критическая изотерма – изотерма Ван-дер-Ваальса с единственной точкой перегиба K, которая называется критической точкой.

Связь критических параметров – объема, давления и температуры газа – с постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{\text{кр}} = 3b\frac{m}{\mu}; \quad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}.$$

Область между кривыми *AK* и *KB* на диаграмме соответствует жидкому состоянию вещества. Область выше критической изотермы *AKD* соответствует газообразному состоянию вещества. Область между кривыми *KC* и *KD* соответствует пару, а область под кривой *BKC* – двухфазным состояниям вещества (насыщенный пар и жидкость).



Пар – вещество в газообразном состоянии при температуре, ниже критической, при изотермическом сжатии может перейти в жидкое состояние. Газ при температуре *выше* критической в жидкое состояние перейти не может.

Насыщенный пар – пар, находящийся в состоянии равновесия со своей жидкостью.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием; следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка 10^{-9} м) называется ***радиусом молекулярного действия*** *r,* а сфера радиуса *r* − ***сферой молекулярного действия.***

Дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая ***поверхностной энергией,*** пропорциональна площади слоя ΔS:

$$\Delta E = \alpha\,\Delta S,$$

где α − поверхностное натяжение.

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = F/l,$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур длиной l, ограничивающий поверхность жидкости.

Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются ***поверхностно-активными.***

Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

Угол θ между касательными к поверхностям жидкости и твердого тела называется ***краевым углом.***

$$\cos\theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}},$$

где поверхностные натяжения: α_{12} − между твердым телом и жидкостью, α_{13} – между твердым телом и газом, α_{23} – между газом и жидкостью.

Если $\alpha_{13} > \alpha_{12}$, то $\cos\theta > 0$ и угол θ − острый, т. е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если $\alpha_{13} < \alpha_{12}$, то $\cos\theta < 0$ и угол θ − тупой, т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность. Если $\alpha_{13} > \alpha_{12} + \alpha_{23}$, то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла), − имеет место ***полное смачивание*** (в данном случае $\theta = 0$). Если $\alpha_{12} > \alpha_{13} + \alpha_{23}$, то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе, имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина), − имеет место ***полное несмачивание*** (в данном случае $\theta = \pi$).

При изотермическом увеличении площади поверхности пленки жидкости на ΔS совершается работа

$$A = \alpha\,\Delta S.$$

Добавочное давление Δp, вызванное кривизной поверхности жидкости, выражается формулой Лапласа

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

В случае сферической поверхности ($R_1 = R_2 = R$)

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; r – радиус трубки.

Высота поднятия жидкости в зазоре между двумя близкими и параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии d,

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g d}.$$

При нагревании тела от 0 до t °C его длина (в первом приближении) изменяется от l_0 до l по закону

$$l = l_0\,(1 + \alpha_l\, t),$$

где α_l – коэффициент линейного расширения.

При нагревании тела от 0 до t °C его объем изменяется от V_0 до V по закону

$$V = V_0\,(1 + \alpha_V\, t),$$

где α_V – коэффициент объемного расширения ($\alpha_V \approx 3\alpha_l$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 2.1. Найти молярную массу смеси кислорода массой $m_1 = 25$ г и азота массой $m_2 = 75$ г.

Решение

Молярная масса смеси есть отношение массы смеси $m_{см}$ к количеству вещества смеси, т. е.

$$\mu_{см} = m_{см} / \nu_{см}. \qquad (1)$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси:

$$m_{см} = m_1 + m_2,$$

количество вещества смеси

$$\nu_{см} = \nu_1 + \nu_2 = m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2.$$

Подставив в формулу (1) выражения для $m_{см}$ и $\nu_{см}$, получим

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}}.$$

$$\mu_{см} = \frac{25+75}{\frac{25}{32}+\frac{75}{28}} = 30 \text{ г/моль} = 30\cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Размерности искомых величин очевидны.

Ответ: $\mu_{см} = 30 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Пример 2.2. В баллоне вместимостью $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа и при температуре $T_1 = 300$ К. После того, как из баллона было взято $m = 10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева − Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

где m_2 – масса гелия в баллоне в конечном состоянии; μ – молярная масса гелия; R – универсальная газовая постоянная.

Выразим искомое давление:

$$p_2 = \frac{m_2RT_2}{\mu V}. \quad (1)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию газа, и массу гелия, взятого из баллона,

$$m_2 = m_1 - m. \quad (2)$$

Масса m_1 гелия также находится из уравнения Менделеева − Клапейрона для начального состояния гелия

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}. \quad (3)$$

Подставив выражения для масс (2) и (3) в (1), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m\right)\frac{RT_2}{\mu V} = \frac{T_2}{T_1}p_1 - \frac{m}{\mu}\frac{RT_2}{V}.$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу давления. Для этого в ее правую часть вместо символов величин подставляем их единицы. В правой части формулы два слагаемых. Первое из них дает единицу давления, т. к. первый сомножитель (T_2 / T_1) – безразмерный, а второй – давление. Проверим второе слагаемое:

$$\frac{[m][R][T]}{[\mu][V]} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Дж/}(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot\text{К}}{(\text{кг/моль})\cdot\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Производим вычисления, учитывая, что $\mu = 4\cdot 10^{-3}$кг/моль.

$$p_2 = \frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31 \cdot 290}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,364 \text{ МПа}.$$

Ответ: p_2 = 0,364 МПа.

Пример 2.3. Найти среднюю кинетическую энергию движения одной молекулы кислорода при температуре T = 350 К, а также кинетическую энергию движения всех молекул кислорода массой m = 4 кг.

Решение

На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура газа.

Поступательному движению двухатомной молекулы кислорода соответствуют три степени свободы, вращательному – две. Тогда средняя кинетическая энергия движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} kT.$$

Число всех молекул газа

$$N = \nu N_A = N_A \frac{m}{\mu}.$$

Тогда кинетическая энергия движения всех молекул газа

$$E_к = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} \frac{mkN_A T}{\mu} = \frac{5m}{2\mu} RT.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 1,21 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}; \; E_к = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 350 = 910 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 1,21 \cdot 10^{-20}$ Дж; $E_к = 910$ Дж.

Пример 2.4. Используя функцию распределения молекул идеального газа по относительным скоростям, определить число молекул, скорости которых меньше 0,002 наиболее вероятной скорости, если в объеме газа содержится $N = 1,67 \cdot 10^{24}$ молекул.

Решение

Если N – число молекул в объеме газа, то число $dN(u)$ молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$,

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 \exp\left(-u^2\right) du.$$

По условию задач $v_{max} = 0{,}002v_в$, значит $u_{max} = v_{max}/v_в = 0{,}002$. Так как $u \ll 1$, то $\exp(-u^2) \approx 1 - u^2$. Пренебрегая u^2, которое много меньше единицы, выражение для $dN(u)$ можно записать в виде

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du.$$

Интегрируя данное выражение по u в пределах от 0 до u_{max}, получим

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4Nu_{max}^3}{3\sqrt{\pi}}.$$

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{24} \cdot (0{,}002)^3}{3\sqrt{3{,}14}} = 10^{16}.$$

Ответ: $\Delta N = 10^{16}$ молекул.

Пример 2.5. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении неона и водорода, принимая эти газы за идеальные. Рассчитать также удельные теплоемкости смеси указанных газов, если массовые доли неона и водорода составляют 80 и 20 % соответственно.

Решение

Удельные теплоемкости идеальных газов определяются по формулам

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}.$$

Для неона (одноатомный газ) число степеней свободы $i = 3$, поэтому

$$c_{V1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 624 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1040 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i = 5$

$$c_{V2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^4 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{p1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}46 \cdot 10^4 \, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_V найдем следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\,\Delta T, \tag{1}$$

$$Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T. \tag{2}$$

Приравнивая правые части (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, получим

$$c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2.$$

Отсюда

$$c_V = c_{V1}\frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V2}\frac{m_2}{m_1 + m_2} \text{ или } c_V = c_{V1}\omega_1 + c_{V2}\omega_2,$$

где $\omega_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$ и $\omega_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$.

Рассуждая таким же образом, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении

$$c_p = c_{p1}\omega_1 + c_{p2}\omega_2.$$

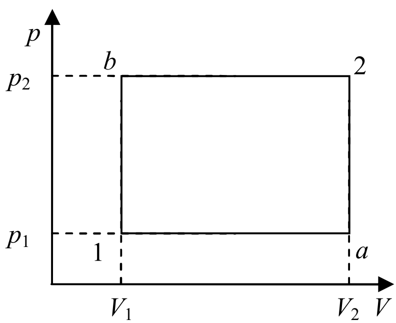
Произведем вычисления:

$$c_V = (6{,}24 \cdot 10^2 \cdot 0{,}8 + 1{,}04 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2) = 2580 \text{ Дж/(кг·К)};$$
$$c_p = (1{,}04 \cdot 10^2 \cdot 0{,}8 + 1{,}46 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2) = 3752 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Ответ: $c_{V1} = 624$ Дж/(кг·К), $c_{p1} = 1040$ Дж/(кг·К), $c_{V2} = 1{,}04 \cdot 10^4$ Дж/(кг·К), $c_{p2} = 1{,}46 \cdot 10^4$ Дж /(кг · К), $c_V = 2580$ Дж/(кг·К); $c_p = 3752$ Дж/(кг·К).

Пример 2.6. Некоторая масса кислорода при давлении $p_1 = 10^5$ Па занимает объем $V_1 = 10$ л. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 30$ л, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение внутренней энергии газа ΔU_{1a2}, совершенную им работу A_{1a2} и количество поглощенной газом теплоты Q_{1a2}. Произвести аналогичные расчеты в случае обратного следования процессов: сначала по изохоре, потом по изобаре (кривая $1b2$). Сравнить результаты расчетов в обоих случаях.

Решение



Физическую систему составляет идеальный газ – кислород. Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Поэтому изменение внутренней энергии при переходе из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях и не зависит от совокупности процессов, приведших к такому переходу системы:

$$\Delta U_{1a2} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right).$$

Здесь температура газа в начальном и конечном состояниях была выражена из уравнения Менделеева – Клапейрона.

Работа, совершенная газом в рассматриваемом случае,

$$A_{1a2} = A_{1a} + A_{a2}.$$

При изобарном процессе $A_{1a} = p_1(V_2 - V_1)$, при изохорном $A_{a2} = 0$. С учетом этого

$$A_{1a2} = p_1(V_2 - V_1).$$

В соответствии с первым законом термодинамики

$$Q_{1a2} = \Delta U_{1a2} + A_{1a2} = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) + p_1\left(V_2 - V_1\right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta U_{1a2} = 14 \cdot 10^3 \text{ Дж}; \; A_{1a2} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}; \; Q_{1a2} = 16 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Во втором случае переход из состояния 1 в состояние 2 идет через промежуточное состояние b. Искомые величины могут быть найдены следующим образом:

$$A_{1b2} = p_2(V_2 - V_1);$$

$$\Delta U_{1b2} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right);$$

$$Q_{1b2} = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) + p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

Подставив численные значения, получим

$$\Delta U_{1b2} = 14 \cdot 10^3 \text{ Дж}; \quad A_{1b2} = 10 \cdot 10^3 \text{ Дж}; \quad Q_{1b2} = 24 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Сравнивая результаты в первом и втором случаях, замечаем, что

$$\Delta U_{1a2} = \Delta U_{1b2}; \qquad A_{1b2} > A_{1a2}; \qquad Q_{1b2} > Q_{1a2}.$$

Ответ: $\Delta U_{1a2} = 14 \cdot 10^3$ Дж; $A_{1a2} = 2 \cdot 10^3$ Дж; $Q_{1a2} = 16 \cdot 10^3$ Дж; $\Delta U_{1b2} = 14 \cdot 10^3$ Дж; $A_{1b2} = 10 \cdot 10^3$ Дж; $Q_{1b2} = 24 \cdot 10^3$ Дж.

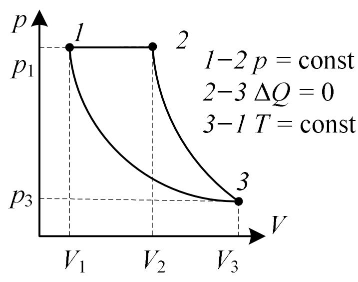
Пример 2.7. Идеальный газ совершающий цикл, состоящий из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. При изобарном процессе температура газа изменяется от $T_1 = 400$ К до $T_2 = 800$ К. Определить термический КПД цикла.

Решение

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой.



Для данного цикла система получает тепло при изобарном процессе и отдает тепло при изотермическом процессе, значит $Q_1 = Q_{12}$, а $Q_2 = Q_{31}$.

Воспользуемся первым началом термодинамики для изобарного и изотермического процессов

$$Q_{12} = \nu C_p \Delta T = \nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right); \tag{2}$$

$$Q_{31} = \nu R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}. \tag{3}$$

Запишем уравнения Пуассона для адиабатного процесса и закон Гей-Люссака для изобарного процесса

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Используя эти соотношения и тождество $T_1 = T_3$, найдем связь между объемами в состоянии 1 и в состоянии 3

$$V_1 = \frac{T_1}{T_2} V_2, \quad V_2 = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_3,$$

$$V_1 = \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_3. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в формулу (3)

$$Q_{31} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu R T_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{5}$$

Показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, тогда выражение (5) примет вид

$$Q_{31} = \nu R T_1 \frac{i+2}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{6}$$

Подставляя (6) и (2) в (1), получим выражение для КПД

$$\eta = \frac{\nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right) - \nu \frac{i+2}{2} R T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{\nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right)} = \frac{\left(T_2 - T_1\right) - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1}.$$

Вычисляя, находим:

$$\eta = \left(800 - 400 - 400 \ln \frac{800}{400}\right) \Big/ \left(800 - 400\right) = 0{,}31.$$

Ответ: $\eta = 0{,}31$.

Пример 2.8. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу $A = 600$ Дж. Температура T_1 нагревателя равна 500 К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Определить термический КПД цикла и количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Решение

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A,$$

где $Q_1 = A / \eta$ – количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставляя выражение для Q_1 в формулу для Q_2, получим

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = A\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1\right) = A\frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Вычисляя, находим:

$$\eta = \frac{500 - 300}{500} = 0,4; \quad Q_2 = 600\frac{300}{500 - 300} = 900 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\eta = 0,4$; $Q_2 = 900$ Дж.

Пример 2.9. Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой 10 г, если давление газа уменьшается от 100 кПа до 50 кПа.

Решение

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T}. \tag{1}$$

Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, полученное газом, $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Подставив выражение для работы в формулу (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}R\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем

$$\Delta S = \frac{0,01}{0,028} \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{10^5}{0,5 \cdot 10^5} = 2,06 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S = 2,06$ Дж/К.

Пример 2.10. Найти постоянные a и b Ван-дер-Ваальса для одного моля хлора, если известно, что критическая температура хлора $T_{\text{кр}} = 417$ К, а критическое давление $p_{\text{кр}} = 7,6$ МПа. Определить внутреннюю энергию газа, если при температуре $T = 273$ К он занимает объем $V = 2$ л.

Решение

Физическую систему составляет один моль реального газа, уравнение состояния которого можно записать в виде

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)\left(V_\mu - b\right) = RT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; V_μ – объем одного моля газа

$$V_\mu = \frac{V}{\mu}.$$

Критические параметры определяются через постоянные a и b следующим образом:

$$p_{\text{кр}} = a / (27\, b^2); \qquad T_{\text{кр}} = 8a / (27Rb); \qquad V_{\text{кр}} = 3b.$$

Выражая a и b через критическую температуру и критическое давление, находим

$$a = \frac{27R^2T_{\text{кр}}^2}{64p_{\text{кр}}}; \quad b = \frac{RT_{\text{кр}}}{8p_{\text{кр}}}.$$

Внутренняя энергия реального газа для 1 моля вещества

$$U = \frac{i}{2}RT - \frac{a}{V_\mu} = \frac{i}{2}RT - \frac{27R^2T_{\text{кр}}^2\mu}{64p_{\text{кр}}V},$$

где $i = 5$ – число степеней свободы; T – температура газа.

Подставляя числовые значения, получаем:

$$a = \frac{27 \cdot 8,31^2 \cdot 417^2}{64 \cdot 7,6 \cdot 10^6} = 0,667\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}}; \quad b = \frac{8,31 \cdot 417}{8 \cdot 7,6 \cdot 10^6} = 5,69 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}};$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 417 - \frac{27 \cdot 8,31^2 \cdot 417^2 \cdot 71 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot 7,6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 5,34 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Ответ: $a = 0,667$ Н · м^4/моль; $b = 5,69 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль; $U = 5,34$ кДж.

Пример 2.11. Найти добавочное давление Δp внутри мыльного пузыря диаметром d = 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Решение

Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки очень мала, диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$\Delta p = 2\frac{2\alpha}{R},$$

где R – радиус пузыря.

Так как $R = \frac{d}{2}$, то $\Delta p = \frac{8\alpha}{d}$.

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку при постоянной температуре, увеличить площадь ее поверхности на ΔS, выражается формулой

$$A = \alpha\Delta S = \alpha\left(S - S_0\right).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря, S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0, получаем

$$A = \alpha S = 2\pi d^2\alpha.$$

Произведя вычисления, получим

$$\Delta p = \frac{8\cdot 40\cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2 \text{ Па},$$

$$A = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2\cdot 40\cdot 10^{-3} = 2{,}5\cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: Δp = 3,2 Па; $A = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1 Баллон объемом V = 16 л содержит углекислый газ. Давление p газа равно 1,5 МПа, а температура T = 320 К. Определить массу газа в баллоне.

2.2 В баллоне находится газ при температуре T_1 = 460 К. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в 1,4 раза?

2.3 Давление p_1 воздуха внутри плотно закрытого пробкой сосуда при температуре t_1 = 11 °С равно 0,11 МПа. При нагревании сосуда пробка вылетела. Определить, до какой температуры t_2 нагрет сосуд, если известно, что пробка вылетает при давлении воздуха в сосуде p_2 = 0,14 МПа.

2.4 В цилиндр длиной $l = 21$ м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью $S = 220$ см^2. Определить силу F, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1 = 12$ см от дна цилиндра.

2.5 В баллоне вместимостью $V = 19$ л находится аргон под давлением $p_1 = 620$ кПа и при температуре $T_1 = 315$ К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до $p_2 = 450$ кПа, а температура установилась $T_2 = 280$ К. Определить массу m аргона, взятого из баллона.

2.6 Баллон вместимостью $V = 7$ л содержит смесь гелия и водорода при давлении $p = 700$ кПа. Масса m смеси равна 5 г, массовая доля гелия ω_1 равна 0,7. Определить температуру T смеси.

2.7 Колба вместимостью $V = 0{,}7$ л содержит газ при нормальных условиях. Определить число N молекул газа, находящихся в колбе.

2.8 При какой температуре T молекулы азота имеют такую же среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$, как молекулы водорода при температуре $T_1 = 140$ К?

2.9 Определить концентрацию n молекул кислорода, находящегося в сосуде вместимостью $V = 3$ л. Количество вещества кислорода $\nu = 0{,}5$ моль.

2.10 Чему равна энергия E теплового движения всех молекул, содержащихся в $m = 25$ г азота при температуре $t = 17$ °C? Какая часть этой энергии приходится на энергию поступательного движения и какая на энергию вращательного движения?

2.11 В атмосфере находятся частицы пыли массой $m = 8 \cdot 10^{-23}$ кг. Найти, во сколько раз отличаются их концентрации на высотах $h_1 = 4$ м и $h_2 = 45$ м. Воздух находится при нормальных условиях.

2.12 На какой высоте h давление p воздуха составляет 85 % от давления p_0 на уровне моря. Температуру t считать постоянной и равной 0 °C.

2.13 Какая часть молекул кислорода при $t = 15$ °C обладает скоростями от $v = 110$ м/с до $v + \Delta v = 111$ м/с?

2.14 Найти среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул азота при давлении $p = 0{,}2$ Па и температуре $T = 160$ К.

2.15 Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 120$ см^2 за $\tau = 12$ с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен 1,27 кг/м^4. Температура азота $t = 27$ °C, средняя длина свободного пробега молекул азота $\langle l \rangle = 10^{-5}$ см.

2.16 Вычислить коэффициент внутреннего трения η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии D для него при этих условиях составляет $8{,}9 \cdot 10^{-2}$ м^2/с.

2.17 Найти коэффициент теплопроводности λ воздуха при температуре $t = 15$ °C, если известен эффективный диаметр d молекулы воздуха.

2.18 Азот массой $m = 7$ кг, нагретый на $T = 160$ K, сохранил неизменным объем V. Найти количество теплоты Q, сообщенное газу, изменение внутренней энергии ΔU и совершенную газом работу A.

2.19 Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты $Q = 25$ кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

2.20 Объем V водорода при изотермическом расширении при температуре $T = 350$ K увеличился в 4 раза. Определить работу A, совершенную газом, и теплоту Q, полученную газом при этом процессе. Масса m водорода составляет 200 г.

2.21 На нагревание кислорода массой $m = 160$ г на $t = 12$ °C было затрачено количество теплоты $Q = 1{,}76$ кДж. Как протекал процесс: при постоянном объеме или постоянном давлении?

2.22 Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 16$ г и водород – массой $m_2 = 6$ г.

2.23 При адиабатическом сжатии кислорода массой $m = 24$ г его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 9$ кДж. Температура при этом повысилась до $T_2 = 980$ K. Найти повышение температуры ΔT и конечное давление газа p_2, если начальное давление $p_1 = 210$ кПа.

2.24 Двухатомный газ, находящийся при температуре $t_1 = 20$ °C, изотермически сжимают так, что его объем V_1 уменьшается в 3 раза. Затем газ расширяют адиабатически до начального давления p_1. Найти температуру T_2 в конце адиабатического расширения.

2.25 Газ, совершающий цикл Карно, получает от нагревателя теплоту $Q_1 = 15$ кДж. Определить температуру теплоотдатчика T_1, если при температуре теплоприемника $T_2 = 275$ K работа цикла составляет $A = 7$ кДж.

2.26 Найти изменение энтропии ΔS при изобарном расширении $m = 10$ г аргона от объема $V_1 = 12$ л до объема $V_2 = 30$ л.

2.27 Азот массой $m = 16{,}5$ г изотермически расширяется от объема $V_1 = 3$ л до объема $V_2 = 9$ л. Найти прирост энтропии ΔS.

2.28 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 7{,}25 \cdot 10^4$ Дж. Температура нагревателя $t_1 = 120$ °C, температура холодильника $t_2 = 5$ °C. Определить: КПД η машины; количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя; количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

2.29 Найти изменение энтропии ΔS при превращении $m = 11$ г льда, взятого при $t_1 = -23$ °C, в пар при $t_2 = 100$ °C.

2.30 Гелий массой m = 1,6 г был адиабатно расширен в 5 раз и затем изобарно сжат до первоначального объема. Найти изменение энтропии ΔS в ходе этих процессов.

2.31 Водород совершает цикл Карно. Найти КПД цикла, если при адиабатическом расширении объем газа увеличивается в 4 раза.

2.32 Найти критический объем $V_{кр}$ веществ: 1) кислорода массой m_1 = 0,5 г; 2) воды массой m_2 = 1,2 г.

2.33 Определить давление p, которое будет производить кислород, рассматриваемый как реальный газ, содержащий 1 моль вещества, если он будет занимать объем V = 0,5 л при температуре T = 320 К. Сравнить полученный результат с давлением, вычисленным по уравнению Менделеева – Клапейрона.

2.34 Углекислый газ массой 10 г находится в сосуде вместимостью V = 1 л. Принимая a = 0,36 Н·м^4/моль^2 и b = 4,28·10^{-5}м^3/моль, определите: 1) собственный объем V' молекул газа; 2) внутреннее давление p' газа.

2.35 Какое количество теплоты надо сообщить ν молям газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 его температура не изменилась?

2.36 Воздушный пузырек диаметром d = 0,02 мм находится на глубине h = 25 см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке при нормальном атмосферном давлении. Поверхностное натяжение воды α = 73 мН/м, а ее плотность ρ = 1 г/см^3.

2.37 Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром d = 6 см?

2.38 В капиллярной трубке, радиус канала которой r = 0,3 мм, жидкость поднялась на h = 4,25 см. Определить плотность жидкости ρ, если ее поверхностное натяжение α = 0,071 Н/м?

3 ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1 Электростатика. Постоянный ток

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Электрический заряд − это физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитных взаимодействий, т.е. взаимодействий между заряженными частицами или телами.

Электрические заряды делятся на положительные и отрицательные. Положительным зарядом обладают стабильные элементарные частицы − протоны и позитроны, а также ионы атомов металлов. Стабильными носителями отрицательного заряда являются электрон и антипротон.

Заряды одинакового знака называются одноименными, а противоположного −разноименными.

В обычных условиях макроскопические тела являются электрически нейтральными.Если электрическая нейтральность тела нарушена, то оно называется ***наэлектризованным***. Для электризации тела необходимо, чтобы на нем был создан избыток или недостаток электронов, или ионов одного знака.

Электризация тел осуществляется различными способами:

1) соприкосновением − при тесном контакте небольшая часть электронов переходит с одного вещества, у которого связь электронов с телом относительно слаба, на другое;

2) трением − при этом увеличивается площадь соприкосновения тел, и электризация усиливается;

3) через влияние − на основе явления электростатической индукции, т. е. наведения электрического заряда в веществе, помещенном в постоянное электрическое поле;

4) под действием света − на основе фотоэлектрического эффекта, или фотоэффекта; под действием света из проводника могут вылетать электроны в окружающее пространство, в результате чего проводник заряжается.

Закон сохранения электрического заряда: в замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const},$$

где $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов; n– число зарядов.

В природе никогда и нигде не возникает электрический заряд одного знака. Тела, имеющие заряды одинакового знака (одноименно заряженные), взаимно отталкиваются, а тела, имеющие заряды разного знака (разноименно заряженные), взаимно притягиваются.

Проводники − тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему. ***Проводники первого рода***(металлы) − перенесение в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями; ***Проводники второго рода***(например, расплавленные соли, растворы кислот) − перенесение в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

Диэлектрики(например, стекло, пластмассы) − тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды.

Полупроводники(например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Единица электрического заряда −кулон (Кл) − электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с: 1 Кл = 1 А · 1 с.

Закон Кулона (для однородной изотропной среды): сила взаимодействия двух неподвижных точечных заряженных тел направлена вдоль прямой, соединяющей эти тела,прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2},$$

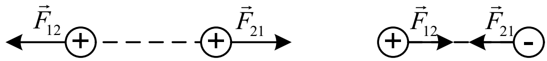
где F– сила электрического взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ε– диэлектрическая проницаемость среды(для вакуума $\varepsilon = 1$);r– расстояние между зарядами.

Диэлектрическая проницаемость среды всегда больше единицы ($\varepsilon > 1$), поэтому сила, с которой взаимодействуют заряды в диэлектрике, меньше силы взаимодействия их на том же расстоянии в вакууме.

Кулоновские силы, как и гравитационные силы, подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Кулоновская сила является центральной силой. Вектор силы $\vec{F}_{21}$, действующей со стороны второго заряда на первый, направлен в сторону второго заряда, если заряды разных знаков, и в противоположную, если заряды одного знака.

Электростатические силы отталкивания принято считать положительными, силы притяжения − отрицательными.



Линейная плотностьзаряда τ − величина, равная отношению заряда, распределённого по нити, к длине нити (цилиндра):

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

Поверхностная плотностьзарядаσ − величина, численно равная заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности:

$$\sigma = \frac{d\,q}{d\,S}.$$

Объемная плотностьзаряда ρ − величина, равная отношению заряда, распределённого по телу, к объему этого тела:

$$\rho = \frac{d\,q}{dV}.$$

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать кулоновская сила. Значит, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует силовое поле, которое названо электрическим.

Электрическое поле −особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами.

Электрическое поле − одна из частей электромагнитного поля, особенностью которой является то, что это поле создается электрическими зарядами или заряженными телами, а также действует на эти объекты с некоторой силой. Электрическое поле заряда материально: оно существует независимо от нас в пространстве, обладает определенными свойствами, главное из которых − действие на другие электрические заряды независимо от того, движутся они или нет.

Электрическое поле описывается определенными силовыми (напряженность) и энергетическими (потенциал) характеристиками.

Электрическое поле неподвижных в данной системе отсчета электрически заряженных частиц или тел называется ***электростатическим***. Оно не меняется во времени и является стационарным электрическим полем.

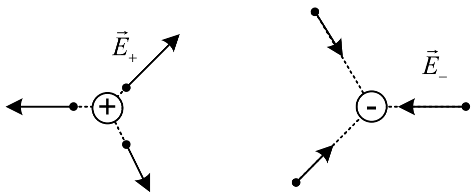
Электростатическое поле существует в пространстве, окружающем электрические заряды (создается только электрическими зарядами), и неразрывно с ними связано. В общем случае электрическое и электромагнитное поля изменяются с течением времени и являютсяпоэтому переменными, или нестационарными, полями.

Напряжённость электрического поля $\vec{E}$ –силовая характеристика поля, физическая величина, равная отношению силы, действующей на помещенный в данную точку поля точечный электрический заряд, к этому заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд q_0, помещённый в данную точку поля.Единица измерения напряженности электрического поля в СИ 1 Н/Кл, или 1 В/м.

Напряженность поля − величина векторная. Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, и противоположно направлению силы, действующей на отрицательный заряд. Вектор напряженности в любой точке электрического поля направлен вдоль прямой, соединяющей эту точку и заряд, причем если заряд положительный ($q > 0$), то вектор $\vec{E}$ направлен от заряда, а если заряд отрицательный ($q < 0$), то к заряду.



Сила, действующая на заряд, помещенный в электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$,

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Если электрическое поле создано электрическими зарядами в однородном диэлектрике, то при заданном расположении электрических зарядов в пространстве напряженность электростатического поля в такой среде меньше, чем в вакууме:

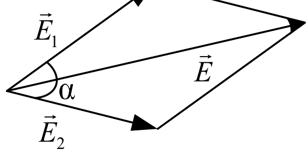
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где E_0− напряженность электрического поля, создаваемого данной системой зарядов в вакууме; ε − диэлектрическая проницаемость среды.

Силовые линии напряженности электрического поля – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции. Линии магнитной индукции всегда замкнуты.

Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей: напряжённость результирующего поля, созданного двумя и более источниками поля, равна векторной сумме напряжённостей складываемых полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$



В случае двух электрических полей с напряжённостями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ модуль вектора напряжённости

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1E_2\cos\,\alpha},$$

где α– угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Поток вектора напряжённостиэлектрического поля:

а) через элементарную площадку dS

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS,$$

где E_n– проекция вектора магнитной индукции на направление нормали к площадке dS.

б) через произвольную поверхность, помещённую в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E\,dS\cos\alpha,$$

где α– угол между вектором напряжённости поля и нормалью к элементу поверхности; dS – площадь элемента поверхности;

в) через плоскую поверхность S, помещённую в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

Поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность S

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\alpha\,dS,$$

где интегрирование ведётся по всей поверхности.

Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме. Поток вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую электрические заряды q_1, q_2, q_n,

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключённых внутри этой замкнутой поверхности; n– число зарядов.

Напряжённость поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}.$$

Напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R и зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r<R$)

$$E = 0;$$

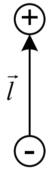
б) на поверхности сферы ($r = R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R^2};$$

в) вне сферы ($r>R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}.$$

Электрический диполь **–** система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ($+q$, $-q$), расстояние l (***плечо диполя***), между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.



Произведение $\vec{p} = |q|\vec{l}$ называется ***электрическиммоментом диполя*** (дипольным моментом), прямая линия, соединяющая заряды, ***−осью диполя***.

Напряжённость поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Напряжённость поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноимённо заряженными плоскостями, с одинаковой по модулю поверхностной плотностью заряда (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Напряжённость поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от оси:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\tau}{r}\ (r \ge R);\ E = 0\ \ (r \le R).$$

Напряжённость поля, создаваемого объемно заряженным шаром,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\ (r \ge R);\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{R^3}r' \qquad (r \le R).$$

Циркуляция вектора напряжённости электрического поля − величина, численно равная работе по перемещению единичного точечного положительного заряда вдоль любого замкнутого контура. Циркуляция выражается интегралом и в случае электростатического поля равна нулю:

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = \oint_L E_l\,dl = 0,$$

где E_l– проекция вектора напряжённости в данной точке контура на направление касательной к контуру в той же точке.

Потенциал электрического поля,являясь энергетической характеристикой электростатического поля,есть величина, равная отношению потенциальной энергии точечного положительного заряда, помещённого в данную точку поля, к этому заряду:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}.$$

Потенциал электрического поля есть величина, равная отношению работы силы по перемещению точечного положительного заряда из данной точки в бесконечность к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Потенциал электрического поля в бесконечности от источника поля условно принимается равным нулю.

Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом q на расстоянии r от точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R и зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы и на ее поверхности ($r \leq R$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R};$$

б) вне сферы ($r > R$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

Во всех приведенных формулах для потенциала сферы ε есть диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, окружающего сферу.

Потенциал электрического поля, созданного системой зарядов, в данной точке согласно принципу суперпозиции равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами q_1, q_2, ...,q_n:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i,$$

где φ_i– потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме i-го.

Связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

В случае электрического поля, обладающего центральной или сферической симметрией, эта связь выражается формулой

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Для однородного поля, т.е. поля, напряжённость которого в каждой его точке одинакова по модулю и направлению,

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек двух эквипотенциальных поверхностей; d – расстояние между этими поверхностями вдоль силовой линии.

Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2,

$$A = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), \text{ или } A = q\int_1^2 E_l\,dl,$$

где E_l– проекция вектора напряжённости на направление перемещения; dl – модуль перемещения.

В случае однородного поля формула для работы принимает вид

$$A = qEl\cos\alpha,$$

гдеl– модуль перемещения; α– угол между направлениями векторов напряженности и перемещения.

Напряжённость и потенциал поля диполя в точке, лежащей на оси диполя,

$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}, \quad \varphi = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где ε– диэлектрическая проницаемость среды; r– модуль радиус-вектора, проведённого от центра диполя к рассматриваемой точке поля.

Напряжённость и потенциал поля диполя в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленном из его середины,

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}, \quad \varphi = 0.$$

Механический момент, действующий на диполь в однородном электрическом поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right], \quad \text{или} \quad M = pE\sin\alpha,$$

где α– угол между направлениями векторов дипольного момента и напряжённости поля.

Электрическое поле в веществе. Внесение диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика или, иными словами, к поляризации диэлектрика.

Поляризация диэлектрика – *процесс* ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

Диэлектрики делят на три группы и, соответственно, различают три вида поляризации:

−*электронная*, или деформационная, поляризация диэлектрика с неполярными молекулами (N_2, H_2, O_2, CO_2, CH_4, ...), заключается в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;

−*ориентационная*, или дипольная, поляризация диэлектрика с полярными молекулами (H_2O, NH_3, SO_2, CO,...) −диэлектрика, молекулы которого имеют асимметричное строение, т.е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают, заключается в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю.

−*ионная* поляризация диэлектриков с ионными кристаллическими решетками (NaCl, КС1, KBr,...), заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных − против поля, приводящем к возникновению дипольных моментов.

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле он поляризуется, т. е. приобретает отличный от нуля дипольный момент

$$\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i ,$$

где $\vec{p}_i$ −дипольный момент *i*-молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной −***поляризованностью,*** определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i ,$$

где $\vec{p}_i$ – электрический момент *i*-й молекулы; *N*– число молекул, содержащихся в объёме ΔV.

Связь поляризованности с напряжённостью поля в диэлектрике

$$P = \chi \varepsilon_0 E,$$

где χ–***диэлектрическая восприимчивость*** диэлектрика, величина безразмерная, характеризующая свойства диэлектрика.

Связь диэлектрической проницаемости с диэлектрической восприимчивостью

$$\varepsilon = 1 + \chi .$$

Связанный заряд – нескомпенсированный заряд, появляющийся в результате поляризации диэлектрика. Если в однородное внешнее электрическое поле $\vec{E}_0$ (создаваемое двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями) внести пластинку из однородного диэлектрика, то произойдет смещение зарядов. В результате этого на грани диэлектрика, обращенного к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на противоположной − отрицательного заряда с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля $\vec{E}'$, создаваемого *связанными зарядами*,которое направлено против внешнего поля $\vec{E}_0$, создаваемого *свободными зарядами*,и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' .$$

Поверхностная плотность связанных зарядов равна поляризованности:

$$\sigma' = P .$$

Напряжённость среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряжённостью E_0 внешнего поля соотношениями:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Диэлектрическая проницаемость ε – величина, показывающая, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком.

Вектор электрического смещения $\vec{D}$ характеризует электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами* (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при *наличии диэлектрика.*

Вектор электрического смещения можно выразить как

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} .$$

Электрическое смещение для электрически изотропной средысвязано с напряжённостью поля соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \, \vec{E} .$$

Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в веществе.Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряды $q_1, q_2, ..., q_n$,

$$\Phi_D = \oint_S D_n \, dS = \sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

где D_n– проекция вектора электрического смещения на направление нормали к элементу поверхности; $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма свободных зарядов, заключённых внутри замкнутой поверхности; n – число зарядов. Поток вектора электрического смещения определяется аналогично потоку вектора напряжения электрического поля.

Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) будут перемещаться: положительные − по полю, отрицательные − против поля. На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом − избыток отрицательного. Эти зарядыназываются ***индуцированными.***

Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется ***электростатическойиндукцией.***

Электрическая ёмкость уединенного проводника или конденсатора

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi},$$

где Δq– заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $\Delta\varphi$– изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Емкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Емкость также не зависит от заряда проводника и его потенциала.

Единица электроемкости −фарад (Ф).

Емкость уединенной проводящей сферы радиусом R, находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R.$$

Устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладать большой емкостью, называются ***конденсаторами***.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок),разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияния окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делят наплоские, цилиндрические и сферические.

Электрическая ёмкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0\,\varepsilon\,\frac{S}{d},$$

где S– площадь пластины; d– расстояние между пластинами.

Электрическая ёмкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)},$$

гдеl– длина, аr_1 и r_2 – радиусы полых коаксиальных цилиндров.

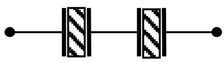
Электрическая ёмкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \, \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 – радиусы концентрических сфер.

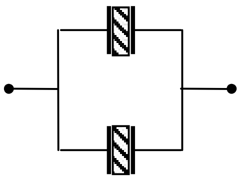
Конденсаторы характеризуются *пробивным напряжением* −разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит***пробой*** −электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Емкость батареи конденсаторов при *последовательном*соединении:



а) в общем случае $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \; ... \; + \frac{1}{C_n}$;

б) в случае двух конденсаторов $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.



Емкость батареи конденсаторов при *параллельном* соединенииравна сумме емкостей отдельных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n.$$

Сила притяжения пластин конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S E^2}{2d^2} = \frac{q^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Энергия системы *n*неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \, ,$$

где φ_i − потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i,всеми зарядами, кроме *i*-го.

Энергия заряженного уединенного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где Q–заряд конденсатора; C –его емкость; $\Delta\varphi$– разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} S\,d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V,$$

где S– площадь одной пластины; U– разность потенциалов между пластинами; V– объём конденсатора.

Объёмная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

гдеE– напряжённость электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε; D– электрическое смещение.

Электрический ток– любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: положительные – по полю, отрицательные – против поля, т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый *током проводимости*.Если же упорядоченное движение электрических зарядов осуществляется перемещением в пространстве заряженного макроскопического тела,то возникает так называемый *конвекционный ток.*

Для возникновения и существования электрического тока необходимо, с одной стороны, наличие свободных *носителей тока*–заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно, а с другой –*наличие электрического поля,* энергия которого, каким-то образом восполняясь, расходовалась бы на их упорядоченное движение. За направление тока *условно* принимают направление движения *положительных зарядов.*

Сила тока, скалярная физическая величина,определяется количеством электричества, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется ***постоянным.***

Единица силы тока –ампер (А).

Плотность тока– векторная величина, измеряемая отношением силы тока к единице площади поперечного сечения проводника,

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением движения положительных зарядов.

Плотность тока в проводнике

$$\vec{j} = n q \langle \vec{v} \rangle,$$

где n– концентрация носителей заряда; $\langle \vec{v} \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике.

Для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Такие устройства называются *источниками тока.*Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются *сторонними.*

Количественной характеристикой сторонних сил (источника тока) является электродвижущая сила (ЭДС).

Электродвижущей силойназывается физическая величина, численно равная отношению работы сторонних сил по перемещению заряда qвдоль цепи к значению этого заряда:

$$\varepsilon = \frac{A_c}{q}.$$

Электродвижущая сила выражается в вольтах (1 В = 1 Дж/Кл).

Работа электрического тока по перемещению заряда по проводнику совершается кулоновскими и сторонними силами, поэтому полная работа равна:

$$A = A_e + A_c.$$

НапряжениемU на участке *1−2* называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

Понятие напряжения является *обобщением* понятия разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов в том случае, если на этом участке не действует ЭДС, т.е. сторонние силы отсутствуют.

В случае электростатического поля, когда на участке не приложена ЭДС ($\varepsilon = 0$),напряжение между двумя точками равно разности потенциалов:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

При разомкнутой электрической цепи (I= 0) напряжение равно ЭДС источника:

$$U = \varepsilon.$$

Единица напряжения в СИ − вольт (В).

Однородный участок цепи – участок цепи, не содержащий источника тока, т.е. не содержащий ЭДС.

Закон Ома для однородного участка цепи: сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

где R– электрическое сопротивление проводника, единица измерения сопротивления– ом(Ом).

Величина

$$G = \frac{1}{R}$$

называется ***электрической проводимостью***проводника. Единица проводимости –сименс(См).

Сопротивление проводников зависит от его температуры, размеров и формы, материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного линейного проводника длинойlи площадью поперечного сечения S:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, характеризующий материал проводника и называемый ***удельным электрическим сопротивлением.***

Единица удельного электрического сопротивления –ом-метр(Ом·м).

Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\, t),$$

где ρ_0 и ρ– удельные сопротивления, соответственно, при 0 °С и при температуре t (по шкале Цельсия); α– температурный коэффициент сопротивления.

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется ***удельной электрической проводимостью*** вещества проводника,

$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме: плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля в данной точке проводника:

$$\vec{j} = \gamma\, \vec{E}.$$

Закон Ома:

а) для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R + r};$$

б) для замкнутой цепи, содержащей ЭДС,

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где $(\varphi_1 – \varphi_2)$ –разность потенциалов на концах участка цепи;ε_{12}– ЭДС источников тока, входящих в участок; R – внешнее сопротивление; r − внутреннее сопротивление источника тока;ε– ЭДС всех источников тока цепи.

Сопротивление проводников при последовательном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i .$$

Сопротивление проводников при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где n– число проводников;R_i– сопротивление i-го проводника.

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n– число токов, сходящихся в узле;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i ,$$

где n – число участков, содержащих активное сопротивление;I_i– сила тока на i-м участке цепи; R_i– сопротивление i-го участка; k– число участков, содержащих источники тока;ε_i– ЭДС источников тока на i-м участке.

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t,

$$A = I U t.$$

Мощность тока

$$P = U I = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Джоуля–Ленцаопределяется соотношением:

$$Q = I^2 R t = U I t = \frac{U^2}{R} t ,$$

где Q– количество теплоты, выделяющееся в участке цепи постоянного тока за время t. Закон Джоуля–Ленца справедлив при условии, что участок неподвижен и в нём не протекают химические реакции.

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2,$$

где w– удельная тепловая мощность тока, т.е. количество теплоты, выделяемое в единицу времени в единице объема проводника при протекании в нем тока.

Коэффициент полезного действия (КПД) источника тока показывает, какую часть полной работы A составляет полезная A_1:

$$\eta = \frac{A_1}{A} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r},$$

где U− напряжение на зажимах внешней цепи; ε– ЭДС источника; R − внешнее сопротивление; r − внутреннее сопротивление источника тока.

Основные законы электрического тока в ***классической теории проводимости металлов***.

Закон Ома в дифференциальной форме. Плотность тока в металлическом проводнике

$$j = ne\langle v\rangle = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle}E,$$

откуда плотность тока пропорциональна напряженности поля. Коэффициент пропорциональности между j и E есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle},$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

Закон Джоуля−Ленца в дифференциальной форме. К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_k\rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\langle l\rangle^2}{2m\langle u\rangle^2}E^2.$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

Удельная тепловая мощность тока − энергия, передаваемая решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle}E^2.$$

Закон Видемана–Франца

$$\frac{\lambda}{\gamma} = 3\,\frac{k^2}{e^2}T,$$

где λ– коэффициент теплопроводности; γ– удельная проводимость материала проводника; k– постоянная Больцмана; e– заряд электрона; T– термодинамическая температура.

В поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум, называется ***работой выхода.***

Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных («электронное облако»), и вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует ***двойной электрический слой,***поле которого подобно полю плоского конденсатора.

Разность потенциалов $\Delta\varphi$в этом слое, называемая ***поверхностным скачком потенциала,*** определяется работой выхода электрона из металла:

$$\Delta\varphi = \frac{A}{e}\,.$$

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление испускания электронов, или ***электронной эмиссии.*** В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают *термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную* и *автоэлектронную эмиссии.*

Термоэлектронная эмиссия–испускание электронов нагретыми металлами.

Зависимость термоэлектронного тока I от анодного напряжения в области малых положительных значений U описывается ***законом трех вторых:***

$$I = BU^{3/2}\,,$$

гдеB — коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При увеличении анодного напряжения ток возрастает до некоторого максимального значения $I_{нас}$,называемого ***током насыщения***, когдапочти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее возрастание напряженности поля не может привести к увеличению термоэлектронного тока, то есть плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Фотоэлектронная эмиссия–эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского).

Вторичная электронная эмиссия– испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов.

Автоэлектронная эмиссия– это эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля.

Газ становится проводником электричества, когда некоторая часть его молекул ***ионизируется***,т.е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны.

Газовый разряд – прохождение электрического тока через газы.

Плотность тока в газе при отсутствии насыщения

$$j = q n \left(u_{+} + u_{-}\right) E,$$

где q– заряд иона; n– концентрация ионов; u_{+}, u_{-}– подвижности положительных и отрицательных ионов.

Плотность тока насыщения в газе между плоскими электродами

$$j_{\text{н}} = q \Delta n d,$$

где q – заряд иона; Δn– число пар ионов, создаваемых ионизатором в единицу времени в единице объёма газа, $\Delta n = N/(Vt)$; d– расстояние между электродами.

Процесс рекомбинации: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул.

Разряды,существующие только под действием внешних ионизаторов, называются ***несамостоятельными.***Разрядв газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется ***самостоятельным.***

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда: *тлеющем, искровом, дуговом* и *коронном.*

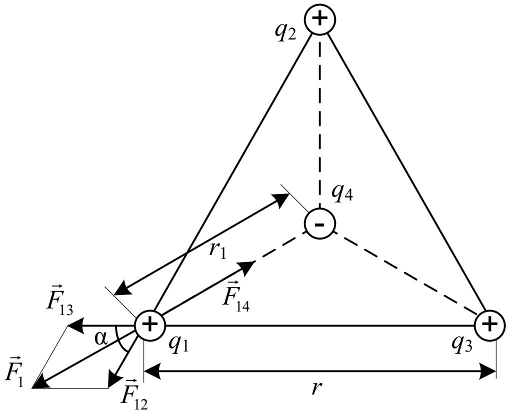
Плазма **–** сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Различают *высокотемпературную плазму*, возникающую при сверхвысоких температурах, и *газоразрядную плазму,*возникающую при газовом разряде. Плазма характеризуется *степенью ионизации*α − отношением числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1.1. Три одинаковых положительных заряда, по 1 нКл каждый, расположены в вершине равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд надо поместить в центр треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

Решение

Все три заряда находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, при каких условиях будет находиться в равновесии один из трёх зарядов, например q_1.



Заряд будет находиться в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{14} = 0 ,$$

или $F_1 – F_{14} = 0$. Выразив F_1 через F_{12} и F_{13} и учитывая, что $F_{12} = F_{13}$, получим

$$F_{14} = F_{12}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}.$$

Применив закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3$, запишем:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\varepsilon\, r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{\varepsilon\, r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ε– диэлектрическая проницаемость среды. В нашем случае ε = 1. Из этого выражения получим

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{\varepsilon\, r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos 30°} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

С учётом этого $q_4 = q_1/1{,}73 = 0{,}58$ нКл.

О т в е т: $q_4 = 0{,}58$ нКл.

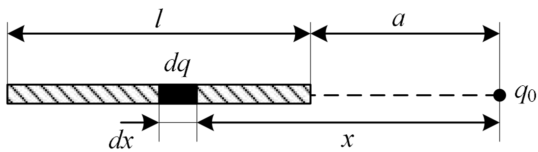
Пример 3.1.2. Тонкий прямой стержень длиной 15 см равномерно заряжен с линейной плотностью заряда 0,1 мКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии 10 см от ближайшего конца находится точечный заряд

q_0 = 10 нКл. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

Решение

Здесь нельзя определить силу взаимодействия зарядов непосредственно по закону Кулона, так как заряд, распределённый по стержню, нельзя считать точечным.

Чтобы применить закон Кулона, рассмотрим бесконечно малый элемент длины dx стержня, находящийся на расстоянии x от заряда q_0. Заряд этого элемента$dq = \tau dx$.



По закону Кулона на *точечный*заряд q_0 со стороны *точечного*заряда dq будет действовать сила

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau\, dx}{x^2}.$$

Со стороны всех остальных бесконечно малых элементов стержня на заряд q_0 также будут действовать элементарные силы, направленные в ту же сторону, что и dF. Сложив их модули, найдём искомую силу, равную результирующей силе действия всех элементов стержня на заряд q_0:

$$F = \int dF = \int_a^{a+\ell} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau\, dx}{x^2}.$$

Вынеся постоянные множители за знак интеграла, получим

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0\tau \int_a^{a+\ell}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0\tau\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell}\right).$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: ℓ = 0,15 м, a = 0,1 м, $q_0 = 1\cdot 10^{-8}$ Кл, $\tau = 1\cdot 10^{-7}$ Кл/м, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Подставив эти значения и выполнив вычисления, найдём

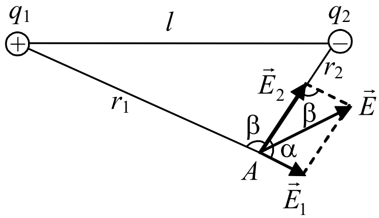
$$F = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot 1\cdot 10^{-8}\cdot 1\cdot 10^{-7}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}1+0{,}15}\right) = 5\cdot 10^{-5}\,\text{Н}.$$

О т в е т: $F = 5\cdot 10^{-5}$ Н.

Пример 3.1.3.Расстояние между двумя точечными зарядами q_1 = 5 нКл и q_2 = –4нКл, расположенными в вакууме, равно 15 см. Определить напряженность поля, создаваемого этими зарядами в точке, удаленной от первого заряда на расстояние 10 см и от второго заряда на 7 см.

Решение

Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности электрических полей в рассматриваемой точке, которые создавались бы каждым из зарядов при отсутствии других (направления векторов показаны на рисунке).



Модули напряженностей электрических полей, создаваемых в вакууме точечными зарядами q_1 и q_2,

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}, \; E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (1)$$

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по формуле, которая следует из теоремы косинусов (учитывая, что для используемого при сложении векторов параллелограмма cosα = – cos β):

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}. \qquad (2)$$

По теореме косинусов для треугольника q_1Aq_2

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\beta,$$

откуда следует, что

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Вычислим значениеcosα:

$$\cos\alpha = \frac{(0{,}15)^2 - (0{,}1)^2 - (0{,}07)^2}{2\cdot 0{,}07\cdot 0{,}1} = 0{,}54.$$

Подставив (1) в формулу (2), получим искомую напряженность:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{2|q_1||q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

Размерность вычисляемой физической величины по структуре формулы совпадает с аналогичной формулой для напряженности поля заряда, поэтому проверку единиц для нее можно не проводить.

Произведем вычисления, предварительно переведя все значения единиц в систему СИ:

$$E=\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{\left(5\cdot 10^{-9}\right)^2}{\left(0{,}1\right)^4}+\frac{\left(4\cdot 10^{-9}\right)^2}{\left(0{,}07\right)^4}+\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{\left(0{,}1\right)^2\left(0{,}07\right)^2}\cdot 0{,}54}=$$

$$=10{,}5\ \text{кВ/м}.$$

О т в е т: E = 10,5 кВ/м.

Пример 3.1.4. Определить начальную скорость v_0 сближения протонов, находящихся на очень большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое они могут сблизиться, равно 10^{-11} см.

Решение

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Он будет находиться посередине отрезка, соединяющего эти две одинаковые частицы. Относительно центра масс протоны будут всегда иметь одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорости v_1 каждой частицы равны половине начальной скорости v_0, т.е. $v_1=v_0/2$.

Применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия изолированной системы постоянна:

$$E = \text{Т} + \text{П},$$

где Т– сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; П– потенциальная энергия системы зарядов.

В начальный момент протоны находились на большом расстоянии, поэтому их потенциальной энергией можно пренебречь ($\text{П}_1 = 0$). Полная энергия будет равна кинетической энергии протонов:

$$E = \text{Т}_1. \qquad (1)$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, их скорости и кинетические энергии будут равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии протонов:

$$E = \text{П}_2. \qquad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$\text{Т}_1 = \text{П}_2. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий протонов:

$$T_1=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=mv_1^2=\frac{mv_0^2}{4}. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия системы двух точечных зарядов, находящихся в вакууме, определяется по формуле

$$\Pi_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}. \quad (5)$$

С учетом равенств (4) и (5) формула (3) примет вид

$$\frac{mv_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}},$$

откуда

$$v_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, где ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м –электрическая постоянная, e = 1,6·10^{-19} Кл – заряд протона, найдем

$$v_0 = \frac{1,6\cdot 10^{-19}}{\sqrt{3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 10^{-13}}} = 2,35\cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

О т в е т: v_0 = 2,35 Мм/с.

Пример 3.1.5. Положительные заряды q_1= 5 мкКл и q_2= 10 нКл находятся в вакууме на расстоянии 2 м друг от друга. Определить работу, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 м.

Решение

Можно положить, что первый заряд q_1остается неподвижным, а второй q_2 под действием внешних сил перемещается в поле, созданном зарядом q_1,приближаясь к нему с расстояния r_1= 2 м до r_2=1м.

РаботаA' внешней силы по перемещению заряда qиз одной точки поля с потенциалом φ_1 в другую, потенциал которой φ_2, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками

$$A' = -A.$$

Это следует из теоремы об изменении кинетической энергии тела: если кинетическая энергия не изменяется (предполагаем это), то полная работа всех сил равна нулю ($A' + A = 0$).

РаботаAсил электрического поля по перемещению заряда выражается формулой

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тогда работаA' внешних сил может быть записана в таком виде:

$$A' = q(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$

Потенциалы точек начала и конца пути выразятся формулами:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и учитывая, что для данного случая переносимый заряд $q = q_2$,получим:

$$A' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Выполним вычисления по полученной формуле, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м –электрическая постоянная:

$$A' = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}22 \cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

О т в е т:$A' = 0{,}22 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 3.1.6. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата пластинка толщиной 5 мм из парафина ($\varepsilon = 2$). Определить поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Решение

Векторы электрического смещения и напряжённости связаны между собой соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризованности диэлектрика. Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то D_n=D и $E_n = E$. Тогда можно записать

$$D = \varepsilon_0 E + P,$$

где $P = \sigma'$, т.е. поляризованностьравна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика. Тогда

$$\sigma' = D - \varepsilon_0 E.$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ и $E = U/d$, где d– расстояние между обкладками конденсатора, найдём

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м –электрическая постоянная, найдем

$$\sigma' = 8{,}85 \cdot 10^{-12}(2 - 1)\frac{1{,}5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл/м}^2.$$

О т в е т: $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м^2.

Пример 3.1.7. Конденсатор емкостью C_1 = 4 мкФ заряжен до напряжения U_1 = 400 В, а конденсатор емкостью C_2 = 5 мкФ заряжен до U_2 = 500 В. Определить напряжение между пластинами конденсатора после соединения их одноименно заряженными пластинами. Какое количество теплоты выделится в результате соединения конденсаторов?

Решение

Если конденсаторы соединены параллельно, то их общая емкость$C = C_1 + C_2$. В соответствии с законом сохранения заряда, заряд эквивалентного конденсатора

$$q = q_1 + q_2\,,$$

где q_1 и q_2– заряды конденсаторов до соединения.

Так как соединялись одноименно заряженные пластины, то искомое напряжение

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}\,.$$

Учитывая, что $q_1 = C_1U_1$ и $q_2 = C_2U_2$, получим:

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 400 + 5\cdot 10^{-6}\cdot 500}{4\cdot 10^{-6} + 5\cdot 10^{-6}} = 455{,}6\ \text{В}.$$

Количество выделившейся теплоты определим, пользуясь законом сохранения и превращения энергии. Энергия конденсаторов до соединения

$$W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2}\,.$$

После соединения

$$W_2 = \frac{CU^2}{2} = \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)U^2.$$

Следовательно, искомое количество теплоты

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} - \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)U^2.$$

Выполнив вычисления, получим:

$$Q = \frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 400^2}{2} + \frac{5\cdot 10^{-6}\cdot 500^2}{2} - \left(\frac{4\cdot 10^{-6} + 5\cdot 10^{-6}}{2}\right)\cdot 455{,}6^{\,2} = 1{,}1\cdot 10^{-2}\,\text{Дж}.$$

Размерность очевидна.

О т в е т: U = 455,6 В; $Q = 1{,}1\cdot 10^{-2}$Дж.

Пример 3.1.8. Определить плотность электрического тока в медном проводнике (удельное сопротивление ρ = 17 нОм·м), если удельная тепловая мощность тока w = 1,7 Дж/(м^3·с).

Решение

Согласно законам Джоуля–Ленца и Ома в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2 = E^2/\rho, \tag{1}$$

$$j = \gamma E = E/\rho, \tag{2}$$

где γ и ρ– соответственно удельные проводимость и сопротивление материала проводника. Из (2) получим, что $E = \rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$j = \sqrt{\frac{1,7}{1,7\cdot 10^{-8}}} = 10^4 \text{ А/м}^3.$$

О т в е т: $j = 10^4$ А/м^3.

Пример 3.1.9. Сила тока в проводнике равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Сопротивление проводника R= 50 Ом. Определить выделившееся за это время количество теплоты.

Решение

Согласно закону Джоуля–Ленца для бесконечно малого промежутка времени

$$dQ = I^2 R\,dt\,.$$

По условию задачи сила тока в проводнике равномерно растет, то есть $I = kt$, где коэффициент пропорциональности $k = (I_{max} - I_0)/\tau = \text{const}$. Тогда можно записать:

$$dQ = k^2 R t^2 dt\,. \tag{1}$$

Проинтегрировав (1) и подставив выражение для k, найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^\tau k^2 R t^2 dt = \frac{1}{3}k^2 R\tau^3 = \frac{1}{3}\frac{\left(I_{max} - I_0\right)^2}{\tau^2}R\tau^3 = \frac{1}{3}R\tau\left(I_{max} - I_0\right)^2.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$Q = \frac{1}{3}\cdot 50\cdot 6\cdot\left(3-0\right)^2 = 900 \text{ Дж}.$$

О т в е т: $Q = 900$ Дж.

Пример 3.1.10.Электрическая лампа горит под напряжением $U = 50$ В и потребляет мощность $P = 500$ Вт. Определить, на сколько градусов нагреются подводящие провода через 1 мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом сечением $S = 1$ мм^2 и половина выделившейся теплоты отдана окружающим телам; число электронов, проходящих через поперечное сечение провода за 1 с; среднюю скорость упорядоченного движения электронов, считая число электронов в проводнике равным числу атомов; силу, действующую на отдельные электроны проводимости.

Решение

Количество теплоты, выделившейся в проводах за время τ, равное $Q = I^2R\tau$, и количество теплоты, пошедшей на нагревание проводника $Q = cm\Delta t$, связаны следующимсоотношением

$$cm\Delta t = \eta I^2 R\tau, \qquad (1)$$

где c– удельная теплоемкость; $m = \rho_м Sl$– масса проводника; $\rho_м$ – плотность меди; η– КПД. Так как $I = P/U$ и $R = \rho l/S$, то из формулы(1) получим:

$$\Delta t = \frac{\eta P^2 \rho \tau}{c \rho_м S^2 U^2} \approx 3{,}8\ °\text{C}.$$

Число электронов, проходящих через поперечное сечение за 1 с,

$$N = \frac{I}{e} = \frac{P}{U\,e} = 6{,}25 \cdot 10^{19}\ \text{с}^{-1}.$$

Среднюю скорость упорядоченного движения электронов найдем из выражения для плотности тока

$$\langle v \rangle = \frac{I}{e n_0 S} = \frac{P}{SU\,e n_0},$$

гдеn_0– число свободных электронов в единице объема;

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0} = \frac{N_A \rho_м}{A},$$

A– атомная масса меди;N_A– число Авогадро. Следовательно,

$$\langle v \rangle = \frac{PA}{e N_A \rho_м S U} = 3{,}74 \cdot 10^{-4}\ \text{м/с}.$$

Сила, действующая на отдельные электроны проводимости,

$$F = eE = e\frac{U}{l} = \frac{e \rho_м \rho}{SU} = 1{,}36 \cdot 10^{-20}\ \text{Н}.$$

Ответ: $\Delta t \approx 3{,}8$ °С, $N = 6{,}25 \cdot 10^{19}\ \text{с}^{-1}$, $\langle v \rangle = 3{,}74 \cdot 10^{-4}$ м/с, $F = 1{,}36 \cdot 10^{-20}$ Н.

Пример 3.1.11. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем V = 375 см^3 и заполнено частично ионизированным водородом.Площадь пластин конденсатора S = 250 см ^{2}. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока, протекающего через конденсатор, достигнет значения I = 2 мкА, если концентрация ионов обоих знаков в газе равна $5{,}3\cdot 10^{7}$ см$^{-3}$? Принять подвижность ионов $u_+ = 5{,}4\cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с), $u_- = 7{,}4\cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с).

Решение

Напряжение на пластинах конденсатора связано с напряженностью однородного электрического поля между пластинами и расстоянием между ними соотношением

$$U = Ed. \qquad (1)$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения для плотности тока

$$j = qn\left(u_+ + u_-\right)E,$$

где q– заряд иона. Отсюда

$$E = \frac{j}{qn\left(u_+ + u_-\right)} = \frac{I}{qn\left(u_+ + u_-\right)S}.$$

Расстояние между пластинами, входящее в формулу (1), найдем из соотношения$d = V/S$.

Подставив выраженияE и d в (1), получим

$$U = \frac{IV}{qn\left(u_+ + u_-\right)S^2}. \qquad (2)$$

Подставив в формулу (2) значения величин и произведя вычисления, получим:

$$U = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}75\cdot 10^{-4}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5{,}3\cdot 10^{13}\cdot\left(5{,}4+7{,}4\right)\cdot 10^{-4}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}} = 110 \text{ В}.$$

Ответ: U = 110 В.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1.1 Два одинаковых металлических шарика имеют заряды q_1= 4,5 и q_2 = 7,5 нКл. Найти силу их взаимодействия после соприкосновения и удаления друг от друга на расстояние 10 см.

3.1.2 Тонкий стержень длиной 20 см равномерно заряжен. Линейная плотность заряда 21 мкКл/м. На продолжении стержня на расстоянии 20 см от ближайшего конца расположен точечный заряд 50 нКл. Найти силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

3.1.3 Вычислить ускорение, сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого на расстоянии 1,6 мм.

3.1.4 Расстояние между точечными зарядами q_1= 4 мкКл и q_2 = –8 мкКл равно 10 см. Найти силу, действующую на точечный заряд q_0= 0,2 мкКл, удаленный на 6 см от первого и на 8 см от второго зарядов.

3.1.5 Два одинаковых шарика массой 10 мг каждый подвешены на нитях длиной 0,3 м, закрепленных в одной точке подвеса. Один из шариков отвели в сторону и сообщили ему заряд. После соприкосновения с другим шариком они разошлись так, что нити образовали угол 60º.Определить величину заряда, сообщенного первому шарику.

3.1.6 Два точечных заряда величиной 1,1 нКл находятся на расстоянии 17 см. С какой силой они действуют на такой же заряд, находящийся на расстоянии 17 см от каждого из них?

3.1.7 В сосуд с трансформаторным маслом погружен алюминиевый шарик радиусом 0,01 м и зарядом 10 мКл. Определить, при какой напряженности вертикального электростатического поля шарик будет находиться во взвешенном состоянии.

3.1.8 Точечные заряды q_1 = –3 нКл и q_2 = 5 нКл находятся на расстоянии d_1 = 50 см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему будет равна напряженность, если первый заряд положительный?

3.1.9 Точечные заряды q_1 = 10 нКл и q_2 = –20 нКл находятся на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, удаленной на расстояние r_1 = 8 см от первого и r_2 = 7 см от второго зарядов.

3.1.10 Найти силу F, действующую на заряд q = 9 нКл, находящийся на расстоянии r = 4 см от бесконечно длинной нити, заряженной равномерно с линейной плотностью заряда τ = 20 мкКл/м.

3.1.11 Бесконечная плоскость несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью σ = 40 нКл/м^2. Параллельно ей расположена прямая тонкая нить, заряженная равномерно с линейной плотностью заряда τ = 0,4 нКл/м. Определить силу, действующую на отрезок нити длиной 1 м.

3.1.12 Положительные заряды q_1= 30 мкКл и q_2 = 60 мкКл находятся в вакууме на расстоянии r_1 = 2,5 м друг от друга. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния r_2 = 0,5 м.

3.1.13 Вблизи бесконечной заряженной плоскости находится точечный заряд 10^{-8} Кл. Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние 20 см. При этом совершается работа 1 мДж. Определить поверхностную плотность заряда.

3.1.14 Какую работу требуется совершить для того, чтобы два равных заряда 3 мкКл, находящиеся на расстоянии 60 см друг от друга, сблизить до расстояния 20 см?

3.1.15 Сфера радиусом 5 см равномерно заряжена с поверхностной плотностью 1 нКл/м^2. Определить разность потенциалов электростатического поля между точками этого поля, лежащими на расстояниях 10 и 15 см от центра сферы.

3.1.16 Металлический шарик диаметром d = 3 см заряжен отрицательно до потенциала φ = 120 В. Сколько избыточных электронов N находится на поверхности шарика?

3.1.17 Плоская квадратная рамка со стороной длиной a = 10 см находится на некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости. Плоскость пластины с линиями поля составляет угол φ = 30º. Поверхностная плотность заряда равна σ = 1 мкКл/м^2. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через эту пластину.

3.1.18 В центре сферы радиусом R = 10 см находится точечный заряд q = 5 нКл. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через часть сферической поверхности площадью S = 10 см^2.

3.1.19 В однородное электростатическое поле напряженностью E_0 = 700 В/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная стеклянная пластинка. Определить: 1) напряженность поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

3.1.20 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином. Расстояние между пластинами 2 мм. Разность потенциалов равна 5 кВ. Определить: 1) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов σ' на диэлектрике.

3.1.21 Поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности слюдяной пластинки толщиной 0,2 мм, служащей изолятором в плоском конденсаторе, σ' = 2,88·10^{-5} Кл/м^2. Найти разность потенциалов между обкладками конденсатора.

3.1.22 Определить расстояние между пластинами плоского конденсатора, если напряжение между ними U = 200 В. Площадь каждой пластины S = 50 см^2, ее заряд q = 5 нКл. Диэлектриком служит слюда.

3.1.23 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов U_1 = 500 В. Площадь каждой пластины S = 200 см^2, расстояние между ними d = 1,5 мм. После отключения конденсатора от источника питания в пространство между пластинами внесли парафин. Определить разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсатора C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика.

3.1.24 Пластины изолированного плоского конденсатора раздвигаются так, что его емкость изменяется от 100 до 80 пФ. Какая работа совершается при этом, если заряд конденсатора 1,6·10^{-4} Кл? Поле между пластинами остается однородным.

3.1.25 Конденсатор емкостью C_1 = 10 мкФ заряжен до напряжения U_1 = 300 В. К нему параллельно присоединяют незаряженный конденсатор емкостью C_2 = 300 мкФ. Какое напряжение установится после их соединения?

3.1.26 Конденсаторы емкостями C_1 = 2 мкФ и C_2 = 4 мкФ заряжены до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$ = 10 В и $\Delta\varphi_2$ = 40 В соответственно. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсаторов после их соединения.

3.1.27 Найти механическую работу, совершённую электрическими силами при повороте ручки настройки конденсатора переменной емкости, подключенного к батарее с ЭДС ε = 300 В, если емкость изменяется от C_1 = 20 мФ до C_2 = 100 мФ.

3.1.28 Какое количество Q теплоты выделится при разряде плоского конденсатора, если напряжение между пластинами равно U = 15 кВ, расстояние d = 1 мм, диэлектрик – слюда? Площадь каждой пластины S = 300 см^2.

3.1.29 Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины к другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами d = 4 мм. Найти: а) разность потенциалов U между пластинами; б) напряженность электрического поля E внутри конденсатора; в) объемную плотность энергии поля w в конденсаторе.

3.1.30 Напряжение на концах двух параллельно соединенных сопротивлений по 4 Ом каждый равно 6 В. Если одно из сопротивлений выключить, вольтметр показывает 8 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника.

3.1.31 По медному проводнику сечением 1 мм^2 течет ток 100 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

3.1.32 По медному проводу сечением 0,2 мм^2 проходит ток силой 0,2 А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля.

3.1.33 Определить удельное сопротивление ρ проводника длиной l = 2 м, если при плотности тока $j = 10^6$ А/м^2 на его концах поддерживается разность потенциалов U = 2 В.

3.1.34 Лифт массой 0,8 т поднимается на высоту 40 м за 0,5 мин. Определить мощность, потребляемую электродвигателем лифта и силу тока в электродвигателе, если напряжение на его зажимах равно 120 В, а КПД составляет 90 %.

3.1.35 Найти сопротивление R трубки длиной l = 80 см и площадью поперечного сечения S = 5 мм^2, если она наполнена водородом, ионизированным так, что в 1 см^3 его находятся при равновесии $n = 10^7$ пар одновалентных ионов.

3.2 Магнетизм

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Магнитное поле **–** силовое поле, связанное с токами и постоянными магнитами, которое обнаруживает себя по действию на токи и магниты, внесенные в это поле.

Магнитное поле действует только на движущиеся заряженные частицы. На рамку с током магнитное поле оказывает ориентирующее действие, т. е. поворачивает ее. За направление магнитного поля в данной точке пространства принимается направление положительной нормали рамки с током.

Положительная нормаль – нормаль, связанная с направлением тока в контуре правилом правого винта.

Так как рамка с током поворачивается в магнитном поле, значит на нее действует пара сил. Вращающий момент, действующий на контур с током, помещённый в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right], \qquad M = p_m B \sin\alpha,$$

где $\vec{B}$ − ***вектор магнитной индукции***, являющийся характеристикой магнитного поля; $\vec{p}_m$ − ***магнитный момент*** контура с током; α − угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$. Магнитный момент плоского контура площадью S с током I

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где $\vec{n}$ − единичный вектор нормали к плоскости контура.

Магнитная индукция однородного магнитного поля определяется как отношение максимального вращающего момента, действующего на рамку с током, к величине магнитного момента этой рамки.

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$$

В СИ индукция магнитного поля измеряется в теслах (Тл). 1 Тл равен магнитной индукции однородного магнитного поля, в котором на плоский контур с током с магнитным моментом 1 А·м^2 действует максимальный вращающий момент, равный 1 Н·м.

Закон Био – Савара – Лапласа: элемент $d\vec{l}$ проводника с током I создает в некоторой точке пространства магнитное поле, магнитная индукция $d\vec{B}$ которого определяется формулой

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I \left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый от элемента $d\vec{l}$ до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Модуль вектора магнитной индукции

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \, dl \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$.

Направление вектора $d\vec{B}$ перпендикулярно векторам $\vec{r}$ и $d\vec{l}$ и определяется правилом правого винта: направление вращения головки винта дает направление $d\vec{B}$, если поступательное движение винта соответствует направлению тока в проводнике.

Силовые линии магнитной индукции − линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции. Линии магнитной индукции всегда замкнуты.

Если магнитное поле создается несколькими проводниками с токами, то результирующее магнитное поле определяется как результат наложения полей от каждого проводника по ***принципу суперпозиции***: магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, т. е.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i.$$

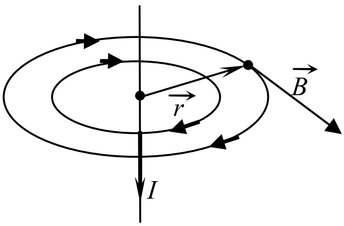
В частном случае для двух полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

а модуль магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha},$$

где α − угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ отдельных полей.



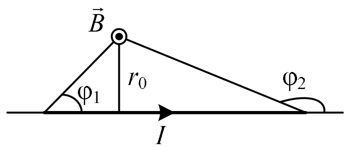
Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r},$$

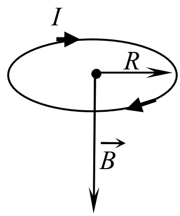
где r − расстояние от оси проводника до рассматриваемой точки поля.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right).$$



Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током радиуса R



$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Магнитное поле точечного заряда q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью v

$$B = \frac{\mu\mu_0 q v \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α − угол между вектором скорости и радиусом-вектором; r − модуль радиуса-вектора, проведённого от заряда к точке наблюдения.

Закон Ампера: Сила, действующая на элемент длины $d\vec{l}$ проводника с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right], \quad dF = IBl\sin\alpha,$$

где α − угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$. Направление силы Ампера устанавливается с помощью правила левой руки: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора индукции входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый на 90º большой палец покажет направление действующей на отрезок проводника силы. Сила Ампера всегда перпендикулярна и проводнику и вектору индукции магнитного поля.

Сила взаимодействия двух бесконечно длинных прямолинейных параллельных проводников с токами

$$dF = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R} dl,$$

где R − расстояние между проводниками; dl − длина отрезка проводника.

Два параллельных проводника с токами одинакового направления притягиваются, с токами противоположного направления – отталкиваются.

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру – интеграл вида

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl,$$

где $d\vec{l}$ − вектор элементарной длины контура L, направленный вдоль обхода контура; B_l − составляющая вектора магнитной индукции в направлении касательной контура L произвольной формы.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора магнитной индукции): циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов ΣI, охватываемых этим контуром,

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков и длину l,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Сила Лоренца, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right], \qquad F = |q| vB \sin\alpha,$$

где α − угол между векторами скорости и индукции магнитного поля.

Сила Лоренца перпендикулярна векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$, ее направление определяется с помощью того же правила левой руки: если левую руку расположить так, чтобы составляющая вектора индукции, перпендикулярная скорости заряда, входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по движению положительного заряда (против движения отрицательного), то отогнутый на 90º большой палец покажет направление действующей на заряд силы Лоренца.

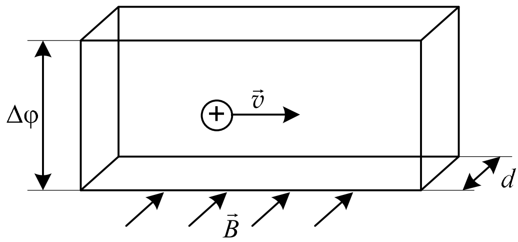
Поскольку сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости**,** работы над частицей она не совершает, а значит, не изменяет и кинетическую энергию частицы.

Если заряженная частица влетает в однородное магнитное поле параллельно линиям магнитной индукции – сила Лоренца на частицу не действует. Если частица влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции – под действием силы Лоренца она начнет двигаться по окружности. Если же частица влетает в однородное магнитное поле под каким-либо другим углом – под действием силы Лоренца она начнет двигаться по спирали вокруг линий магнитной индукции.

Эффект Холла – явление возникновения в проводнике (полупроводнике) с током, помещенном в перпендикулярное направлению тока магнитное поле поперечного электрического поля. Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en}\frac{IB}{d},$$

где I − сила тока в пластине; B – индукция магнитного поля; d − толщина пластины; n − концентрация носителей заряда.



Величина $R = 1/en$ называется постоянной Холла и зависит от вещества.

Микроскопические (элементарные) токи – токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ характеризует поле, создаваемое всеми макро- и микротоками.

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ характеризует поле, создаваемое макротоками.

Магнитная индукция $\vec{B}$ связана с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$ в случае однородной изотропной среды соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

для вакуума

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}.$$

Магнитная проницаемость среды μ – величина, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков среды.

Намагниченность – магнитный момент единицы объема вещества, количественная характеристика процесса намагничивания:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_m,$$

где $\vec{P}_m$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\vec{J} = \chi\vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами $\vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{J}\right).$$

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в веществе):

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где ΣI – алгебраическая сумма сил токов проводимости, охватываемых контуром L.

Слабые магнетики – вещества, проявляющие свои магнитные свойства только в магнитном поле. К слабым магнетикам относятся: ***парамагнетики*** – вещества, намагничивающиеся таким образом, что их собственное поле усиливает внешнее магнитное поле; ***диамагнетики*** – вещества, намагничивающиеся таким образом, что их собственное поле ослабляет внешнее магнитное поле.

Сильные магнетики – вещества, например ***ферромагнетики***, которые могут обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля.

Свойства ферромагнетиков: зависимость магнитной проницаемости среды от напряженности внешнего магнитного поля; нелинейная зависимость намагниченности ферромагнетика от напряженности; явление магнитного гистерезиса. Наличие ***точки Кюри*** – температуры, при нагревании выше которой ферромагнетик теряет свои свойства и превращается в парамагнетик.

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через элементарную площадку dS

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции на направление нормали к площадке dS.

Магнитный поток через плоский контур площадью S в случае:

а) неоднородного поля

$$\Phi_B = \int_S B_n dS;$$

б) однородного поля

$$\Phi_B = B_n S = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором нормали к плоскости контура и вектором магнитной индукции; B_n – проекция вектора магнитной индукции на нормаль.

Теорема Остроградского − Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

Потокосцепление, т. е. полный магнитный поток, сцеплённый со всеми N витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi_B,$$

где Φ_B – магнитный поток через один виток.

Для соленоида

$$\Psi = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l} S,$$

где μ – магнитная проницаемость среды.

Работа по перемещению проводника с током I в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi_B,$$

где $\Delta\Phi_B$ – магнитный поток, пересечённый движущимся проводником.

Работа по перемещению замкнутого контура с током I в магнитном поле

$$A = I\Delta\Psi,$$

где $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления контура.

Явление электромагнитной индукции – возникновение электрического тока в замкнутом контуре, при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур.

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где ε_i – ЭДС индукции; N – число витков контура.

Правило Ленца: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему этот индукционный ток.

Частные случаи применения закона электромагнитной индукции:

а) ЭДС индукции, возникающая в рамке, содержащей N витков площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\varepsilon_i = BNS\sin\omega t;$$

б) разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле с индукцией

$$U = Blv\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами скорости и индукции магнитного поля.

Количество электричества q, протекающего в контуре,

$$q = \frac{\Delta\Psi}{R},$$

где $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления; R – сопротивление контура.

Явление самоиндукции – возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока.

Индуктивность контура – коэффициент пропорциональности между силой тока I в контуре и сцепленным с этим контуром магнитным потоком (потокосцеплением)

$$\Psi = LI.$$

ЭДС самоиндукции, возникающая в замкнутом недеформируемом контуре при изменении силы тока в нём,

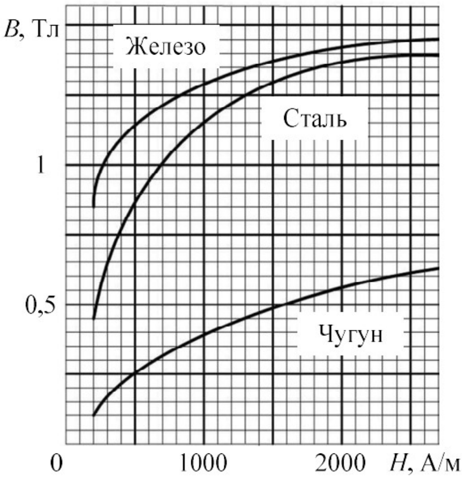
$$\varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура.

Индуктивность соленоида (тороида) длиной l

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l},$$

где N – число витков соленоида; S – площадь поперечного сечения.



При вычислении индуктивности соленоида с ферромагнитным сердечником по приведенной выше формуле для определения магнитной проницаемости сердечника следует использовать выражение

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

В этой формуле индукция B поля в ферромагнетике определяется по известному значению напряженности внешнего магнитного поля H или, наоборот, напряженность H определяется по известному значению индукции B с помощью графика зависимости $B(H)$.

Мгновенное значение силы тока в цепи при размыкании и при замыкании цепи

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right); \quad I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{l}t\right)\right),$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; R – активное сопротивление цепи; L – индуктивность цепи; ε – ЭДС источника тока.

Энергия магнитного поля, связанного с контуром индуктивностью L, по которому течёт ток силой I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объёмная плотность энергии однородного магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2}.$$

Ток смещения и ***плотность тока смещения***

$$I_{\text{см}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \quad \vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ток смещения − это величина, характеризующая изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения существует в вакууме, в диэлектриках и внутри проводников, по которым течет переменный ток.

Полный ток – сумма токов проводимости (и конвекционных токов) и тока смещения.

Плотность полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Данное уравнение показывает, что источником электрического поля может быть не только электрический заряд, но и меняющееся во времени магнитное поле.

Обобщенная теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Данное уравнение показывает, что источником магнитного поля могут быть либо движущиеся электрические заряды (токи), либо переменное электрическое поле.

Теорема Гаусса для электрического поля:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Теорема Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

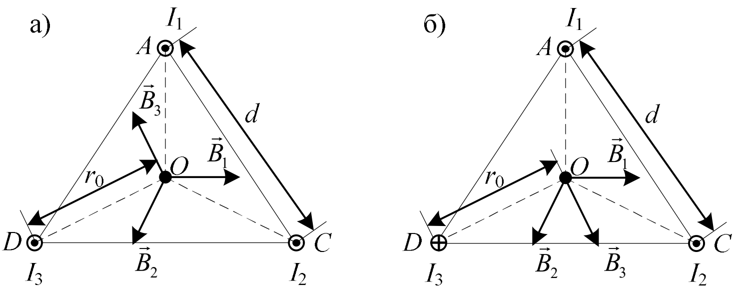
Из уравнений Максвелла следует, электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом − они образуют единое электромагнитное поле.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.2.1. Три бесконечно длинных параллельных проводника с токами силой I = 5 А в каждом пересекают перпендикулярную к ним плоскость в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной d = 0,1 м. Определить магнитную индукцию поля в центре треугольника, если: а) токи в проводниках имеют одинаковое направление; б) направление тока в одном из проводников противоположно направлению токов в двух других.

Решение

Магнитная индукция в центре ΔACD по принципу суперпозиции равна векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из токов в этой точке:



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Векторы $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ перпендикулярны соответственно к отрезкам AO, CO, DO, и их направления определяются по правилу правого винта. Так как силы токов равны, а рассматриваемая точка расположена симметрично относительно проводников, то модули индукций также равны между собой:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r_0} = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{\pi d}, \tag{1}$$

где расстояние от центра до проводников

$$r_0 = \frac{AC}{2\cos 30^\circ} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим случай *а*. Токи I_1, I_2, I_3 направлены одинаково, значит, углы между векторами $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ равны 120º, а магнитная индукция результирующего поля в силу симметрии равна нулю ($B = 0$).

В случае *б* углы между соседними векторами магнитных индукций равны 60º, а значит,

$$B = B_3 + (B_1 + B_2)\cos 60^\circ.$$

С учетом формулы (1) это соотношение примет следующий вид:

$$B = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{2\pi d}\left(1 + 2\cos 60°\right) = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{\pi d}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$\left[B\right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

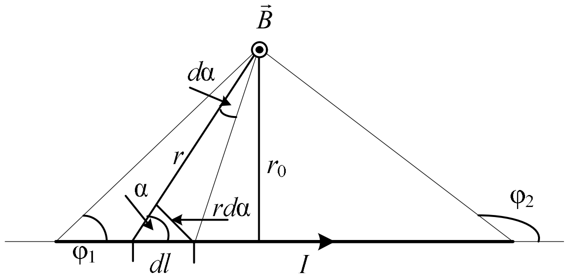
Проведем расчет, подставив данные из условия (с учетом $\mu = 1$ для вакуума):

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1,73 \cdot 5}{\pi \cdot 0,1} = 3,46 \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 3{,}46 \cdot 10^{-7}$ Тл.

Пример 3.2.2. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком провода длиной $l = 100$ см в точке A, равноудаленной от его концов и находящейся на расстоянии $r_0 = 50$ см от его середины. По проводу течет ток силой $I = 10$ А.

Решение



Магнитное поле в точке A создается отрезком проводника с током. По закону Био – Савара – Лапласа модуль вектора индукции магнитного поля в данной точке, создаваемого элементом проводника $d\vec{l}$, вычисляется как

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I\, dl \sin\alpha}{4\pi r^2}, \tag{1}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$. В точке A векторы индукции магнитного поля $d\vec{B}$ для каждого элемента проводника $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление. Поэтому сложение (в соответствии с принципом суперпозиции) векторов можно заменить на сложение их модулей. Из рисунка следует,

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha}, \quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Таким образом выражение (1) примет вид

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} \sin\alpha d\alpha. \quad (2)$$

Интегрирование формулы (2) приводит к соотношению для модуля вектора индукции магнитного поля, создаваемого всем проводником:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right), \quad (3)$$

где φ_1 и φ_2 – углы между векторами, соединяющими концы отрезка провода с точкой A, и направлением тока в проводе. Следует отметить, что формула (3) дает правильный результат только в том случае, если углы откладываются от направлений из рассматриваемой точки к концам отрезка и отрезком (или его продолжением) с учетом направления тока, а также, если порядок углов соответствует направлению тока.

В рассматриваемом случае $\varphi_1 = 45^\circ$ и $\varphi_2 = 135^\circ$, соответственно получим $\cos\varphi_1 = 0{,}707$, а $\cos\varphi_2 = -\,0{,}707$.

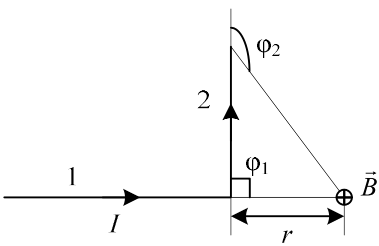
Подставим в формулу численные значения и, с учетом $\mu = 1$ для вакуума, произведем расчет:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{4\pi \cdot 0{,}5}(0{,}707 + 0{,}707) = 2{,}82 \cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 2{,}82 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Пример 3.2.3. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток $I = 100$ А. Какова магнитная индукция B в точке A, если $r = 1$ м?

Решение



Магнитное поле в точке A создается проводником с током, изогнутым под прямым углом. Закон Био – Савара − Лапласа позволяет рассчитать магнитную индукцию от проводника с током простой формы. В нашем случае поле от всего проводника следует рассматривать как суперпозицию полей, созданных двумя отрезками 1 и 2, бесконечными с одной стороны и ограниченными с другой стороны изломом.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Если α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$, то модуль вектора $d\vec{B}$ от элемента $d\vec{l}$ проводника с током I вычисляется по формуле

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I\, dl \sin\alpha}{4\pi r^2}. \tag{1}$$

Для отрезка проводника в результате интегрирования этой формулы (см. пример 3.2.2) получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \right), \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 – углы между векторами, соединяющими концы отрезка провода с точкой A, и направлением тока в проводнике.

В точке A магнитная индукция поля, создаваемого отрезком 1, $B_1 = 0$, т. к. для каждого элемента dl этого отрезка по формуле (1) $dB = 0$.

Магнитную индукцию поля B_2 в точке A, создаваемого отрезком 2, определяем по формуле (2). В этом случае $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = 180^\circ$, соответственно $\cos\varphi_1 = 0$, а $\cos\varphi_2 = -1$.

Таким образом,

$$B = B_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Подставим в формулу численные значения и, с учетом $\mu = 1$ для вакуума, произведем расчет:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{4\pi \cdot 1} = 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 10^{-5}$ Тл.

Пример 3.2.4. В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 6$ А расположена прямоугольная рамка со сторонами $a = 40$ см и $b = 30$ см так, что длинные стороны рамки параллельны проводу. Сила тока в рамке $I_1 = 1$ А. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии $d = 10$ см, а ток в ней сонаправлен току I.

Решение

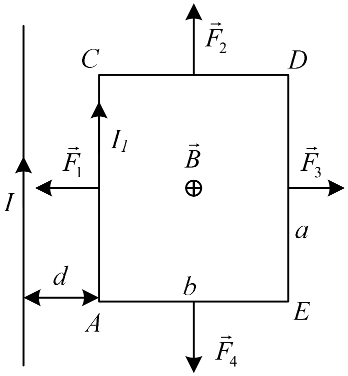
Ток I в бесконечно длинном проводнике создает вокруг магнитное поле, величина которого характеризуется магнитной индукцией

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}, \tag{1}$$

где r – расстояние от рассматриваемой точки поля до проводника с током.

На стороны рамки с током I_1, находящейся в магнитном поле проводника с током I, действуют силы Ампера $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, направленные согласно правилу «левой руки», как показано на рисунке.

Величина силы Ампера, действующей на элемент $d\vec{l}$ проводника с током, определяется формулой:



$$d\vec{F} = I_1\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right],$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция поля в данной точке. В данном случае угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен $\pi/2$, поэтому формулу для модуля силы, действующей на элемент рамки длиной dl можно записать в виде

$$dF = IBdl.$$

Так как индукция магнитного поля в точках на стороне рамки длиной a, расположенных на одном расстоянии d от проводника с током I, одинакова, то сила F_1, действующая на сторону рамки AC,

$$F_1 = \int_0^a I_1 Bdl = I_1 B\int_0^a dl = I_1 Ba.$$

С учетом формулы (1), а также того, что диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$ и в данном случае $r = d$, получим:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi d}a.$$

Для стороны рамки DE $r = d + b$, поэтому

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi(b+d)}a.$$

Сила F_2, действующая на сторону CD рамки, является результирующей бесконечно малых сил, действующих на элементы dl этой стороны, расположенные на различных расстояниях от проводника с током I. В данном случае r – переменная ($dr = dl$), она изменяется от d до $d + b$. Так как все векторы $d\vec{F}$ направлены одинаково, то принцип суперпозиции сводится к интегрированию модулей сил:

$$F_2 = \int_d^{d+b} I_1 Bdl = I_1\int_d^{d+b} Bdr = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}.$$

Сила F_4, действующая на сторону AE рамки, по величине равна силе F_2, но направлена в противоположную сторону, т. к. каждому элементу $d\vec{l}$ стороны *AE* соответствует аналогичный элемент стороны *CD*, находящийся в тех же самых условиях, но направленный противоположно.

Все конечные формулы имеют один и тот же структурный вид. Проверим единицы в одной из них:

$$[F] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}}\text{м} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}^2}{\text{м}} = \text{Тл}\cdot\text{м}^2\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}\text{А}\cdot\text{м} = \text{Н}.$$

Подставим в формулы численные значения и произведем расчет:

$$F_1 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 0,4}{2\pi\cdot 0,1} = 4,8\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$F_2 = F_4 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi}\ln\frac{0,1+0,3}{0,1} = 1,66\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$F_3 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 0,4}{2\pi\cdot(0,1+0,3)} = 1,2\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_1 = 4{,}8\cdot 10^{-6}$ Н; $F_2 = F_4 = 1{,}66\cdot 10^{-6}$ Н; $F_1 = 1{,}2\cdot 10^{-6}$ Н.

Пример 3.2.5. Проводник длиной l = 1 м, по которому течет ток силой I = 2 А, согнут в форме полукольца и расположен в плоскости, перпендикулярной к направлению индукции магнитного поля. Найти силу, действующую на этот проводник в магнитном поле с индукцией $B = 10^{-5}$ Тл.

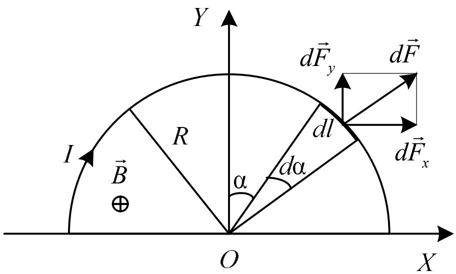
Решение

На элемент проводника с током $d\vec{l}$, помещенный в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила, которую определяют по закону Ампера:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right].$$

В данном случае угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен π/2, поэтому формулу для модуля силы можно записать в виде

$$dF = IBdl. \qquad (1)$$



Силы, действующие на каждый элемент проводника с током, направлены по радиусам полукольца и лежат в одной плоскости. Выбрав координатные оси, как показано на рисунке, найдем проекции сил:

$$dF_x = dF\sin\alpha;$$

$$dF_y = dF\cos\alpha.$$

Результирующая сила, действующая на все элементы полукольца, в силу симметрии будет направлена вдоль оси OY, значит,

$$F = F_y = \int_l dF\cos\alpha.$$

Подставив сюда выражение (1), получим

$$F = \int_l IBdl\cos\alpha. \qquad (2)$$

Элемент дуги $dl = Rd\alpha = ld\alpha/\pi$, а угол α изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Тогда из формулы (2) следует

$$F = \frac{IBl}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{2IBl}{\pi}.$$

Размерность полученной величины очевидна, т. к. формула по структуре совпадает с формулой закона Ампера.

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$F = \frac{2\cdot 2\cdot 10^{-5}\cdot 1}{\pi} = 1{,}27\cdot 10^{-5}\text{ Н}.$$

Ответ: $F = 1{,}27\cdot 10^{-5}$ Н.

Пример 3.2.6. Квадратная рамка со стороной a = 10 см, по которой течет ток I = 100 А, свободно установилась в однородном магнитном поле индукцией B = 1 Тл. Определить работу, совершаемую внешними силами при повороте рамки относительно оси, проходящей через середину ее противоположных сторон, на угол φ = 90º. При повороте рамки сила тока в ней поддерживалась постоянной.

Решение

На контур с током в магнитном поле действует механический момент, равный по модулю

$$M = p_m B\sin\varphi, \qquad (1)$$

где p_m – модуль магнитного момента рамки; φ – угол между положительной нормалью к поверхности контура и вектором индукции магнитного поля.

По условию задачи в начальном положении рамка свободно установилась в магнитном поле. При этом момент силы равен нулю, а значит, φ = 0, т. е. нормаль к поверхности контура и вектор магнитной индукции совпадают по направлению.

Если внешние силы выведут рамку из положения равновесия, то возникший момент сил, определяемый формулой (1), будет стремиться возвратить ее в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме

$$dA = Md\varphi.$$

Подставив выражение (1) в формулу для определения работы и учитывая, что магнитный момент $p_m = IS$, где $S = a^2$ − площадь контура, получим:

$$dA = Iba^2 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте рамки на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = I\,Ba^2 \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = IBa^2.$$

Убедимся, что правая часть этого равенства дает единицу работы:

$$\left[A\right] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{А}\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$A = 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 = 1\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 1$ Дж.

Пример 3.2.7. Чему равна механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника длиной l = 20 см со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией B = 0,1 Тл*?* Величина тока в проводнике I = 50 А

Решение

Со стороны магнитного поля на проводник с током действует сила Ампера*,* величина которой определяется формулой

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right],$$

где dl – длина элемента проводника; B – индукция магнитного поля в данной точке. Поскольку в данном случае магнитное поле однородно (B = const), а угол между проводником и вектором магнитной индукции равен π/2, то модуль силы Ампера, действующую на весь проводник длиной l, можно определить по формуле

$$dF = IBl.$$

Работа, которую совершает сила Ампера по перемещению проводника с током в магнитном поле на расстояние ds вдоль направления действия силы

$$dA = Fds.$$

Тогда механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника, будет определяться формулой

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Fds}{dt} = Fv = IBlv.$$

Проверим размерность полученной величины:

$$[P] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}\frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{А}\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$P = 50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 5 = 5 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P = 5$ Вт.

Пример 3.2.8. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 105$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля $E = 20$ кВ/м, индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Решение

Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов, приобретает кинетическую энергию, равную, при условии отсутствия начальной скорости, работе ускоряющего электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

где v – скорость частицы после ускорения. Отсюда следует

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

С этой скоростью заряженная частица влетает в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля. Со стороны магнитного поля на нее действует сила Лоренца, направление которой определяется правилом «левой руки» (для положительного заряда), величина для движения под прямым углом к магнитному полю формулой $F_{\text{Л}} = qvB$.

Со стороны электрического поля на заряженную частицу действует электрическая сила, равная по модулю $F_{\text{эл}} = qE$.

Поскольку электрическое и магнитные поля направлены перпендикулярно друг другу, то электрическая сила направлена или по силе Лоренца, или противоположно ей. Так как в условии задачи сказано, что частица летит по прямой, значит, верно второе, и сила Лоренца компенсируется электрической силой (векторная сумма этих сил равна нулю).

То есть $F_{\text{Л}} = F_{\text{эл}}$, или $qvB = qE$. Откуда $vB = E$. Подставим в эту формулу выражение для скорости:

$$E = B\sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Из этого выражения следует конечная формула

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{2U}\left(\frac{E}{B}\right)^2.$$

Результат решения задачи не зависит от знака заряда частицы. При его изменении на противоположный изменятся на противоположные направления обеих сил (Лоренца и электрической), что не изменит основного уравнения, лежащего в основе решения задачи (равенство модулей сил).

Проверим размерность полученной величины

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{1}{\text{В}}\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\frac{1}{\text{Тл}}\right)^2 = \text{В}\left(\frac{1}{\text{м}}\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\right)^2 = \frac{\text{Дж}\cdot\text{А}^2}{\text{Кл}}\left(\frac{\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\text{Кл}^2}{\text{с}^2}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}\cdot\text{с}^2}\frac{\text{с}^4}{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Подставим численные значения и произведем расчет:

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{2\cdot 105}\left(\frac{20\cdot 10^3}{0{,}1}\right)^2 = 1{,}9\cdot 10^8\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Ответ: $\frac{q}{m} = 1{,}9\cdot 10^8\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

Пример 3.2.9. Электрон, пройдя ускоряющее напряжение U = 900 В, влетает в однородное магнитное поле с индукцией B = 1 мТл под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям индукции. Определить траекторию движения электрона.

Решение

На заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам магнитной индукции и скорости частицы. Модуль этой силы для электрона

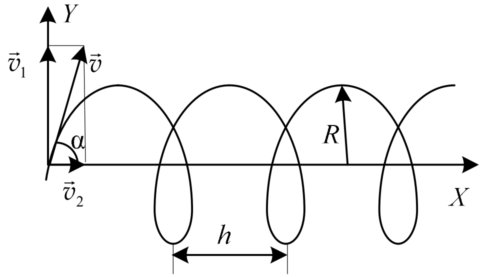
$$F = evB\sin\alpha,$$

где e − элементарный заряд; v – скорость электрона.

Движение электрона удобно представить как наложение двух движений: движения со скоростью $v_1 = v\sin\alpha$ перпендикулярно вектору $\vec{B}$, и движения со скоростью $v_2 = v\cos\alpha$ параллельно этому вектору.

Для движения под действием силы Лоренца модуль скорости не изменяется, останется постоянным и значение силы Лоренца. Постоянная сила, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Значит, электрон будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, со скоростью, равной v_1.

В результате одновременного участия в двух движениях по окружности и по прямой электрон будет двигаться по винтовой линии с осью, параллельной силовым линиям поля. Определить траекторию движения электрона в данном случае значит найти радиус R и шаг h винтовой линии.



Для определения радиуса окружности, по которой движется электрон, учтем, что центростремительное ускорение частице сообщает сила Лоренца. На основании 2-го закона Ньютона

$$F = ev_1B = \frac{mv_1^2}{R}.$$

Из этой формулы найдем радиус винтовой линии:

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{eB}.$$

Входящую в это выражение скорость выразим через конечную (после ускорения в электрическом поле) кинетическую энергию электрона W_k, которая равна работе ускоряющего электрического поля

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Тогда окончательное выражение для радиуса винтовой линии приобретает вид

$$R = \frac{\sin\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Время одного оборота (период обращения по окружности) определим как отношение ее длины к скорости первого движения

$$T = \frac{2\pi R}{v_1}.$$

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному электроном вдоль поля (второе движение) со скоростью v_2 за время одного оборота:

$$h = v_2T = v_2\frac{2\pi R}{v_1} = 2\pi R\operatorname{ctg}\alpha.$$

Проверим единицы измерения в формуле для радиуса винтовой линии:

$$[R] = \frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}\sqrt{\text{кг}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{с}}{\text{кг}}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \text{м}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$R = \frac{0,866}{10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\cdot 900}{1,6\cdot 10^{-19}}} = 8,77\cdot 10^{-2}\ \text{м};\quad h = 2\cdot 3,14\cdot 0,577 = 0,318\ \text{м}.$$

Ответ: R = 8,8 см; h = 32 см.

Пример 3.2.10. Определить концентрацию электронов проводимости при эффекте Холла для натриевого проводника при плотности тока j = 150 А/см^2 и магнитной индукции B = 2 Тл, если напряженность поперечного электрического поля E= 0,75 мВ/м. Плотность натрия ρ= 0,97 г/см^3.

Решение

Для Холловской разности потенциалов справедлива формула

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en}\frac{IB}{d},$$

где e − заряд электрона; I − сила тока; B − магнитная индукция; d − толщина пластинки.

Выразим концентрацию:

$$n = \frac{IB}{\Delta\varphi e d}.$$

Для однородных стационарных полей

$$E = \frac{\Delta\varphi}{a},$$

где a − ширина пластинки. С учетом того, что плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{ad},$$

получим

$$n = \frac{jB}{eE}.$$

Проверим размерность полученной величины:

$$[n] = \frac{\text{А}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Кл}\cdot\text{В}} = \frac{\text{А}}{\text{м}\cdot\text{Кл}}\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}\frac{\text{Кл}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{м}^{-3}.$$

Подставим численные значения и произведем расчет:

$$n = \frac{1,5\cdot 10^6\cdot 2}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 7,5\cdot 10^{-4}} = 2,5\cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}.$$

Ответ: n = 2,5·10^{28} м$^{-3}$.

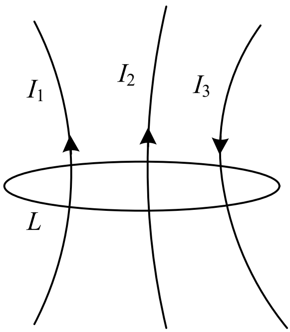
Пример 3.2.11. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи I_1 = 10 А, I_2 = 15 А, текущие в одном направлении, и ток I_3 = 20 А, текущий в противоположном направлении.

Решение

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (иначе закон полного тока для вакуума) выражается формулой

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

где $d\vec{l}$ − вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l − составляющая вектора магнитной индукции в направлении касательной контура L произвольной формы; ΣI − алгебраическая сумма токов, охватываемая контуром. В этой сумме ток берется положительным, если его направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным – в обратном случае. В нашей задаче N = 3 (три тока). Тогда



$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(I_1 + I_2 - I_3 \right).$$

Ток I_3 берется со знаком минус, т. к. его направление противоположно токам I_1 и I_2. Проверим размерность полученной величины:

$$\left[\oint_L \vec{B}d\vec{l} \right] = \text{Тл} \cdot \text{м}; \quad \left[\mu_0 I \right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \text{А} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = \text{Тл} \cdot \text{м}.$$

Видим, что единицы измерения обеих частей совпадают.

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(10 + 15 - 20 \right) = 6{,}28 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 6{,}28 \cdot 10^{-6}$ Тл · м.

Пример 3.2.12. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 1000 витков, протекает ток силой I = 1 А. Внешний диаметр тороида равен D_1 = 60 см, внутренний – D_2 = 40 см.

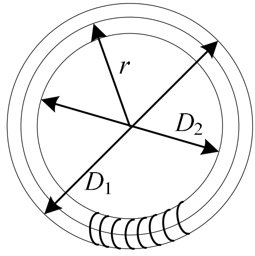
Решение

Так же как и в предыдущем примере, применим закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Циркуляция вектора магнитной индукции:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

Контур L, по которому происходит циркуляция вектора $\vec{B}$, представляет собой окружность радиуса $r = D/2$, где r − средний диаметр.

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad r = \frac{D_1 + D_2}{4}.$$



Контур охватывает N токов (по числу витков в катушке), значит

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI. \qquad (1)$$

Произведем интегрирование левой части выражения (1). Рассматриваемый контур совпадает с силовой линией магнитного поля, поэтому и в силу симметрии $B_l = B = \text{const}$ в точках контура. Длина контура $L = 2\pi r$. Выражение (1) примет вид

$$B 2\pi r = \mu_0 NI.$$

Магнитная индукция (с учетом формулы для радиуса)

$$B = \frac{2\mu_0 NI}{\pi\left(D_1 + D_2\right)}.$$

Для вакуума (поскольку в условии задачи ничего не сказано про среду) индукция магнитного поля и его напряженность связаны выражением $B = \mu_0 H$, откуда следует

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2NI}{\pi\left(D_1 + D_2\right)}.$$

Проверим размерности полученных величин

$$\left[H\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}}; \quad \left[B\right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Подставим в формулы численные значения и произведем расчет:

$$H = \frac{2\cdot 10^3 \cdot 1}{3{,}14\left(0{,}6 + 0{,}4\right)} = 637\ \frac{\text{А}}{\text{м}}; \quad B = \mu_0 H = 1{,}26\cdot 10^{-6}\cdot 637 = 8\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 8\cdot 10^{-4}$ Тл; $H = 637$ А/м.

Пример 3.2.13. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 2{,}5$ кА/м. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость μ железа.

Решение

Для ферромагнетиков магнитная проницаемость μ не является постоянной величиной. Она зависит от величины напряженности магнитного поля H.

Для изотропного и однородного магнетика индукция магнитного поля B связана с его напряженностью формулой $B = \mu\mu_0 H$, откуда следует

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Величину индукции магнитного поля B найдем из графика. Для железа при H = 2,5 кА/м, B = 1,29 Тл. Проверим единицу полученной величины:

$$[\mu] = \text{Тл}\frac{\text{м}}{\text{Гн}}\frac{\text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{Вб}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2} = 1.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$\mu = \frac{1,45}{1,26\cdot 10^{-6}\cdot 2,5\cdot 10^{3}} = 460.$$

Ответ: B = 1,45 Тл; μ = 460.

Пример 3.2.14. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной l = 1 м. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определить угловую скорость, при которой на концах стержня возникает разность потенциалов U = 0,1 В.

Решение

Так как вращающийся проводник представляет собой незамкнутый отрезок электрической цепи и условия вращения не изменяются, то в проводнике отсутствует электрический ток. Тогда из закона Ома для неоднородного участка цепи следует, что разность потенциалов на концах проводника по модулю равна возникающей в нем ЭДС индукции

$$U = |\varepsilon_i|.$$

Величина электромагнитной индукции, согласно закону Фарадея, определена формулой

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Так как вращение равномерное, то формулу можно преобразовать следующим образом:

$$U = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi_B$ – магнитный поток, пересеченный стержнем при его вращении за время Δt .

Удобнее всего в качестве интервала времени Δt взять один период вращения T, тогда пересеченный поток будет равен потоку через поверхность круга радиусом l:

$$T = 2\pi/\omega; \quad \Delta\Phi_B = B\pi l^2.$$

В результате преобразований для разности потенциалов получим

$$U = B\pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Bl^2\omega}{2}.$$

Отсюда выразим угловую скорость

$$\omega = \frac{2U}{Bl^2}.$$

Проверим единицу полученной величины:

$$[\omega] = \frac{\text{В}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}}\frac{\text{А}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}} = \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right),$$

т. к. радиан – величина, по сути, безразмерная.

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет

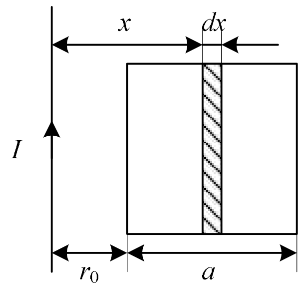
$$\omega = \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 1^2} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\omega = 2$ рад/с.

Пример 3.2.15. В плоскости квадратной рамки с сопротивлением R = 7 Ом и стороной a = 20 см расположен на расстоянии r_0 = 20 см от нее прямой бесконечный проводник. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha t^3$, где α= 2 А/с^3. Определить силу тока в рамке в момент времени t = 10 с.

Решение

Вследствие изменения силы тока в проводнике магнитный поток через рамку изменяется и в ней возникает индукционный ток. Рамка находится в неоднородном магнитном поле. Для расчета магнитного потока разделим площадь рамки на столь узкие полоски так, чтобы в пределах каждой из них магнитное поле можно было считать однородным. На основании свойств магнитного поля (для всех точек поверхности рамки вектор индукции перпендикулярен ей), и на основании формулы для поля бесконечного прямолинейного проводника формула для элементарного магнитного потока через узкую полоску примет вид



$$d\Phi = Badx = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi x}dx,$$

где dx – ширина полоски; x – расстояние от нее до проводника.

Интегрируя это уравнение по x в пределах от r_0 до $r_0 + a$, находим поток через всю рамку

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a\alpha t^3}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

По закону Фарадея определяем ЭДС индукции (по модулю)

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 a\alpha t^2}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right),$$

а из закона Ома – силу тока

$$I = \frac{3\mu_0 a\alpha t^2}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

Проверим размерность полученной величины:

$$[I] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{м}}{\text{Ом}}\frac{\text{А}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{В}}\frac{\text{А}}{\text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{В}}\text{А} = \text{А}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

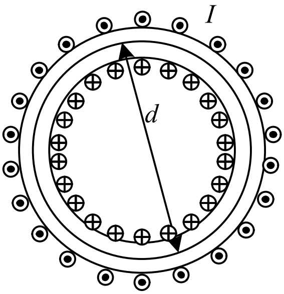
$$I = \frac{3\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0,2\cdot 2\cdot 10^2}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 7}\ln\left(1+\frac{0,2}{0,2}\right) = 2,4\cdot 10^{-6}\text{ А}.$$

Ответ: $I = 2{,}4\cdot 10^{-6}$ А.

Пример 3.2.16. Замкнутый тороид с железным сердечником имеет $N = 400$ витков из тонкой проволоки, намотанных в один слой. Средний диаметр тороида d = 25 см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость железа, а также намагниченность при значениях силы тока в обмотке тороида I_1 = 0,5 А и I_2 = 5 А.

Решение

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L (закон полного тока для магнитного поля в веществе):



$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

Выберем в качестве контура L окружность, проходящую по средней линии тороида (с диаметром, равным d). Применяя этот закон, получим

$$H\pi d = IN.$$

Здесь учтено, что контур совпадает с силовой линией магнитного поля, величина напряженности во всех точках контура одинакова в силу симметрии, длина контура равна πd, а каждый ток I пересекает поверхность контура N раз в одном и том же направлении.

Тогда напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = \frac{IN}{\pi d}.$$

После расчета получим два значения напряженности H_1 = 255 А/м, H_2 = 2550 А/м. Далее, используя график зависимости магнитной индукции B поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля H, определим индукции магнитного поля для железа: B_1 = 1 Тл, B_2 = 1,45 Тл.

Для однородного и изотропного магнетика магнитная проницаемость находится по формуле

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

После расчетов получим: $\mu_1 \approx 3100$, $\mu_2 \approx 450$.

Для расчета значений намагниченности используем ее определяющую формулу, которая в этом случае дает выражение для модуля

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H.$$

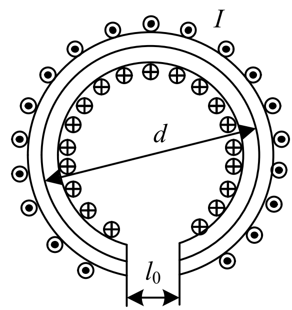
Результаты расчетов: $J_1 \approx 8 \cdot 10^5$ А/м, $J_2 \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ А/м.

Из полученных данных видно, что силе тока I пропорциональна только напряженность магнитного поля внутри ферромагнетика, тогда как индукция B, магнитная проницаемость μ и намагниченность J являются нелинейными функциями H, а следовательно, и нелинейными функциями силы тока.

Ответ: H_1 = 255 А/м, H_2 = 2550 А/м, B_1 = 1 Тл, B_2 = 1,45 Тл, $\mu_1 \approx 3100$, $\mu_2 \approx 450$, $J_1 \approx 8 \cdot 10^5$ А/м, $J_2 \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ А/м.

Пример 3.2.17. Обмотка тороида, имеющая стальной сердечник с воздушным зазором шириной l_0 = 3 мм, содержит 1000 витков на метр длины. Средний диаметр тороида d = 30 см. При какой силе тока I в обмотке тороида индукция магнитного поля в зазоре равна B_0 = 1 Тл?

Решение



Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L (закон полного тока для магнитного поля в веществе)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \sum_{k=1}^{N} I_k .$$

Выберем в качестве контура L окружность, проходящую по средней линии тороида. В этом случае контур совпадает с силовой линией магнитного поля, поэтому касательная проекция H_l совпадает с модулем H. Так как ширина зазора мала по сравнению с длиной контура, то в его точках величина напряженности одинакова в каждом из веществ (H в ферромагнетике и H_0 в воздухе). Исходя из всего вышесказанного, закон полного тока можно записать в виде

$$H\left(\pi d - l_0\right) + H_0 l_0 = IN = I\pi dn, \tag{1}$$

$(\pi d - l_0)$ – длина части средней линии тороида, проходящей через ферромагнетик.

Относительная магнитная проницаемость воздуха близка к единице, поэтому напряженность магнитного поля в зазоре

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}. \tag{2}$$

Так как зазор узкий, будем считать радиальную составляющую вектора магнитной индукции и в зазоре, и в сердечнике равной нулю. В силу этого вектор индукции $\vec{B}$ в зазоре направлен по нормали к границе сталь – воздух. Из граничного условия для нормальных составляющих индукции магнитного поля в этом случае следует, что и в сердечнике индукция по модулю также равна B_0. По графику зависимости магнитной индукции B поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля H определяем напряженность магнитного поля в сердечнике H = 700 А/м. Из формулы (1), с учетом выражения (2) и с учетом $(\pi d - l_0) \approx \pi l$ находим

$$I = \frac{H}{n} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0 \pi dn}.$$

Проверим единицу измерения второго слагаемого:

$$\left[I\right] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 \frac{\text{м}}{\text{Гн}} \frac{\text{м}}{\text{м}} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 \frac{\text{А}}{\text{Вб}} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 \frac{\text{А}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \text{А}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$I = \frac{700}{1000} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 1000} = 3{,}2 \text{ А}.$$

Ответ: I = 3,2 А.

Пример 3.2.18. На круглый деревянный цилиндр намотан один слой медной проволоки, масса которой m = 50 г. Длина цилиндра равна l_0 = 60 см и много больше его диаметра. Сопротивление обмотки R = 30 Ом. Определить энергию магнитного поля катушки, если она подключена к источнику тока с ЭДС ε = 62 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом.

Решение

Энергия магнитного поля катушки с индуктивностью L

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Так как длина соленоида много большего диаметра, то катушку можно рассматривать как идеальный соленоид. В этом случае индуктивность:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l_0} \pi a^2, \quad N = \frac{l}{2\pi a},$$

где N – число витков, a − радиус витка; l − длина провода, т. е. суммарная длина N витков, каждого длиной $2\pi a$.

Запишем выражения для массы и сопротивления проволоки

$$m = \rho V = \rho l S_0, \quad R = \frac{\rho_{эл} l}{S_0},$$

где V – объем проволоки; ρ − плотность меди; $\rho_{эл}$ – удельное сопротивление меди; S_0 − площадь поперечного сечения провода. Исключая из этих соотношений S_0, получим длину провода и число витков

$$l = \sqrt{\frac{mR}{\rho\rho_{эл}}}, \quad N = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{mR}{\rho\rho_{эл}}}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{\mu\mu_0 \pi}{l_0} \frac{mR}{4\pi^2 \rho\rho_{эл}} = \mu\mu_0 \frac{mR}{4\pi\rho\rho_{эл} l_0}.$$

Выразим силу тока в цепи по закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

и подставим это соотношение, а также формулу для индуктивности в формулу энергии. В результате получим:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu\mu_0 \frac{mR}{8\pi\rho\rho_{эл} l_0}\left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2.$$

Проверим размерность полученной величины

$$[I] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \frac{\text{кг} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}\left(\frac{\text{В}}{\text{Ом}}\right)^2 = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \text{Дж}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$I = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 30}{8\pi \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6}\left(\frac{62}{30 + 1}\right)^2 = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $W = 3,3$ мДж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.2.1 Два параллельных бесконечно длинных проводника находятся на расстоянии d = 15 см. По проводникам текут токи противоположного направления силой I = 30 А. Определить индукцию магнитного поля в точке A, расположенной посередине между проводниками и в точке C, находящейся на расстоянии r_1 = 12 см от одного и r_2 = 9 см от другого проводника.

3.2.2 Проводник изогнут в виде квадрата со стороной a = 40 см. Индукция магнитного поля в центре квадрата B = 65 мкТл. Найти силу тока в проводнике.

3.2.3 Круговой виток радиусом R = 15 см расположен относительно бесконечно длинного прямого проводника так, что перпендикуляр, восстановленный на провод из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Сила тока в проводе I_1 = 1 А, сила тока в витке I_2 = 5 А. Расстояние от центра витка до провода d = 20 см. Определить магнитную индукцию в центре витка.

3.2.4 Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток I = 150 А. Вычислить магнитную индукцию B в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на одинаковое расстояние a = 15 см.

3.2.5 Найти силу тока I, проходящего по тонкому кольцу радиусом R = 25 см, если магнитная индукция в центре кольца $B = 6{,}28 \cdot 10^{-9}$ Тл.

3.2.6 В однородном магнитном поле под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к силовым линиям расположен прямой провод длиной 6,25 см. За время t по нему проходит заряд, величина которого определяется законом $q(t) = (0{,}8t + 2{,}75)$, Кл. Сила, действующая при этом на провод, F = 2,5 мН. Найти индукцию поля.

3.2.7 На проволочный виток радиусом 10 см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент 6,5 мкН. Сила тока в витке равна 2 А. Определить магнитную индукцию B поля между полюсами магнита. Действием магнитного поля Земли пренебречь.

3.2.8 По двум параллельным проводам длиной l = 5 м каждый текут одинаковые токи силой I = 5 А. Расстояние между проводами d = 10 см. Определить силу F взаимодействия проводников.

3.2.9 По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток I_1 = 10 А. Под ним на расстоянии d = 1,5 см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток I_2 = 1,5 А. Какова должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным?

3.2.10 Проволочный виток радиусом R = 5 см находится в однородном магнитном поле напряженностью H = 2 кА/м. Плоскость витка образует с направлением поля угол $\alpha = 60^{\circ}$. По витку течет ток I = 4 А. Найти механический момент M, действующий на виток.

3.2.11 В поле бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток $I_1 = 20$ А, находится квадратная рамка со стороной $a = 15$ см, по которой течет ток $I_2 = 1$ А. Проводник и рамка расположены в одной плоскости так, что две стороны рамки параллельны проводнику, расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки $d = 5$ см. Определить силу, действующую на рамку.

3.2.12 Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. Определить угловую скорость вращения электрона.

3.2.13 Протон влетает со скоростью $v = 100$ км/с в область пространства, где имеются электрическое ($E = 210$ В/м) и магнитное ($B = 3{,}3$ мТл) поля, совпадающие по направлению. Определить для начального момента движения в поле ускорение протона, если направление скорости v: 1) совпадает с направлением полей; 2) перпендикулярно этому направлению.

3.2.14 Электрон влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Скорость электрона $v = 4 \cdot 10^7$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 1$ мТл. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения электрона в магнитном поле.

3.2.15 Электрон влетел в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 1$ мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется по окружности радиусом $R = 10$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

3.2.16 Найти скорость α-частицы, которая при движении в пространстве, где имеются взаимно перпендикулярные электрические и магнитные поля, не испытывает никакого отклонения. Напряженность магнитного поля составляет 2 кА/м, напряженность электрического поля равна 6,28 кВ/м.

3.2.17 Электрон, движущийся в вакууме со скоростью 10^6 м/с, попадает в однородное магнитное поле с магнитной индукцией 2,2 мТл под углом 30° к магнитным силовым линиям. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

3.2.18 В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}9$ Тл помещена тонкая медная пластинка с током $I = 5$ А. Толщина пластинки $d = 0{,}01$ мм. Определить концентрацию свободных электронов в меди, если вдоль ширины ленты возникает разность потенциалов $\Delta\varphi = 2$ мкВ.

3.2.19 Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 20$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и токи $I_3 = 10$ А, $I_4 = 5$ А, текущие в противоположном направлении.

3.2.20 Плоская квадратная рамка со стороной $a = 20$ см лежит в одной плоскости с бесконечным длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 100$ А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна ей и находится на расстоянии $l = 10$ см от провода. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий рамку.

3.2.21 По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной a = 10 см, течет постоянный ток I = 20 А. Плоскость квадрата составляет угол α = 20° с силовыми линиями однородного магнитного поля с индукцией B = 0,1 Тл. Какую работу A необходимо совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля?

3.2.22 В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл равномерно движется проводник длиной l = 10 см. По проводнику течет ток I = 2 А. Скорость движения проводника v = 20 см/с и направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти работу A перемещения проводника за время t = 10 с и мощность P, затраченную на это перемещение.

3.2.23 Плоскость проволочного витка площадью S = 100 см^2 и сопротивлением R = 5 Ом, находящегося в однородном магнитном поле напряженностью H = 10 кА/м. При повороте витка в магнитном поле отсчет гальванометра, замкнутого на виток, q = 12,6 мкКл. Определить угол поворота витка.

3.2.24 В однородном магнитном поле (B = 0,5 Тл) равномерно вращается прямоугольная рамка, содержащая N = 100 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки S = 150 см^2. Определите период вращения рамки, если максимальная ЭДС, индуцируемая в ней, равна 12 В.

3.2.25 Замкнутый железный сердечник длиной l = 50 см имеет обмотку из N = 1000 витков. По обмотке течет ток I_1 = 1 А. Какой ток I_2 надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

3.2.26 Стальной брусок внесли в магнитное поле напряженностью H = 1600 А/м. Определить намагниченность J стали.

3.2.27 Сила тока в обмотке соленоида, содержащего N = 1500 витков, равна 5 А. Магнитный поток Ф через поперечное сечение соленоида составляет 200 мкВб. Определите энергию магнитного поля в соленоиде.

3.2.28 По обмотке соленоида, в который вставлен железный сердечник, течет ток I = 4А. Соленоид имеет длину l = 1 м, площадь поперечного сечения S = 20 см^2 и число витков N = 400. Определите энергию магнитного поля соленоида.

3.2.29 Определить объемную плотность энергии магнитного поля в железном сердечнике, если индукция магнитного поля в нем равна B = 1 Тл.

3.2.30 Индуктивность соленоида при длине l = 1 м и площади поперечного сечения S = 20 см^2 равна L = 0,4 мГн. При какой силе тока в соленоиде объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида будет равной w = 0,1 Дж/м^3?

4 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Колебания – процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

Свободные (собственные) колебания – колебания, совершающиеся за счет энергии, первоначально сообщенной системе, совершающей колебания, при отсутствии каких-либо других внешних воздействий на эту систему.

Периодические колебания – колебания, для которых физические величины, их описывающие, повторяются через равные промежутки времени.

Гармонические колебания − колебания, при которых изменение колеблющейся величины s описывается гармоническим законом, т. е. уравнением типа

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или } s = A\sin(\omega_0 t + \varphi_1),$$

где s – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда); ω_0 – собственная круговая (циклическая) частота; t – текущее время; φ_0 – начальная фаза ($\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/2$); $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t.

Амплитуда колебаний – максимальное смещение колеблющейся величины.

Период колебаний T – время, за которое фаза получает приращение 2π; минимальное время, через которое повторяется состояние системы; время, за которое совершается одно полное колебание

$$T = \frac{t}{N},$$

где t – время совершения N полных колебаний.

Частота колебаний ν – число полных колебаний, совершаемых за единицу времени

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}.$$

Единица частоты − герц (Гц): 1 Гц − частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Циклическая частота связана с периодом и частотой следующими выражениями

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Пусть материальная точка массой m совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением (при $s = x$):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Скорость v и ускорение a колеблющейся точки будут равны:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = A\omega_0^2 x\,.$$

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку,

$$F = ma = -m\omega_0^2 x,$$

она пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания,

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA\omega_0^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F,

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Полная энергия механических колебаний

$$E = \mathrm{T} + \Pi = \frac{mA\omega_0^2}{2}\,.$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Кинетическая энергия T и потенциальная энергия П изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

Если система совершает колебания, описываемые данным уравнением, то она называется ***гармоническим осциллятором***, примерами гармонического осциллятора являются пружинный маятник, физический маятник, математический маятник, электрический колебательный контур.

Пружинный маятник – груз массой m, подвешенный на пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k – жесткость пружины. Уравнение движения маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\,.$$

Пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

и периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Последняя формула справедлива для упругих колебаний, в которых выполняется закон Гука, при этом масса пружины мала по сравнению с массой тела. Потенциальная энергия пружинного маятника равна

$$\Pi=\frac{kx^2}{2}\,.$$

Физический маятник – твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C тела. Уравнение движения маятника имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{mgl}{I}\alpha=0.$$

При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

и периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}\,,$$

где I – момент инерции маятника относительно его оси вращения; m – масса маятника; l – расстояние от оси вращения до центра тяжести; $l_{\text{пр}}$ – приведенная длина физического маятника

$$l_{\text{пр}}=\frac{I}{ml}.$$

Центр качаний – точка, лежащая на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса, на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс физического маятника.

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити длиной l, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

Математический маятник – частный случай физического маятника. При малых колебаниях математический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из последнего выражения можно сделать вывод, что ***приведенная длина*** физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Колебательный контур – цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R.

В колебательном контуре происходит периодическое изменение электрических величин (зарядов, токов), сопровождающееся взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

Если сопротивлением R можно пренебречь, то дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Колебания заряда происходят по гармоническому закону

$$q = q_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

где q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора, ω_0 − ***собственная частота*** колебаний в контуре

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Период колебаний в идеальном колебательном контуре (***формула Томсона***)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Сила тока в колебательном контуре и напряжение на конденсаторе

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ – амплитуда силы тока; $U_m = q_m / C$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Энергия электрического поля в конденсаторе при электромагнитных колебаниях в контуре

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q – заряд на обкладке конденсатора; q_m – его максимальное значение.

Энергия магнитного поля в катушке при электромагнитных колебаниях в контуре

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где I – сила тока в контуре.

Полная энергия электромагнитных колебаний

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2}.$$

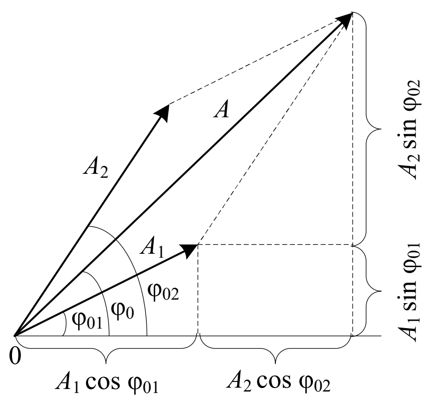
При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

и с начальной фазой

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды складывающихся колебаний; φ_{01} и φ_{02} – их начальные фазы.

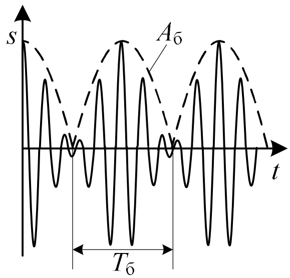


Биения − квазигармонические колебания, получающиеся при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами. Уравнение биений (при равных амплитудах складываемых колебаний)

$$s = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t),$$

где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega$ – разность частот колебаний; $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ – частоты складываемых колебаний. Амплитуда биений является медленной периодической функцией времени (ее изменением за время, сравнимое с периодом колебаний, можно пренебречь).

Период биений – период относительно медленного изменения амплитуды квазигармонических колебаний.



Амплитуда и период биений, образующихся при сложении двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами

$$A_б = 2A\left|\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|, \quad T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad y = A\cos(\omega t + \varphi_{02}),$$

уравнение траектории результирующего движения представляет собой уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{A\,B}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi, .$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз складываемых колебаний.

Если $\Delta\varphi = \pi n$ (n = 0, ±1, ±2, …), то уравнение эллипса вырождается в уравнение прямой

$$y = \pm\frac{B}{A}x.$$

Если $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi/2$ (n = 0, ±1, ±2, …), то уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

что соответствует эллипсу, полуоси которого совпадают с осями координат. Если в этом случае амплитуды складываемых колебаний равны ($A = B$), то уравнение превратится в уравнение окружности.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с различной частотой замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, называются ***фигурами Лиссажу***. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний.

Затухающие колебания − колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0,$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы.

Условие существования затухающих колебаний

$$\beta < \omega_0.$$

Условие слабозатухающих колебаний

$$\beta << \omega_0.$$

Уравнение затухающих колебаний

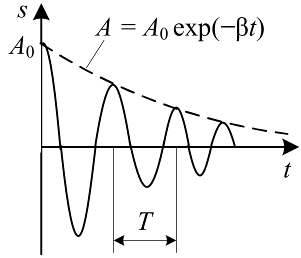
$$s = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 – начальное значение амплитуды колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 \exp(-\beta t).$$

где A_0 — начальная амплитуда. Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется ***временем релаксации***.



Затухание нарушает периодичность колебаний. Если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины. В этом случае период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Логарифмический декремент затухания − величина, обратная количеству колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз, определяется уравнением

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}.$$

Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина. Связь логарифмического декремента затухания с периодом квазигармонических затухающих колебаний

$$\theta = \beta T.$$

Добротность колебательной системы − величина, определяемая выражением

$$Q = 2\pi\frac{W}{\Delta W_1} = 2\pi\frac{W}{\Delta W_T},$$

где W – энергия, запасенная в системе в данный момент времени; ΔW_1 – средняя потеря энергии за время, в течение которого фаза колебаний увеличивается на один радиан; ΔW_T – средняя потеря энергии за один период.

Связь добротности с другими параметрами квазигармонических слабозатухающих колебаний

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e ,$$

где N_e – число полных колебаний, соответствующее времени уменьшения амплитуды в e раз.

Для слабозатухающих колебаний груза на пружине

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad Q = \frac{1}{r}\sqrt{km},$$

где r – коэффициент сопротивления; k – жесткость пружины.

Для электрического контура

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

где R – сопротивление контура; L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

При увеличении коэффициента затухания β период затухающих колебании растет и при $\beta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В таком случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Такой процесс не будет колебательным, он называется апериодическим. При $\omega_0 \le \beta$ имеет место апериодическое затухание.

Автоколебания − незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Вынужденные колебания – колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_m \cos\Omega t ,$$

где f_m – амплитудная характеристика периодического внешнего воздействия; Ω – его циклическая частота. Для колебаний груза на пружине $f_m = \dfrac{F_m}{m}$, для электромагнитных колебаний в контуре $f_m = \dfrac{U_m}{L}$, где F_m – амплитуда внешней силы; U_m – амплитуда напряжения.

В установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний также зависят от ω.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний:

$$s = A\cos\left(\Omega t - \varphi\right),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний; φ – разность фаз между периодическим внешним воздействием и смещением.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется ***резонансом***. При $\beta^2 << \omega_0^2$ значение резонансной частоты практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы.

Разность фаз между периодическим внешним воздействием и смещением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Первая резонансная частота (частота внешнего воздействия, при которой амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение)

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Связь резонансной амплитуды смещения (амплитуды для первой резонансной частоты $A_{\text{рез}}$) и амплитуды при нулевой частоте A^0

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A^0} = Q.$$

Амплитуда «скорости» при вынужденных колебаниях

$$A' = \frac{f_m}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega}\right)^2 + 4\beta^2}}.$$

Разность фаз между периодическим внешним воздействием и «скоростью» смещения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\Omega}.$$

Зависимости мгновенных значений напряжений на резисторе (u_R), на конденсаторе (u_C) и на катушке (u_L), а также силы тока (i) в цепи от времени:

$$u_R = U_{Rm}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right); \quad u_C = U_{Cm}\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$u_L = U_{Lm}\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \quad i = I_m\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Связь амплитуды напряжения на резисторе и амплитуды силы тока:

$$U_{Rm} = RI_m.$$

Связь амплитуды напряжения на конденсаторе и амплитуды силы тока:

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}.$$

Связь амплитуды напряжения на катушке и амплитуды силы тока:

$$U_{Lm} = \omega L I_m.$$

Емкостное сопротивление

$$R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Индуктивное сопротивление

$$R_L = \omega L.$$

Полное сопротивление цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Закон Ома для переменного тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения; ω – циклическая частота переменного тока.

Величины

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{и} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

называются соответственно действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения.

С учетом действующих значений тока и напряжения, выражение средней мощности записывается в виде

$$\langle P \rangle = UI\cos\varphi,$$

где множитель $\cos\varphi$ называется коэффициентом мощности.

Сдвиг фаз между напряжением и силой переменного тока

$$tg\alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Связь амплитуд напряжений при резонансе для переменного тока

$$U_{Cm} = U_{Lm} = QU_{Rm} = QU_m.$$

Связь амплитуд напряжений и силы тока при резонансе

$$U_{Cm} = U_{Lm} = R_{‰} I_m .$$

Волна – процесс распространения колебаний в сплошной среде. При этом частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. В среде распространяется состояние колебательного движения и его энергия. Основное свойство всех волн − перенос энергии без переноса вещества.

Упругие (механические) волны – механические колебания, распространяющиеся в упругой среде.

Продольные волны – волны, в которых частицы среды совершают колебания в направлении распространения волны.

Поперечные волны – волны, в которых частицы среды совершают колебания в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Гармоническая волна – такая волна, для которой колебания частиц среды являются гармоническими.

Длина волны – расстояние между ближайшими частицами, совершающими колебания в одинаковой фазе, равна расстоянию, на которое определенная фаза волны распространится за период

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

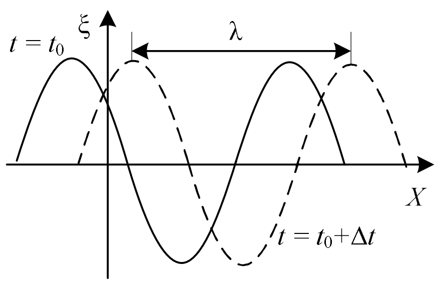
Монохроматическая волна – волна одной, строго определенной частоты.

Фронт волны – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определенному моменту времени.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, совершающих колебания в одинаковой фазе.

Сферическая волна – волна, для которой волновые поверхности представляют собой концентрические сферы.

Плоская волна – волна, для которой волновые поверхности представляют собой параллельные плоскости.



Бегущая волна – волна, переносящая энергию в пространстве.

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где ξ – смещение колеблющихся точек; A – амплитуда волны; ω – циклическая частота волны; φ_0 – начальная фаза; k – ***волновое число***,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении,

$$\xi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0),$$

где $\vec{k}$ – ***волновой вектор***, равный волновому числу по модулю и определяющий направление распространения волны.

Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где r – расстояние от центра волны, до рассматриваемой точки.

Волновое уравнение для распространения волн в изотропной среде в общем случае

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Волновое уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Фазовая скорость – скорость перемещения фазы волны в пространстве,

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}.$$

Принцип суперпозиции волн: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из волновых процессов.

Волновой пакет – суперпозиция волн, близких по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

Групповая скорость – скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет.

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

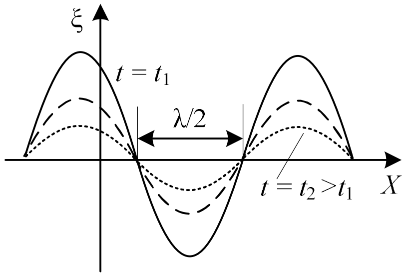
Связь фазовой и групповой скорости

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

Стоячая волна – волна, образующаяся при наложении двух бегущих волн с одинаковыми амплитудами и частотами, распространяющихся навстречу друг другу. Стоячие волны *не переносят* энергию.

Уравнение одномерной стоячей волны,

$$\xi(x,t) = 2A_0 \cos(\omega t)\cos(kx),$$



где A_0 – амплитуды двух встречных плоских бегущих гармонических волн, при интерференции которых образуется стоячая волна; ω и k – соответственно их круговые частоты и волновые числа.

Амплитуда стоячей волны

$$A = 2A_0 \cos(kx).$$

Пучности стоячей волны – точки с максимальной амплитудой колебаний. ***Узлы*** стоячей волны – точки с нулевой амплитудой колебаний. Расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$.

В бегущей волне все точки совершают колебания с одинаковой амплитудой, а фаза колебаний зависит от координаты рассматриваемой точки. В стоячей волне все точки между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами.

Звуковые (акустические) волны – распространяющиеся в среде упругие волны с частотой 16–20000 Гц. Инфразвуковые волны – волны с $\nu < 16$ Гц, ультразвуковые волны – волны с $\nu > 20$ кГц.

Звуковые волны в газах и жидкостях – продольные, в твердых телах могут быть как продольными, так и поперечными.

Скорость звука в газе (если процессы, протекающие в газе при распространении упругих волн, являются достаточно быстрыми и их можно считать адиабатными)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

где γ – постоянная адиабаты; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; μ – молярная масса газа.

Скорость упругих продольных волн в твердом теле

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга; ρ – плотность вещества. Для поперечных волн скорость задается аналогичным выражением с заменой модуля Юнга на модуль сдвига соответствующего материала.

Электромагнитная волна – переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

В зависимости от длины волны (частоты) электромагнитные волны делятся на радиоволны, инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение, γ-излучение.

Волновые уравнения для электромагнитной волны

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где v – фазовая скорость.

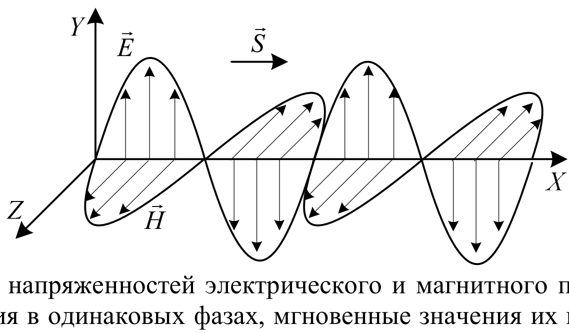
Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n},$$

где ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; n – показатель преломления среды.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору скорости распространения волны, образуя правовинтовую систему. Следовательно, волновые уравнения можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$



Векторы напряженностей электрического и магнитного полей совершают колебания в одинаковых фазах, мгновенные значения их модулей связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu_0\mu}\left|\vec{H}\right|.$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,EH\ .$$

Плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова – Пойнтинга)

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\,\vec{H}\right]\ .$$

Направление этого вектора совпадает с направлением переноса энергии, модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Эффект Доплера – изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга.

Частота, воспринимаемая приемником при относительном движении источника и приемника сигнала для упругих волн

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon_x - u_{\text{пр},x}}{\upsilon_x - u_{\text{ист},x}}\ ,$$

где ν_0 – частота сигнала, испускаемая источником; υ_x, $u_{\text{пр},x}$ и $u_{\text{ист},x}$ – соответственно проекции скоростей распространения сигнала (скорости волны), движения источника и движения приемника на ось, проходящую через источник и приемник (ось x). Все скорости рассматриваются в системе отсчета, связанной с упругой средой, по которой распространяются волны.

Частота, воспринимаемая приемником при продольном эффекте Доплера для электромагнитных волн в вакууме (относительная скорость источника и приемника направлена вдоль соединяющей их прямой),

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \upsilon / c}}{\sqrt{1 + \upsilon / c}}\ ,$$

где υ – относительная скорость источника электромагнитных волн и их приемника; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Частота, воспринимаемая приемником при поперечном эффекте Доплера для электромагнитных волн (относительная скорость источника и приемника направлена перпендикулярно соединяющей их прямой),

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\ .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.1. Материальная точка массой m = 5 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,5 Гц и амплитудой A = 3 см. Определить скорость точки и силу, действующую на нее, в момент времени, когда смещение x = 1,5 см, а также полную энергию колебаний.

Решение

Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

а формулу скорости (точнее ее проекции) получим, взяв производную по времени от смещения:

$$v = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из предыдущих формул время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2},$$

где знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак минус – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$v = \pm 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5\cdot\sqrt{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2} \approx 8{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{м/с}.$$

Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma,$$

где a – ускорение точки (точнее его проекция), которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = dv/dt = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

Подставив выражение для ускорения в формулу для силы, получим

$$F = -m\omega^2 x = -4\pi^2\nu^2 m x,$$

где знак минус соответствует противоположному направлению силы и смещения (отрицательная проекция силы).

Подставив в это уравнение значения всех величин, найдем

$$F \approx -(2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5)^2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2} \approx -7{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Полная энергия гармонических колебаний точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент времени потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия гармонических колебаний равна максимальной кинетической энергии:

$$E = E_{\text{к,max}} = mv^2_{\text{max}}/2.$$

Максимальную скорость v_{max} определим из формулы для скорости колебаний, положив $\sin(\omega t + \varphi) = -1$: $v_{\text{max}} = \omega A = 2\pi\nu A$. Подставив это выражение в формулу для полной энергии, найдем

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Для проверки размерности ответа подставим единицы соответствующих физических величин в конечную формулу

$$\left[E\right] = \text{кг}\cdot\text{Гц}^2\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Подставив значения всех величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$E \approx 2\cdot(3{,}14\cdot 0{,}5\cdot 3\cdot 10^{-2})^2\cdot 5\cdot 10^{-3} \approx 22{,}1\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Ответы: $v = \pm 8{,}2$ см/с; $F = -0{,}74$ мН; $E = 22{,}1$ мкДж.

Пример 4.2. Небольшое тело массой 10 г совершает синусоидальные гармонические колебания с периодом 1 с и нулевой начальной фазой. Определить амплитуду колебаний, если через 0,3 с после их начала кинетическая энергия тела составляла 1,2 мДж.

Решение

В соответствии с условием задачи уравнение происходящих гармонических колебаний имеет вил

$$x = A\sin\left(\omega t\right),$$

где x – смещение тела от положения равновесия; $\omega = 2\pi / T$ – циклическая частота колебаний.

Проекция скорости тела на направление оси, вдоль которой отсчитывается его смещение, определяется с помощью производной по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos\left(\omega t\right).$$

Поэтому кинетическая энергия тела будет задаваться выражением

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\omega A\right)^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

После преобразований получим конечную формулу для амплитуды

$$A = \frac{T}{2\pi\left|\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right|}\sqrt{\frac{2E_k}{m}}\ .$$

Здесь использован модуль, вообще говоря, знакопеременной функции, т. к. по определению амплитуда – величина положительная.

Для проверки размерности ответа подставим единицы соответствующих физических величин в конечную формулу

$$[A] = \frac{\text{с}}{1}\cdot\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\cdot\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}} = \text{м}\ .$$

Подставив значения всех величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$A = \frac{1}{2\pi\left|\cos\left(\frac{2\pi}{1}\cdot 0,3\right)\right|}\sqrt{\frac{2\cdot 1,2\cdot 10^{-3}}{10^{-2}}} = 0,25\ \text{м}.$$

Ответ: $A = 0,25$ м.

Пример 4.3. На невесомом стержне длиной 141 см закреплены два небольших одинаковых груза, один – на нижнем конце, а второй – посредине. Определить период свободных колебаний стержня около оси, проходящей перпендикулярно ему посредине между центром и свободным концом.

Решение

Для определения искомого периода воспользуемся соотношением для физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_C}},$$

где I – момент инерции тела (стержня с грузами) относительно оси вращения; $m = m_1 + m_2 = 2m_1$ – масса тела; g – ускорение свободного падения; l_C – расстояние от оси до центра масс тела.

Центр масс находится посредине между грузами, следовательно, $l_C = l/2$. Каждый из грузов принимаем за материальную точку. В этом случае

$$I = I_1 + I_2 = m_1x_1^2 + m_2x_2^2,$$

где I_1 – момент инерции первого груза; I_2 – момент инерции второго груза; x_1 – расстояние от оси до первого груза; x_2 – расстояние от оси до второго груза.

Подставив выражения из условия задачи, получим

$$I = m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_2\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}m_1 l^2.$$

В результате подстановки всех формул в соотношение для периода колебаний получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{8}\frac{m_1 l^2}{2m_1 g}\frac{2}{l}} = \pi\sqrt{\frac{5}{2}\frac{l}{g}}.$$

Проверим, дает ли конечная формула единицу времени. Для этого в ее правую часть вместо символов величин подставим обозначения их единиц и используем для их преобразования определения физических величин:

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с}.$$

Подставив значения всех величин в конечную формулу и произведя вычисления, получим

$$T = 3{,}14\sqrt{\frac{5}{2}\frac{1{,}41}{9{,}8}} = 1{,}88\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 1{,}88$ с.

Пример 4.4. Два одинаково направленных гармонических колебания с одинаковыми амплитудами и периодами складываются в одно колебание, с амплитудой в два раза меньше. Определить разность фаз складываемых колебаний.

Решение

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты (т. к. периоды одинаковы) получается гармоническое колебание той же частоты с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)},$$

где φ_{01} и φ_{02} – начальные фазы складываемых колебаний.

В силу того, что частоты колебаний одинаковы, их фазы с течением времени изменяются одинаково. Разность фаз остается постоянной и поэтому может быть определена в начальный момент времени, т. е. $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$. Перепишем выражение для амплитуды результирующего колебания с учетом условий задачи

$$\left(\frac{A_1}{k}\right)^2 = 2A_1^2 + 2A_1^2\cos\left(\Delta\varphi\right),$$

где k – отношение амплитуд начального и результирующего колебаний.

Из полученного соотношения следует окончательная формула для разности фаз

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{1-2k^2}{2k^2}\right).$$

Размерность выражения очевидна.

Произведем расчет

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{1-2\cdot 2^2}{2\cdot 2^2}\right) = 151°.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 151°$.

Пример 4.5. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях*,* уравнения которых имеют вид $x = A_1\cos(\omega t/2)$, $y = A_2\cos(\omega t)$, где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\omega = \pi$ рад/с. Найти уравнение траектории движения точки и построить ее график.

Решение

Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из уравнений взаимно перпендикулярных колебаний, воспользовавшись формулой для половинного угла:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

где в данном случае $\omega = \alpha t$. Подставив сюда соотношения из условия задачи

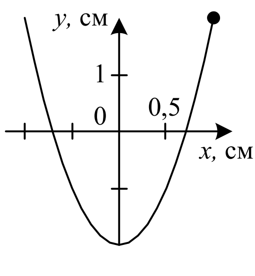
$$\cos(\omega t) = \frac{y}{A_2};\quad \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{x}{A_1},$$

найдем уравнение траектории

$$y = A_2\left(2\frac{x^2}{A_1^2} - 1\right).$$

Подставив значения амплитуд, получим

$$y = 4x^2 - 1.$$



Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью OY. Смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от −1 до +1 см по оси OX и от −1 до +1 см по оси OY.

Используя уравнения колебаний, определим координаты точки в начальный момент времени $t = 0$. Они будут равны $x(0) = 1$ см, $y(0) = 2$ см. Зная начальное положение точки, можно сделать вывод о направлении колебаний.

Пример 4.6. Биения образуются при сложении двух гармонических колебаний одного направления. Определить период второго и амплитуду первого колебания, если частота первого 100 Гц, амплитуда второго 50 см, период биений 1 с, а максимальное значение амплитуды 90 см.

Решение

Период биений (период относительно медленного изменения амплитуды квазигармонических колебаний)

$$T_б = \frac{2\pi}{|\Delta\omega|},$$

где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – разность циклических частот складываемых колебаний $\omega_1 = 2\pi\nu_1$, $\omega_2 = 2\pi\nu_2$. Здесь ν_1 и ν_2 – частоты колебаний.

Подставляя эти соотношения в формулу для периода биений, получим

$$|\nu_1 - \nu_2| = \frac{1}{T_б} \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \nu_1 \pm \frac{1}{T_б}.$$

Учет связи между частотой и периодом позволяет получить одно из искомых выражений

$$T_2 = \frac{T_б}{\nu_1 T_б \pm 1}.$$

Проверка единиц в полученной формуле подтверждает ее правильность

$$[T_2] = \frac{с}{Гц \cdot с} = с \cdot \frac{с}{с} = с.$$

Расчет дает

$$T_2 = \frac{1}{100 \cdot 1 \pm 1} = 9,9 \cdot 10^{-3};\ 1,01 \cdot 10^{-2} \quad с.$$

В силу того, что биения образуются при сложении колебаний с разными частотами, их разность фаз не будет постоянной, а будет относительно медленно изменяться с течением времени. При сложении двух одинаково направленных колебаний метод векторных диаграмм показывает, что амплитуда результирующего колебания определяется по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)},$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз колебаний.

Анализ этого выражения показывает, что амплитуда максимальна при $\Delta\varphi = 0$. Отсюда следует

$$A_{max} = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_{max} - A_2.$$

Размерность очевидна, а расчет дает

$$A_1 = 90 - 50 = 40 \quad см.$$

Ответ: $T_2 = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$; $1{,}01 \cdot 10^{-3}$ с, $A_1 = 40$ см.

Пример 4.7. Определить логарифмический декремент затухания колебаний системы, если период ее затухающих колебаний на 1 % больше периода собственных незатухающих колебаний.

Решение

Частота затухающих колебаний системы ω связана с частотой ее собственных незатухающих колебаний ω_0 и коэффициентом затухания β:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,.$$

Выражая логарифмический декремент затухания θ через период затухающих колебаний T ($\theta = \beta T$), а период − через частоту затухающих колебаний ω ($T = 2\pi/\omega$), найдем соотношение между частотами:

$$\omega = \frac{2\pi\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \theta^2}}\,.$$

Произведя в последнем уравнении обратный переход от частот к периодам, получим:

$$T = T_0\sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}\,,$$

где T_0 – период собственных незатухающих колебаний системы.

Из последнего соотношения найдем выражение для логарифмического декремента затухания

$$\theta = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta T}{T_0}\left(2 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)}\,,$$

подставив в него исходные данные, получим ответ задачи:

$$\theta \approx 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{10^{-2}\left(2 + 10^{-2}\right)} \approx 0{,}628.$$

Очевидно, что конечная формула дает безразмерную величину.

Ответ: $\theta = 0{,}628$.

Пример 4.8. Собственная частота незатухающих колебаний маятника составляет 500 Гц. Определить для него первую резонансную частоту, если частота затухающих колебаний равна 499 Гц.

Решение

Сначала перейдем к соответствующим циклическим частотам (с соответствующими индексами):

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \omega_0 = 2\pi\nu_0; \quad \omega_р = 2\pi\nu_р\,.$$

Циклическая частота затухающих колебаний рассчитывается по формуле

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2\,,$$

где β – коэффициент затухания в колебательной системе.

Первая резонансная частота рассчитывается по формуле

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 .$$

Исключая из двух последних соотношений $2\beta^2$, получим

$$\omega_p^2 = 2\omega^2 - \omega_0^2 .$$

Переход от циклических частот к обычным дает

$$\nu_p = \sqrt{2\nu^2 - \nu_0^2} .$$

Равенство размерностей в полученном соотношении очевидно. Произведем расчет:

$$\nu_p = \sqrt{2 \cdot 499^2 - 500^2} = 498 \text{ Гц}.$$

Ответ: ν_p = 498 Гц.

Пример 4.9. Соленоид длиной l = 50 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2 включен в цепь переменного тока с частотой ν = 50 Гц. Определить число витков соленоида, если его активное сопротивление R = 4,1 Ом, а сдвиг фаз между напряжением и током составляет φ = 60º.

Решение

При отсутствии в цепи переменного тока конденсатора сдвиг фаз между напряжением и током определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R},$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота; L – индуктивность соленоида. Считаем, что сердечник у соленоида отсутствует, значит $\mu = 1$ и тогда

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Подставив указанные соотношения в формулу для сдвига фаз и выразив число витков, найдем

$$N = \sqrt{\frac{Rl \operatorname{tg}\varphi}{2\pi\nu\mu_0 S}}.$$

Проверим размерность:

$$[N] = \sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{Гц} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{Вб}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}} = 1.$$

Произведем вычисления

$$N = \sqrt{\frac{4{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}73}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}} = 3000.$$

Ответ: N = 3000.

Пример 4.10. Плоская гармоническая волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi$ = 0,75π. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент t = 1,2 с, если амплитуда колебаний A = 0,1 м.

Решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2π; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}.$$

Выражая λ, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}.$$

Подставив числовые значения, определим длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi(5-12)}{0{,}75\pi} = 8\ \text{м}.$$

Для того чтобы записать уравнение плоской гармонической волны, определим значения циклической частоты ω и волнового числа k:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Произведем вычисления

$$\omega = \frac{2\pi\cdot 20}{8} = 5\pi\ \text{рад/с}, \quad k = \frac{2\pi}{8} = 0{,}25\pi\ \text{м}^{-1}.$$

Запишем уравнение плоской гармонической волны

$$\xi(x,t) = 0{,}1\cos(5\pi t - 0{,}25\pi x + \varphi),$$

где смещение и координата выражены в метрах, время – в секундах, а значение начальной фазы остается произвольным.

Используя это уравнение и принимая начальную фазу равной нулю, определим смещение указанных в условии точек:

$$s_1 = \xi(x_1,t) = 0{,}1\cos(5\pi\cdot 1{,}2 - 0{,}25\pi\cdot 12) = -0{,}1\ \text{м};$$

$$s_2 = \xi(x_2,t) = 0{,}1\cos(5\pi\cdot 1{,}2 - 0{,}25\pi\cdot 15) = -0{,}0707\ \text{м}.$$

Ответ: λ = 8 м; s_1 = −10 см; s_2 = −7,07 см.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1 Гармонические колебания величины s описываются уравнением $s = 0{,}02\cos(6\pi t + \pi/3)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) частоту колебаний; 4) период колебаний.

4.2 Тело массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$, м. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

4.3 Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой 25 см. Определить ее максимальное ускорение при условии, что максимальная скорость равна 50 см/с. Написать уравнение колебаний для нулевой начальной фазы.

4.4 Тонкий однородный стержень длиной l = 60 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x = 15 см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

4.5 Определить приведенную длину и период колебаний легкого стержня длиной l = 0,3 м, на котором закреплены два одинаковых груза: один – в середине стержня, другой – на его конце. Стержень с грузами закреплен на горизонтальной оси, проходящей через свободный конец.

4.6 Определить частоту колебаний шара радиусом R = 40 см, подвешенного на нити, длина которой равна его радиусу.

4.7 Два одинаково направленных гармонических колебания одинакового периода с амплитудами A_1 = 4 см и A_2 = 8 см имеют разность фаз φ = 45°. Определить амплитуду результирующего колебания.

4.8 Колебательный контур содержит соленоид без сердечника (длина l = 5 см, площадь поперечного сечения S_1 = 1,5 см^2, число витков N = 500) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами d = 1,5 мм, площадь пластин S_2 = 100 см^2). Определите частоту собственных колебаний контура.

4.9 Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода T = 4 с и одинаковой амплитуды A = 5 см составляет $\pi/4$. Напишите уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

4.10 Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида $x = A\cos(t)\cos(45t)$ (t – в секундах). Определите: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания.

4.11 Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\cos t$ и $y = B\cos t$, где A, B – положительные постоянные. Определите уравнение траектории точки, укажите направление движения по этой траектории.

4.12 Тело массой m = 0,3 кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания для этих колебаний θ = 0,01. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза; 2) число полных колебаний, которые должно совершить тело, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

4.13 Тело массой m = 100 г, совершающее затухающие колебания, за τ = 1 мин потеряло 40 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления r.

4.14 Частота свободных затухающих колебаний некоторой системы ω_0 = 65 рад/с, а её добротность Q = 2. Определите собственную частоту колебаний этой системы.

4.15 За время, в течение которого система совершает N = 50 полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определите добротность Q системы.

4.16 Колебательный контур содержит катушку индуктивности L = 25 мГн, конденсатор емкостью C = 10 мкФ и резистор сопротивлением R = 1 Ом. Амплитуда заряда на пластинах конденсатора Q = 1 мКл. Определите: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) уравнение зависимости изменения напряжения на обкладках конденсатора от времени.

4.17 Определите резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний v = 300 Гц, а логарифмический декремент затухания θ = 0,2.

4.18 В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением R = 40 Ом, катушку индуктивностью L = 25 мГн и конденсатор емкостью C = 28 мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением U_m = 180 В и частотой ω = 314 рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг φ по фазе между током и внешним напряжением.

4.19 В цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц включена катушка длиной l = 30 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2, содержащая N = 1000 витков. Определите активное сопротивления катушки, если известно, что сдвиг по фазе между током и напряжением φ = 30°.

4.20 Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью υ = 10 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии x_1 = 7 м и x_2 = 10 м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi/4$. Амплитуда волны A = 5 см. Определите: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение второй точки в момент времени t = 2 с.

4.21 Две точки лежат на луче и находятся от источника на расстоянии $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс и скорость распространения волны $v = 300$ м/с. Определите разность фаз колебаний этих точек.

4.22 Электропоезд проходит со скоростью 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого 300 Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определите скачок частоты, воспринимаемый приемником.

4.23 Движущийся по реке теплоход дает свисток частотой 400 Гц. Наблюдатель, стоящий на берегу, воспринимает звук свистка частотой 395 Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определите скорость движения теплохода. Приближается или удаляется теплоход?

4.24 Определите длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_m = 50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 1{,}5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

4.25 Средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определите скорость распространения звука в газе при тех же условиях.

4.26 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определите амплитуду напряженности магнитного поля.

4.27 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 3 мВ/м. Определите интенсивность волны, т. е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени.

5 ОПТИКА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Оптика − раздел физики, изучающий свойства и физическую природу света, а также его взаимодействие с веществом.

Геометрическая оптика – раздел физики, в котором законы распространения света рассматриваются в рамках представления о световых лучах.

Световой луч – линия, перпендикулярная волновой поверхности, вдоль которой распространяется поток световой энергии.

Закон прямолинейного распространения света: свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Закон независимости световых пучков: эффект, производимый отдельным световым пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно с ним остальные пучки или они устранены.

При падении света на границу раздела двух сред, он разделяется на отраженный луч и преломленный луч.

Закон отражения: отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол падения α равен углу отражения γ:

$$\alpha = \gamma.$$

Закон преломления: луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}$$

где n_{21} − относительный показатель преломления второй среды относительно первой, β – угол преломления.

Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Абсолютный показатель преломления среды – величина n, равная отношению скорости c электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости v в среде:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Отсюда следует, что относительный показатель преломления двух сред – это отношение фазовых скоростей электромагнитных волн в этих средах

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}.$$

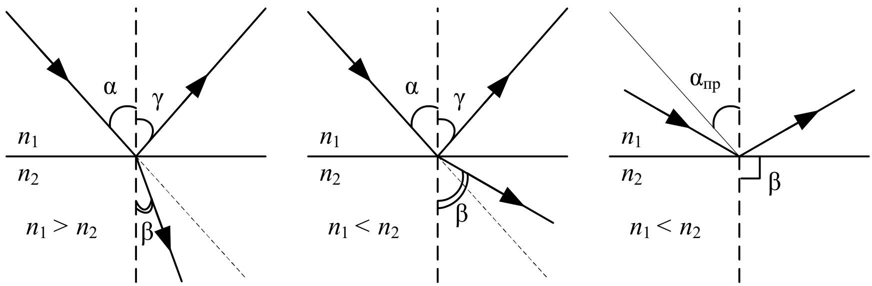
Абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}\ ,$$

где ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

Закон преломления можно также записать в виде

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$



Обратимость световых лучей: если обратить луч, заставив его падать на границу раздела под углом β, то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом α, т. е. пойдет в обратном направлении.

Предельный угол – угол падения $\alpha_{пр}$, для которого угол преломления становится равным $\pi/2$, при распространении света из среды с большим показателем преломления n_1 (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления n_2 (оптически менее плотную) ($n_1 > n_2$)

$$\sin\alpha_{пр} = n_{21}.$$

Полное внутреннее отражение – при углах падения в пределах от $\alpha_{пр}$ до $\pi/2$ луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы. Явление полного внутреннего отражения имеет место только при падении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную.

Линза – прозрачное тело, ограниченные двумя поверхностями, преломляющими световые лучи, способное формировать оптические изображения предметов.

Тонкая линза – линза, для которой ее толщина значительно меньше радиуса поверхностей, ограничивающих линзу.

Главная оптическая ось линзы – прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей, ограничивающих линзу.

Оптический центр линзы – точка, лежащая на главной оптической оси, через которую лучи проходят не преломляясь.

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояние от линзы до изображения; F – фокусное расстояние линзы.

Фокусное расстояние линзы определяется по формуле

$$F=\frac{1}{(n-1)\left(1/R_1\pm 1/R_2\right)},$$

где n – относительный показатель преломления линзы и окружающей среды; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы.

Волновая оптика **–** раздел физики, в котором свет рассматривается как электромагнитная волна.

Когерентные волны – волны, для которых разность фаз остается постоянной во времени. Когерентными могут быть только волны одной частоты.

Интерференция волн – усиление или ослабление в разных точках пространства результирующей волны, образующейся при наложении двух или нескольких когерентных волн.

Радиус когерентности – максимальное поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции

$$r_{\text{ког}}=\frac{\lambda}{\Delta\alpha},$$

где $\Delta\alpha$ – угловой размер источника из точки наблюдения.

Оптическая длина пути световой волны

$$L=\int_0^l n(x)dx,$$

где l – геометрическая длина пути; $n(x)$ – зависимость показателя преломления от координаты вдоль луча. Для случая $n=\text{const}$ (однородное вещество) $L=nl$.

Разность фаз двух когерентных волн

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где λ_0 – длина волны в вакууме; $\Delta=L_2-L_1$ – оптическая разность хода двух световых волн.

Условие максимального усиления света при интерференции:

– для разности фаз

$$\Delta\varphi=\pm 2k\pi \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

– для оптической разности хода

$$\Delta=\pm k\lambda \quad \left(k=0;1;2;\ldots\right),$$

где λ – длина волны света в среде, в которой происходит интерференция.

Условие максимального ослабления света при интерференции:

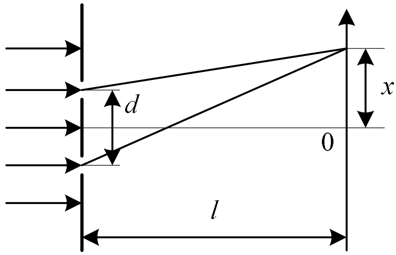
– для разности фаз

$$\Delta\varphi = \pm(2k + 1)\pi \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ ...);$$

– для оптической разности хода

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots).$$

Оптическая разность хода двух световых волн от вторичных источников (щелей) до экрана в опыте Юнга



$$\Delta = \frac{xd}{l},$$

где x – координата точки на экране, отсчитываемая от его центра; d – расстояние между щелями; l – расстояние от щелей до экрана, причем $l \gg d$.

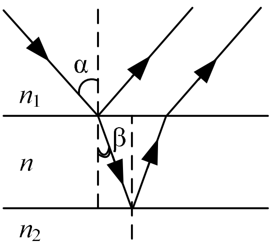
Ширина темной (светлой) полосы:

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d},$$

где ширина темной полосы Δx − это расстояние между соседними светлыми интерференционными полосами на экране, т. е. расстояние между соседними точками, которым соответствуют максимумы освещенности; ширина светлой полосы − это расстояние между соседними темными интерференционными полосами на экране, т. е. расстояние между соседними точками, которым соответствуют минимумы освещенности.

Интерференция в тонких пленках – интерференция света, возникающая в результате отражения от двух поверхностей тонкой пленки.

Полосы равного наклона – интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, локализированы в бесконечности.



Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от двух поверхностей тонкой пленки и сведении соответствующих лучей в одну точку экрана:

– в случае, когда $n_1 < n$, $n_2 < n$ или $n_1 > n$, $n_2 > n$,

$$\Delta = 2dn\cos\beta \pm \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2},$$

где n – показатель преломления вещества пленки; n_1, n_2 – показатели преломления сред соответственно над и под пленкой; d – толщина пленки; β – угол преломления света в пленке; α – угол падения;

– в случае, когда $n_1 < n$, $n_2 > n$ или $n_1 > n$, $n_2 < n$,

$$\Delta = 2dn\cos\beta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha}\,.$$

Для проходящих лучей света оптическая разность хода изменяется на половину длины волны.

Просветление оптики – нанесение на поверхность линзы оптического прибора тонкой пленки с показателем преломления, меньшим, чем у линзы для уменьшения ослабления интенсивности проходящего света за счет гашения отраженных лучей.

Показатель преломления просветляющего покрытия

$$n = \sqrt{n_{\text{ст}}}\,,$$

где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стекла, на которое наносится покрытие.

Минимальная толщина просветляющего покрытия

$$d = \frac{\lambda}{4n}\,.$$

Полосы равной толщины – интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на пластинку переменной толщины, от мест с одинаковой толщиной, локализированы вблизи поверхности пластины.

Кольца Ньютона – полосы равной толщины, наблюдаемые при отражении света от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны.

Радиус темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \qquad (k = 0;\, 1;\, 2;\, \ldots)\,,$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

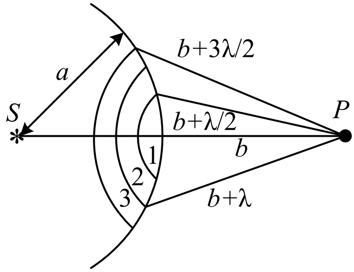
Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем)

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}} \qquad (k = 1;\, 2;\, \ldots)\,.$$

Дифракция – способность волн огибать препятствия и заходить в области позади них; отклонение света от прямолинейного направления при распространении в неоднородной среде.

Принцип Гюйгенса − Френеля: волновую поверхность распространяющегося света можно представить как совокупность бесконечно малых элементов, являющихся источниками *вторичных когерентных сферических волн,* амплитуды которых пропорциональны площади элемента; амплитуда колебаний в любой точке пространства за волновой поверхностью определяется интерференцией этих вторичных волн.

Зоны Френеля – области, на которые разбивается волновая поверхность, причем расстояние от краев зоны до точки наблюдения отличается на половину длины волны световой волны.



Радиус зоны Френеля с номером m для сферической световой волны, распространяющейся в однородной среде

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} ,$$

где a – расстояние от источника света до волновой поверхности; b – расстояние от волновой поверхности до точки, в которой производится наблюдение.

Для плоской световой волны ($a \to \infty$) $r_m = \sqrt{mb\lambda}$.

Дифракция Френеля – дифракция сферических волн, дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию.

При дифракции Френеля на круглом отверстии дифракционная картина представляет собой концентрические светлые и темные кольца. В центре будет наблюдаться максимум интенсивности света, если отверстие открывает нечетное число зон Френеля; минимум – если четное.

При дифракции Френеля на круглом диске в центре дифракционной картины всегда наблюдается светлое пятно, окруженное концентрическими темными и светлыми кольцами.

Дифракция Фраунгофера – дифракция плоских световых волн, или дифракция в параллельных лучах. Она наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию.

Математическое условие применимости геометрической оптики

$$\frac{R^2}{b\lambda} >> 1 ,$$

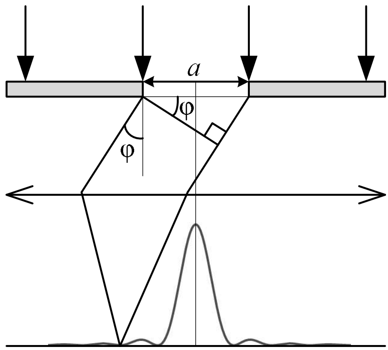
где R – характерный размер препятствия (например, радиус отверстия или непрозрачного диска), на котором происходит дифракция; b – расстояние от препятствия до точки наблюдения.

Математическое условие дифракции Френеля

$$\frac{R^2}{b\lambda} \sim 1 .$$

Математическое условие дифракции Фраунгофера

$$\frac{R^2}{b\lambda} << 1 .$$



При дифракции Фраунгофера на одной щели (нормальное падение) условие минимумов:

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1;\, 2;\, \ldots),$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; k – порядок минимума; λ – длина волны.

Условие максимумов

$$a\sin\varphi' = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots),$$

где φ' – приближенное значение угла дифракции; k – порядок максимума.

В прямом направлении ($\varphi = 0$) свет распространяется с наибольшей интенсивностью, т. е. наблюдается центральный дифракционный максимум. Интенсивности центрального и последующих максимумов относятся как 1:0,047:0,017:0,0083: ...

Дифракционная решетка – система параллельных щелей равной ширины a, разделенная непрозрачными промежутками с одинаковой шириной b.

Период (постоянная) решетки – величина $d = a + b$.

При дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке (нормальное падение) условие главных максимумов

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0; 1; 2; \ldots),$$

где d – период решетки; φ – угол дифракции; k – порядок максимума (спектра).

Условие дополнительных минимумов

$$d\sin\varphi = \pm m\frac{\lambda}{N} \qquad \left(m = 1; 2; \ldots; N-1; N+1; \ldots\right),$$

где N – общее число щелей решетки. Между двумя главными максимумами располагаются $N - 1$ дополнительных минимумов.

Положение максимумов зависит от длины волны λ, поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($\varphi = 0$), разложатся в спектр, фиолетовая часть которого будет расположена ближе к центру дифракционной картины, красная – дальше от центра.

Разрешающая способность оптического прибора (определяющее уравнение)

$$R = \frac{1}{\Delta\varphi},$$

где $\Delta\varphi$ – наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором их изображения в фокальной плоскости объектива могут быть видны раздельно.

Разрешающая способность объектива

$$R = \frac{D}{1,22\lambda},$$

где D – диаметр объектива.

Разрешающая способность спектрального прибора (определяющее уравнение)

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), для которых соответствующие им максимумы могут быть видны раздельно в спектре на экране.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = kN,$$

где k – порядок максимумов.

Угловая дисперсия спектрального прибора (определяющее уравнение)

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda},$$

где $\delta\varphi$ – разница угловых положений максимумов спектральных линий, отличающихся по длине волны на величину $\delta\lambda$.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{k}{d\cos\varphi}.$$

Пространственная решетка − геометрически правильное и периодически повторяющееся в пространстве расположение структурных элементов, подобных по форме.

Формула Вульфа − Брэгга

$$2d\sin\theta = k\lambda,$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла), определяющий направление, для которого имеет место дифракционный максимум при зеркальном отражении лучей от атомных плоскостей; k – порядок максимума.

Дисперсия света – зависимость показателя преломления n вещества от частоты ν (длины волны λ) света ($n = f(\lambda)$) или зависимость фазовой скорости v световых волн от его частоты ν.

Разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму – следствие дисперсии света.

Угол отклонения светового луча призмой (формула справедлива для малых углов)

$$\varphi = \Omega\left(n - 1\right),$$

где Ω – угол при вершине призмы; n – показатель преломления для падающего света.

Соотношение для нормальной дисперсии (как правило, соответствует участкам спектра, для которых коэффициент поглощения относительно мал, т. е. вещество прозрачно)

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0.$$

Соотношение для аномальной дисперсии (как правило, соответствует участкам спектра, для которых коэффициент поглощения относительно велик, т. е. вещество практически непрозрачно)

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0.$$

Поглощение (абсорбция) света – явление потери энергии световой волной, проходящей через вещество, вследствие преобразования энергии волны в другие формы; в результате прохождения через вещество интенсивность света уменьшается.

Закон Бугера для поглощения света

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I – интенсивность света в точке, находящейся на расстоянии x от границы вещества; I_0 – интенсивность света в точке на границе вещества (падающий свет); α – коэффициент поглощения, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света.

Эффект Вавилова − Черенкова – возникновение электромагнитного излучения при движении заряженных частиц в среде с постоянной скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде.

Излучение Вавилова − Черенкова происходит под углом, определяемым соотношением

$$\cos\theta = \frac{c}{nv},$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды; v – скорость движения заряженной частицы.

Световой вектор – вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны (лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны).

Естественный свет – световая волна, характеризующаяся всевозможными равновероятными направлениями колебаний светового вектора.

Поляризованный свет – свет, для которого направления колебаний светового вектора каким-либо образом упорядочены.

Частично поляризованный свет – свет, для которого существует преимущественное направления колебаний светового вектора.

Плоскополяризованный (линейно поляризованный) свет – свет, для которого световой вектор совершает колебания только в одном направлении.

Плоскость поляризации – плоскость, проходящая через направление колебаний светового вектора и направление распространения волны.

Эллиптически поляризованный свет – свет, для которого световой вектор совершает колебания таким образом, что его конец описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Циркулярно поляризованный (поляризованный по кругу) свет – свет, для которого световой вектор совершает колебания таким образом, что его конец описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – соответственно максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным компонентам светового вектора. Для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного $I_{\min} = 0$ и $P = 1$.

Поляризаторы – объекты, пропускающие колебания только определенного направления.

При прохождении (без поглощения) через поляризатор естественного света интенсивностью I_0, интенсивность вышедшего света I уменьшается вдвое

$$I = \frac{1}{2} I_0 .$$

Закон Малюса: интенсивности плоскополяризованных лучей света, падающих на поляризатор (I_0) и прошедших через него (I), связаны соотношением

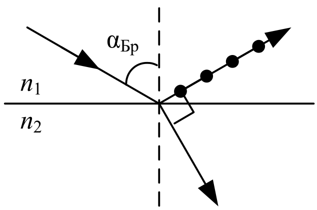
$$I = I_0 \cos^2 \varphi ,$$

где φ – угол между плоскостью поляризации света и плоскостью пропускания поляризатора. Здесь предполагается отсутствие поглощения света.

Если на пути луча света поставить один за другим два поляризатора (второй называют ***анализатором***), то интенсивность света будет подчиняться закону Малюса.

Закон Брюстера: луч, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, полностью поляризован, если угол падения удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{Бр}} = n_{21},$$



где $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления второго диэлектрика относительно первого. Отраженный луч будет линейно поляризован в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Преломленный луч при угле падения $\alpha_{\text{Бр}}$ поляризуется максимально, но не полностью. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны.

Двойное лучепреломление – разделение преломленного луча света на два луча – обыкновенный и необыкновенный, при прохождении в анизотропных кристаллах. Для обыкновенного луча скорость его распространения (а значит, и показатель преломления) не зависит от направления, для необыкновенного луча скорость распространения и показатель преломления зависят от направления распространения луча. Вышедшие из кристалла лучи плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Оптически активные вещества – вещества, способные поворачивать плоскость поляризации проходящего через них света. В зависимости от направления вращения плоскости поляризации эти вещества разделяются на правовращающие и левовращающие.

Угол поворота плоскости поляризации оптически активными веществами:

– для кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d;$$

– для растворов

$$\varphi = \alpha_1 C d,$$

где α, α_1 – коэффициенты удельного вращения, зависящие от природы вещества, температуры и длины волны света в вакууме; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Квантовая оптика – раздел физики, изучающий явления, в которых проявляются квантовые свойства света. Излучение и распространение света происходит в виде квантов света – ***фотонов***.

Тепловое излучение – свечение тел, обусловленное нагреванием. Тепловое излучение является самым распространенным в природе и совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т. е. за счет его внутренней энергии). Тепловое излучение свойственно всем телам при температуре выше 0 К.

Излучательность тела (***энергетическая светимость***) – энергия электромагнитных волн dE, излучаемая за время dt с поверхности площадью dS

$$R_{э} = \frac{dE}{dt \cdot dS}.$$

Связь мощности излучения (потока энергии) с излучательностью при $R_{э}$ = const:

$$P = R_{э} S \ ,$$

где S – площадь излучающей поверхности тела.

Спектральная плотность излучательности (***испускательная способность***) по частоте – энергия электромагнитных волн $dE\left[\nu, (\nu + d\nu)\right]$, излучаемая в узком интервале частот $d\nu$ за время dt с поверхности площадью dS

$$r_{\nu} = \frac{dE\left[\nu, (\nu + d\nu)\right]}{dt \cdot dS \cdot d\nu} \ .$$

Спектральная плотность излучательности (испускательная способность) по длине волны − энергия электромагнитных волн $dE\left[\lambda, (\lambda + d\lambda)\right]$, излучаемая в узком интервале длин волн $d\lambda$ за время dt с поверхности площадью dS

$$r_{\lambda} = \frac{dE\left[\lambda, (\lambda + d\lambda)\right]}{dt \cdot dS \cdot d\lambda} \ ,$$

Связь излучательности с испускательной способностью:

$$R_{э} = \int_0^{\infty} r_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda \ ,$$

Связь испускательных способностей по частоте и по длине волны:

$$r_{\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu} \ .$$

Поглощательная способность – отношение энергии $dE^{погл}$, поглощенной телом, к энергии падающего на тело излучения $dE^{пад}$ (в узком спектральном интервале за малое время на поверхность малой площади)

$$a_{\nu} = \frac{dE^{погл}(\nu)}{dE^{пад}(\nu)} \ .$$

Абсолютно черное тело − воображаемое тело, поглощающее при любой температуре всю падающую на него лучистую энергию. Для абсолютно черного тела $a_{\nu} \equiv 1$.

Серое тело − тело, поглощательная способность которого одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела. Для серого тела $a_{\nu} < 1, a_{\nu} \equiv \text{const}$.

Закон излучения Кирхгофа: отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = f(\nu, T) = r_\nu^*,$$

где $f(\nu, T)$ – универсальная функция частоты и абсолютной температуры (T); r_ν^* – испускательная способность абсолютно черного тела.

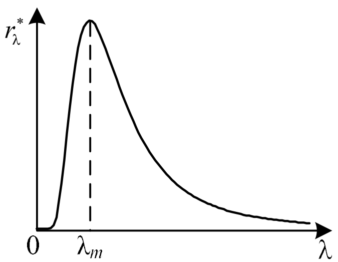
Закон Стефана − Больцмана (связь излучательности (энергетической светимости) абсолютно черного тела с его абсолютной температурой): энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры:

$$R_э^* = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) – постоянная Стефана – Больцмана.

Следствие закона Стефана − Больцмана для нечерного тела:

$$R_э = a\sigma T^4.$$



Закон смещения Вина: длина волны, при которой испускательная способность абсолютно черного тела r_ν^* принимает максимальное значение, обратно пропорциональна абсолютной температуре тела

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

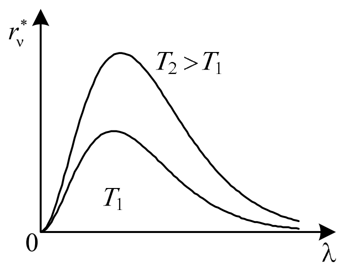
где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К – первая постоянная Вина.

Максимальное значение испускательной способности абсолютно черного тела пропорционально пятой степени абсолютной температуры:

$$\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{\max} = CT^5,$$

где $C = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5) – вторая постоянная Вина.

Формула Рэлея – Джинса (выражение для испускательной способности абсолютно черного тела, полученное с помощью фундаментальных положений классической физики):



$$r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где k – постоянная Больцмана; c – скорость света в вакууме.

Согласно квантовой гипотезе Планка, атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а определенными порциями – квантами, причем ***энергия кванта*** пропорциональна частоте колебания:

$$\varepsilon_\nu = h\nu.$$

Формула Планка − выражение для испускательной способности абсолютно черного тела, полученное с помощью гипотезы Планка:

$$r_{\nu}^{*} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right)-1},$$

где h – постоянная Планка.

Энергия фотона

$$\varepsilon_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega,$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$; эта величина также называется постоянной Планка; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота излучения.

Импульс фотона

$$p_{\gamma} = \frac{\varepsilon_{\gamma}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Масса фотона

$$m_{\gamma} = \frac{\varepsilon_{\gamma}}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}.$$

Внешний фотоэлектрический эффект (фотоэффект) − испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Внешний фотоэффект наблюдается в твердых телах (металлах, полупроводниках, диэлектриках), а также в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация).

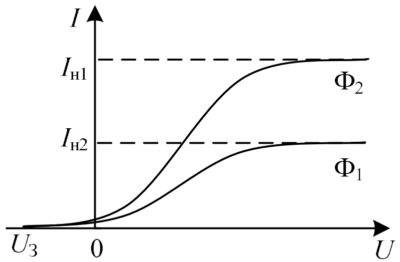
Внутренний фотоэффект − вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению фотопроводимости (повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению ЭДС.

Вентильный фотоэффект − возникновение ЭДС (фото-ЭДС) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект открывает, таким образом, пути для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

Вольт-амперная характеристика для фотоэффекта – график зависимости силы тока, образуемого потоком электронов, испускаемых под действием света из катода, от напряжения, приложенного между катодом и анодом.

Задерживающее напряжение – напряжение, которое нужно приложить, чтобы фототок стал равен нулю.

Связь максимальной скорости вылетающих при внешнем фотоэффекте электронов (фотоэлектронов) с задерживающим напряжением:



$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_з ,$$

где m – масса электрона; $v_{\max}$ – максимальная скорость электронов; e – заряд электрона по абсолютной величине (элементарный заряд); $U_з$ – задерживающее напряжение.

Три закона внешнего фотоэффекта.

I. Закон Столетова: при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности $E_э$ катода).

Энергетическая освещенность – энергия электромагнитных волн $dE^{пад}$, падающих за время dt на поверхности площадью dS

$$E_э = \frac{dE^{пад}}{dt \cdot dS} .$$

Связь силы тока насыщения со световым потоком:

$$I_н \sim Ф ,$$

где $I_н$ – сила тока насыщения (остающаяся постоянной при увеличении приложенного напряжения); Ф – падающий на катод световой поток.

II. Максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой ν, а именно линейно возрастает с увеличением частоты.

III. Для каждого вещества существует «красная граница» фотоэффекта, т. е. минимальная частота ν_0 света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), при которой свет любой интенсивности фотоэффекта не вызывает.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} ,$$

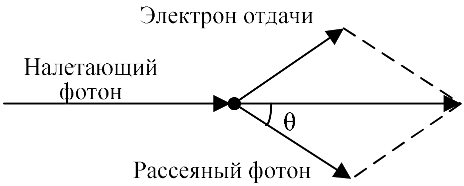
где A – работа выхода электрона из металла.

Соотношения для красной границы фотоэффекта:

$$\nu_0 = \frac{A}{h}; \ \lambda_0 = \frac{hc}{A} ,$$

где ν_0 – минимальная частота света; λ_0 – максимальная длина волны света, при которых еще возможен фотоэффект.

Эффект Комптона − упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ-излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны.



Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right) = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны фотона, налетающего на свободный или слабо связанный электрон; λ' – длина волны фотона, рассеянного на угол θ после столкновения с электроном; m_0 – масса покоя электрона.

Величина

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}43\cdot 10^{-12} \text{ м}$$

называется комптоновской длиной волны электрона.

Давление света при его нормальном падении на поверхность

$$p = w\left(1+\rho\right) = \frac{E_э}{c}\left(1+\rho\right),$$

где w – объемная плотность энергии излучения; ρ – коэффициент его отражения от поверхности; c – скорость распространения света в вакууме.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 5.1. Излучение с длиной волны 0,8 мкм от двух когерентных источников попадает на экран, где наблюдается интерференционная картина. Когда на пути излучения от одного из источников перпендикулярно лучу поместили мыльную пленку с показателем преломления 1,33, интерференционная картина изменилась на противоположную. При какой наименьшей толщине пленки это возможно?

Решение

Изменение интерференционной картины на противоположную означает, что на тех участках экрана, где наблюдались максимумы, стали наблюдаться минимумы. Такой сдвиг интерференционной картины возможен при изменении оптической разности хода световых лучей на нечетное число длин полуволн, т. е.

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где Δ_2 – оптическая разность хода лучей после внесения пленки; Δ_1 – оптическая разность хода лучей до внесения пленки; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Наименьшей толщине соответствует $k = 0$, при этом формула примет вид

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{\lambda}{2}.$$

Оптические разности хода выразим через оптические длины путей от источников (l_1 и l_2) до точки экрана:

$$\Delta_1 = l_1 - l_2; \quad \Delta_2 = (l_1 - d) + nd - l_2 = l_1 - l_2 + d(n-1).$$

Подставим полученные выражения в формулу для изменения разности хода и выразим искомую толщину пластинки

$$d(n-1) = \frac{\lambda}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{2(n-1)}.$$

Размерности конечной формулы очевидны.

Произведем вычисления

$$d = \frac{0,8}{2(1,33-1)} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Ответ: $d = 1{,}21$ мкм.

Пример 5.2. Установка для получения колец Ньютона освещается светом от ртутной дуги, падающим нормально. Наблюдение производится в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии 579,1 нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим линии 577 нм?

Решение

Радиус светлого кольца Ньютона, наблюдаемого в проходящем свете, определяется по формуле

$$r = \sqrt{kR\lambda},$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны линзы; λ – длина волны света в промежутке между линзой и плоской стеклянной пластинкой.

В соответствии с условием задачи (кольца совпадают, значит, равны их радиусы)

$$\sqrt{k_1 R\lambda_1} = \sqrt{k_2 R\lambda_2}.$$

По условию $k_2 = k_1 + 1$, отсюда

$$\sqrt{k_1 R\lambda_1} = \sqrt{(k_1+1)R\lambda_2}.$$

После преобразований этого соотношения получим

$$k_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Размерность конечной формулы очевидна.

После подстановки исходных данных найдем

$$k_1 = \frac{577}{579{,}1 - 577} = 275.$$

Ответ: $k_1 = 275$.

Пример 5.3. На диафрагму с отверстием нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. На экране, удаленном на 2 м, наблюдается темное пятно. В таком же опыте, но с точечным источником света, расположенным на расстоянии 1 м от диафрагмы, темное пятно наблюдается на экране, удаленном на 1 м от диафрагмы. Определить диаметр отверстия.

Решение

Темное пятно на экране наблюдается, если при дифракции Френеля на круглом отверстии открыто четное число зон. Радиус зоны Френеля с четным номером m по условию задачи должен быть в два раза меньше диаметра отверстия $r_m = d/2$. С другой стороны радиус зоны Френеля определяется по формуле

$$r_m = \sqrt{m_1 b_1 \lambda}$$

для плоской световой волны и по формуле

$$r_m = \sqrt{\frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} m_2 \lambda}$$

для сферической волны от точечного источника.

Для определения номеров зон Френеля в рассматриваемом случае, найдем их отношение из приведенных формул

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{(a_2 + b_2) b_1}{a_2 b_2} = \frac{(1+1) \cdot 2}{1 \cdot 1} = 4.$$

Так как темное пятно реально наблюдается при условии, что в отверстии укладывается небольшие число зон, примем $m_1 < 10$ и $m_2 < 10$. Учитывая, что m_1 и m_2 должны быть четными, получим $m_1 = 2$ и $m_2 = 8$. Тогда для диаметра отверстия получим

$$d = 2\sqrt{m_1 b_1 \lambda} = 2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 0{,}0031 \text{ м}.$$

Ответ: $d = 3{,}1$ мм.

Пример 5.4. На щель шириной 0,05 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Определить ширину центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, находящийся в фокальной плоскости линзы. Оптическая сила линзы 0,2 дптр.

Решение

Центральный максимум на экране с обеих сторон ограничен минимумами первого порядка, которые при нормальном падении света на щель и на экран расположены симметрично. При этом условие минимумов имеет вид

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1; 2; \ldots),$$

где φ – угол дифракции; k – порядок спектра (для интересующих нас минимумов $k = 1$).

Расстояние от центра экрана до точки, соответствующей первому минимуму,

$$x = b\,\mathrm{tg}(\varphi).$$

В силу малости отношения λ/a угол дифракции мал по сравнению с одним радианом, поэтому $\mathrm{tg}(\varphi) \approx \sin(\varphi)$.

Так как минимумы расположены симметрично, то расстояние между ними (ширина центрального максимума)

$$\Delta x = 2x \approx 2b\sin(\varphi) = 2\frac{\lambda}{Da}.$$

Размерность, даваемая этим соотношением, очевидна. Произведем расчет

$$\Delta x = 2\frac{5\cdot10^{-7}}{0{,}2\cdot5\cdot10^{-5}} = 0{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta x = 0{,}1$ м.

Пример 5.5. На дифракционную решетку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет. Период решетки 2 мкм. Определить наибольший порядок дифракционного максимума, который дает эта решетка в случае красного ($\lambda = 0{,}7$ мкм) света.

Решение

Для дифракционной решетки (нормальное падение) условие главных максимумов

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1; 2; \ldots),$$

где φ – угол дифракции; k – порядок максимума.

Так как $\sin\varphi$ не может быть больше 1, то из вышеприведенной формулы следует неравенство

$$k \le \frac{d}{\lambda}.$$

Подставив в это неравенство значения величин, получим

$$k \le \frac{2}{0,7} = 2,86.$$

С учетом того, что порядок максимума является целым числом, для рассматриваемых условий получаем $k_{max} = 2$.

Ответ: $k_{max} = 2$.

Пример 5.6. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от нее пучок света образует угол 97° с падающим пучком. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный свет максимально поляризован.

Решение

Согласно закону Брюстера луч, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, полностью (максимально) поляризован, если угол падения удовлетворяет условию

$$\text{tg}\,\alpha_{\text{Бр}} = n_{21},$$

где $\alpha_{\text{Бр}}$ – угол падения (угол Брюстера); $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления второго вещества (стекло) относительно первого (жидкость).

Так как по закону отражения света угол падения равен углу отражения, то $\varphi = 2\alpha_{\text{Бр}}$. Отсюда получим

$$\text{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2\,\text{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Очевидно, что конечная формула дает безразмерную величину. Произведем вычисления:

$$n_1 = 1,5 \cdot \text{ctg}\,45° = 1,33.$$

Ответ: $n_1 = 1,33$.

Пример 7. Два николя расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет 60º. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через первый николь и при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в каждом николе составляет 0,05. Потери на отражение не учитывать.

Решение

Естественный свет, падая на грань призмы Николя, вследствие двойного лучепреломления расщепляется на два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба луча одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы.

Обыкновенный луч не проходит через николь. Необыкновенный луч проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность прошедшего через первую призму света

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-k)I_0.$$

Отсюда получим уменьшение интенсивности света

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1-k} = \frac{2}{1-0,05} = 2,1.$$

Интенсивность плоскополяризованного луча, вышедшего из второго николя, определим, используя закон Малюса. Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получим

$$I_2 = (1-k)I_1\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1-k)^2 I_0 \cos^2\varphi.$$

Определим уменьшение интенсивности после прохождения двух призм

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\varphi} = \frac{2}{(1-0,05)^2\cos^2 60°} = 8,86.$$

Ответ: $\frac{I_0}{I_1} = 2,1;\quad \frac{I_0}{I_2} = 8,86.$

Пример 5.8. Частично поляризованный свет со степенью поляризации $P = 0,5$ представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным. Определить, во сколько раз интенсивность поляризованного света больше интенсивности естественного.

Решение

Минимальная интенсивность света, пропускаемого анализатором $I_{\min}$, соответствует случаю, когда плоскополяризованная составляющая падающего света поляризована перпендикулярно плоскости пропускания. В этом случае эта составляющая не проходит через анализатор. При прохождении естественной составляющей через анализатор ее интенсивность уменьшается вдвое, таким образом

$$I_{\min} = 0 + \frac{1}{2}I_e = \frac{1}{2}I_e.$$

Максимальная интенсивность света, пропускаемого анализатором $I_{\max}$, соответствует случаю, когда плоскополяризованная составляющая падающего света поляризована параллельно плоскости пропускания анализатора. Поэтому она проходит без уменьшения (при пренебрежении потерями на поглощение), а интенсивность естественной составляющей все так же уменьшается в два раза. В результате получим

$$I_{\max} = I_{\text{п}} + \frac{1}{2} I_{\text{е}} .$$

Введем обозначение $k = \dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{е}}}$. В соответствие с ним

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{\text{е}} + k I_{\text{е}} = \left(k + \frac{1}{2} \right) I_{\text{е}} .$$

Подставим полученные выражения в определяющее уравнение для степени поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{k}{k+1} .$$

Отсюда получим

$$k = \frac{P}{1 - P} .$$

Произведем расчет

$$k = \frac{0,75}{1 - 0,75} = 3 .$$

Ответ: $\dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{е}}} = 3$.

Пример 5.9. При торможении электрона в веществе с показателем преломления n = 1,5 угол черенковского излучения уменьшился с 40° до 20°. Определить, во сколько раз при этом уменьшился его импульс.

Решение

Угол излучения Вавилова − Черенкова определяется с помощью соотношения

$$\cos\theta = \frac{c}{n v} ,$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды; v – скорость движения заряженной частицы.

Импульс релятивистской частицы связан с ее скоростью выражением

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v / c)^2}} ,$$

Выражая из первого уравнения скорость и подставляя ее во второе, получим для отношения импульсов

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_1}{v_2}\sqrt{\frac{c^2 - v_2^2}{c^2 - v_1^2}} = \sqrt{\frac{n^2\cos^2\theta_2 - 1}{n^2\cos^2\theta_1 - 1}}.$$

Очевидно, что конечная формула дает безразмерную величину. Произведем вычисления:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{(1,5\cdot 0,94)^2 - 1}{(1,5\cdot 0,77)^2 - 1}} \approx 1,76.$$

Ответ: импульс электрона уменьшился в 1,76 раза.

Пример 5.10. Кварцевую пластинку поместили между скрещенными поляризаторами. При какой наименьшей толщине пластинки интенсивность прошедшего через эту систему света будет максимальна. Постоянная вращения кварца для используемой длины волны света равна 37 град/мм.

Решение

После прохождения первого поляризатора вышедший свет имеет плоскость поляризации, совпадающую с плоскостью пропускания поляризатора. Так как поляризаторы скрещены (их плоскости пропускания перпендикулярны друг другу), то этот свет не пройдет через второй поляризатор. Чтобы интенсивность прошедшего света была максимальной, необходимо, чтобы между поляризаторами плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi = 90^\circ$. Это и происходит при прохождении кварцевой пластинки.

Угол поворота плоскости поляризации оптически активными кристаллами

$$\varphi = \alpha d.$$

Отсюда получим минимальную толщину пластинки

$$d = \frac{\varphi}{\alpha} = \frac{90}{37} = 2,43 \text{ мм}.$$

Ответ: $d = 2,43$ мм.

Пример 5.11. Длина волны λ_m, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, равна 0,87 мкм. Определить максимальную спектральную плотность излучательности для этих условий.

Решение

Максимальная спектральная плотность излучательности абсолютно черного тела пропорциональна пятой степени его температуры и выражается формулой (иногда называемой вторым законом Вина)

$$\left(r_\lambda\right)_{\max} = CT^5,$$

где $C = 1,29\cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3\cdot$К^5) – вторая постоянная Вина.

Температуру T выразим из закона смещения Вина $\lambda_m T = b$, откуда $T = b/\lambda_m$. Подставив полученное выражение температуры в первую формулу, найдем

$$\left(r_\lambda\right)_{\max} = C\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^5.$$

Произведем вычисления:

$$\left(r_\lambda\right)_{\max} \approx 1,29\cdot 10^{-5}\left(\frac{2,9\cdot 10^{-3}}{8,7\cdot 10^{-7}}\right)^5 \approx 5,3\cdot 10^{12}\left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right).$$

Ответ: $\left(r_\lambda\right)_{\max} = 5,3\cdot 10^{12}\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.

Пример 5.12. Температура поверхности Солнца $T_{\text{С}} = 6000$ К. Считая, что Солнце и Земля являются абсолютно черными телами и что Земля находится в состоянии теплового равновесия с Солнцем, определить ее температуру.

Решение

При решении этой задачи будем предполагать, что других источников поступления энергии, кроме излучения Солнца, нет. Излучательность поверхности Солнца найдем с помощью закона Стефана − Больцмана

$$R_{\text{Э}} = \sigma T_{\text{С}}^4.$$

Исходя из определения излучательности, мощность излучения Солнца определим с помощью следующего соотношения:

$$P_{\text{Э}} = R_{\text{Э}} S_{\text{С}},$$

где $S_{\text{С}} = 4\pi R_{\text{С}}^2$ – площадь поверхности Солнца; $R_{\text{С}}$ – его радиус.

Эта мощность равномерно распределяется по площади сферы радиусом, равным среднему расстоянию от Солнца до Земли l, и на Землю приходится только ее доля, равная S_m/S_l, где $S_m = \pi R_{\text{З}}^2$ – площадь максимального поперечного для лучей сечения земного шара; $S_l = 4\pi l^2$ – площадь вышеупомянутой сферы; $R_{\text{З}}$ – радиус Земли. Таким образом, мощность излучения Солнца, поглощаемого Землей,

$$P_1 = \sigma T_{\text{С}}^4 4\pi R_{\text{С}}^2 \frac{\pi R_{\text{З}}^2}{4\pi l^2} = \sigma T_{\text{С}}^4 R_{\text{С}}^2 \frac{\pi R_{\text{З}}^2}{l^2}.$$

При равновесии эта мощность равна мощности излучения самой Земли, которая в соответствии с законом Стефана − Больцмана составит

$$P_2 = \sigma T_{\text{З}}^4 S_{\text{З}} = \sigma T_{\text{З}}^4 4\pi R_{\text{З}}^2,$$

где $S_{\text{З}}$ – площадь поверхности Земли.

Равенство мощностей приводит к уравнению

$$\sigma T_З^4 4\pi R_З^2 = \sigma T_С^4 R_С^2 \frac{\pi R_З^2}{l^2},$$

откуда после простых преобразований следует окончательная формула для температуры Земли

$$T_З = T_С \sqrt{\frac{R_С}{2l}}.$$

Размерности в этой формуле очевидны. При расчете используем табличные данные – $R_С = 6{,}95\cdot10^8$ м; $l = 1{,}495\cdot10^{11}$ м:

$$T_З = 6000\sqrt{\frac{6{,}95\cdot10^8}{2\cdot1{,}495\cdot10^{11}}} = 289 \text{ К}.$$

Ответ: $T_З = 289$ К.

Пример 5.13. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 450$ нм максимальная скорость v_{max} фотоэлектронов равна 0,61 Мм/с.

Решение

При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, кинетическая энергия, а следовательно, и скорость фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в случае красной границы запишется в виде

$$h\nu_0 = A \quad \text{или} \quad hc/\lambda_0 = A.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = hc/A.$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = h\nu - \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Подставив это соотношение в предыдущее уравнение, окончательно получим

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{m\lambda v_{max}^2}{2hc}}.$$

Произведем вычисления:

$$\lambda_0 = \frac{4{,}5\cdot10^{-7}}{1 - \dfrac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot4{,}5\cdot10^{-7}\left(6{,}1\cdot10^5\right)^2}{2\cdot6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}} = 7{,}3\cdot10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda_0 = 730$ нм.

Пример 5.14. Фотон с энергией ε = 0,7 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60^\circ$. Определить энергию ε' рассеянного фотона.

Решение

Будем считать, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы.

Воспользуемся формулой Комптона

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ' и λ – длины волн соответственно рассеянного и налетающего фотонов.

Выразим энергии фотонов через их длины волн

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},\ \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'}$$

и подставим в предыдущее соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{m_0 c^2}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

откуда, обозначив для краткости энергию покоя электрона m_0c^2 через E_0 (E_0 = 0,511 МэВ), получим соотношение для искомой энергии:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon E_0}{E_0 + 2\varepsilon\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Подставив исходные данные, найдем

$$\varepsilon' = \frac{0,7\cdot 0,511}{0,511 + 2\cdot 0,7\cdot\sin^2 30^\circ} \approx 0,42 \text{ МэВ}.$$

Ответ: ε' = 0,42 МэВ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1 На стеклянный клин (n =1,5) нормально падает монохроматический свет (λ = 698 нм). Определите угол между поверхностями клина, если расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм.

5.2 Определите радиус третьей зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м. Длина волны λ = 0,6 мкм.

5.3 Коэффициент поглощения некоторого вещества для монохроматического света определенной длины волны α = 0,1 см$^{-1}$. Определите толщину слоя вещества, которая необходима для ослабления света в 2 раза и в 5 раз. Потери на отражение света не учитывать.

5.4 Свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же вещества, имеющие соответственно толщины x_1 = 5 мм и x_2 = 10 мм. Определите коэффициент поглощения этого вещества, если интенсивность прошедшего света через первую пластинку составляет 82 %, а через вторую – 67 % от начальной интенсивности.

5.5 Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора составляет 30°. Определите изменение интенсивности прошедшего через него света, если угол между главными плоскостями равен 45°.

5.6 Определите длину отрезка, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке 5 мм в стекле. Показатель преломления стекла n = 1,5.

5.7 В опыте Юнга расстояние между щелями равно 1 мм, а расстояние от щелей до экрана – 3 м. Определите: 1) положение первой светлой полосы; 2) положение третьей темной полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны 0,5 мкм.

5.8 Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга λ = 0,6 мкм. Определите расстояние от щелей до экрана, если ширина интерференционных полос равна 1,2 мм.

5.9 На плоскопараллельную пленку с показателем преломления n = 1,33 под углом i = 45° падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый свет (λ = 0,6 мкм).

5.10 Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,6 мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластиной заполнено жидкостью, и наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы 4 м. Определите показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца равен 1,8 мм.

5.11 Точечный источник света (λ = 0,6 мкм) расположен на расстоянии 1 м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметра 2 мм. Определите расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зоны Френеля.

5.12 На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет 2,2°. Определите, сколько волн укладывается на ширине щели.

5.13 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. Определите наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решетки, если период дифракционной решетки равен 2 мкм.

5.14 На дифракционную решетку длиной 15 мм, содержащую N = 3000 штрихов, нормально падает монохроматический свет с длиной волны

$\lambda = 550$ нм. Определите: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

5.15 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Угол дифракции для пятого максимума равен 30°, а минимальная разрешаемая решеткой разность длин волн составляет $\delta\lambda = 0{,}6$ нм. Определите: 1) постоянную дифракционной решетки; 2) длину дифракционной решетки.

5.16 Дифракционная решетка имеет $N = 1000$ штрихов, и её период равен 10 мкм. Определите угловую дисперсию для угла дифракции $\varphi = 30°$ в спектре третьего порядка. Найдите разрешающую способность дифракционной решетки в спектре пятого порядка.

5.17 Луч света выходит из стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) под тем же углом, что и входит в неё. Определите угол отклонения φ луча призмой, если её преломляющий угол равен 60°.

5.18 Определите скорость электронов, при которой черенковское излучение происходит в среде с показателем преломления $n = 1{,}54$ под углом $\theta = 30°$ к направлению их движения. Скорость выразите в долях скорости света.

5.19 Определите минимальный импульс, которым должен обладать электрон, чтобы эффект Черенкова – Вавилова наблюдался в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$.

5.20 Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определите отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

5.21 Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через неё. Пренебрегая поглощением света, определить интенсивность I света после его обратного прохождения.

5.22 Пучок естественного света падает на стеклянную призму с углом $\alpha = 30°$. Определите показатель преломления стекла, если отраженный луч является плоскополяризованным.

5.23 Пластинка кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30°$. Определите толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью.

5.24 Определите массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку длиной $l = 20$ см с этим раствором плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi_1 = 10°$. Коэффициент удельного вращения сахара равен $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад·м^3/(м·кг).

5.25 Шар радиусом $R = 10$ см за 5 с излучает энергию $W = 5$ кДж. Найти температуру шара, считая его серым телом со степенью черноты $a = 0{,}25$.

5.26 Максимум излучения зачерненного тела соответствует длине волны λ_m = 700 нм. Определить его температуру и излучательность (энергетическую светимость).

5.27 В астрономии Земля условно считается серым телом, имеющим температуру T = 280 К. Определить степень черноты Земли, если ее излучательность равна $R_Э$ = 325 кДж/(м^2·ч).

5.28 Определить, какое количество энергии излучает абсолютно черное тело с поверхности площадью S = 5 см^2 за t = 4 с, если максимум спектральной плотности излучательности приходится на длину волны λ_m = 450 нм.

5.29 Температура тела t = 130 ºС. Определить степень черноты его поверхности, если с площади S = 4 см^2 за время $\Delta\tau$ = 5 минут излучается энергия W = 166 Дж.

5.30 Как и во сколько раз изменилась длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности в спектре серого тела, если мощность излучения при этом увеличилась в 16 раз?

5.31 Определить длину волну фотона, импульс которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью v = 10 Мм/с.

5.32 На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны λ = 220 нм и эффективной работой выхода электрона A = 3,74 эВ. Определить максимальную скорость фотоэлектронов.

5.33 Удаленный от других тел натриевый шарик с эффективной работой выхода электрона A = 2,27 эВ облучают монохроматическим светом с длиной волны λ = 300 нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик, теряя электроны?

5.34 Фотон с энергией ε = 10 эВ падает на серебряную пластинку с эффективной работой выхода электрона A = 4,28 эВ и вызывает фотоэффект. Определить максимальный импульс, который может получить пластинка.

5.35 При облучении металлического катода ультрафиолетовым светом с длиной волны λ = 250 нм фототок начинает наблюдаться при задерживающем напряжении U = 0,96 В. Определить длину волны, соответствующую красной границе для этого металла.

5.36 Нормально падающий свет создает давление на поверхность p = 0,5 мкПа. Определить коэффициент отражения поверхности, если энергетическая освещенность E_e = 120 Вт/м^2.

5.37 Параллельный пучок монохроматического света (λ = 662 нм) падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление p = 0,3 мкПа. Определить концентрацию фотонов в световом пучке.

6 ФИЗИКА АТОМА И ЯДРА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Водородоподобные атомы – атомы, состоящие из ядра с зарядом Ze и одного электрона.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний): в атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн. Уравнение для круговых стационарных орбит для водородоподобных атомов:

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

где m – масса электрона; v – его скорость на орбите; r – ее радиус; n – ее номер (главное квантовое число).

Второй постулат Бора (постулат частот): при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией, равной разности энергий соответствующих стационарных состояний

$$\hbar\omega = h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m – энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

Связь между кинетической, потенциальной и полной энергиями электрона, движущегося в атоме по орбите с номером n (в состоянии с главным квантовым числом n):

$$E_n^k = -E_n; \quad E_n^p = 2E_n; \quad E_n^k = -\frac{1}{2}E_n^p,$$

где E_n^k – кинетическая энергия электрона; E_n – его полная энергия; E_n^p – его потенциальная энергия.

Радиус n-й стационарной орбиты электрона в водородоподобном атоме

$$r_n = \frac{a_0}{Z}n^2,$$

где $a_0 = 5{,}29\cdot10^{-11}$ м – первый боровский радиус (радиус основной, т. е. первой орбиты электрона в атоме водорода); Z – номер элемента в таблице Менделеева.

Полная энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{Z^2 E_i^{\text{Н}}}{n^2},$$

где $E_i^{\text{Н}}$ = 13,6 эВ – энергия ионизации атома водорода.

Зависимость энергии ионизации электрона в водородоподобном атоме от номера элемента:

$$E_i = E_i^{\text{Н}} Z^2 .$$

Сериальная формула для циклической частоты излучаемого (поглощаемого) водородоподобным ионом света при переходе электрона с одной орбиты на другую (переходе атома из одного состояния в другое):

$$\omega = R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где $R_\infty = \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = 2,07 \cdot 10^{16}$ рад/с – постоянная Ридберга (данное значение соответствует бесконечно тяжелому ядру).

Сериальная формула для частоты света:

$$\nu = R'_\infty Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где $R'_\infty = 3,29 \cdot 10^{15}$ Гц (также называется постоянной Ридберга).

Сериальная формула для длины волны света:

$$\frac{1}{\lambda} = R''_\infty Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где $R''_\infty = 1,1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ (также называется постоянной Ридберга).

Длина волны де Бройля – длина волны процесса, сопоставляемого любой частице, обладающей импульсом p,

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Импульс частицы p связан с ее скоростью v и кинетической энергией $E_{\text{к}}$:

– для случая малых скоростей –

$$p = m_0 v = \sqrt{2 m_0 E_{\text{к}}};$$

– для скоростей, сравнимых по величине со скоростью света, –

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{\left(2E_0 + E_{\text{к}}\right) E_{\text{к}}},$$

где m – релятивистская масса частицы; v – ее скорость; m_0 – масса покоя частицы; $E_0 = m_0 c^2$ – ее энергия покоя.

Фазовая скорость волн де Бройля

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p},$$

где k – волновое число волн де Бройля ($k = 2\pi/\lambda$); E – полная энергия частицы.

Групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

Соотношение неопределенностей микрочастица не может иметь одновременно и определенную координату (x) и определенную соответствующую проекцию импульса (p_x), неопределенности этих величин удовлетворяют условию:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

где Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось OX; Δx – неопределенность соответствующей координаты.

Соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии квазистационарного состояния; Δt – время нахождения квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Значения энергии частицы в стационарных состояниях (собственные значения энергии)

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}.$$

Значения, которые может принимать главное квантовое число (электрон в атоме водорода):

$$n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$$

Энергия электрона в стационарном состоянии в атоме водорода

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

Значения, которые может принимать орбитальное квантовое число:

$$l = 0;\ 1;\ \ldots;\ n-1.$$

Орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Значения, которые может принимать магнитное квантовое число:

$$m = -l;\ -l+1;\ \ldots;\ -1;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ l-1;\ l.$$

Проекция орбитального момента импульса электрона на внешнюю ось (ось, определяемую направлением внешнего поля, чаще всего магнитного или электрического)

$$L_{l,z} = m\hbar .$$

Модуль спина (собственного, не связанного с вращательным движением момента импульса) микрочастицы

$$L_s = \hbar\sqrt{s\left(s+1\right)} .$$

где s – спиновое число (для электрона s = 1/2). Спиновое число является уникальным параметром для микрочастицы (подобно массе покоя и заряду) и может принимать только целые (0; 1; 2; ...) или полуцелые (1/2; 3/2; 5/2; ...) значения.

Значения, которые может принимать магнитное спиновое квантовое число:

$$m_s = -s; -s+1; \ldots; s-1; s .$$

Проекция спина электрона в атоме на внешнюю ось:

$$L_{s,z} = m_s\hbar .$$

Совокупность электронов, характеризующихся одним и тем же значением главного квантового числа n, образует электронный слой. Совокупность электронов с одним и тем же орбитальным квантовым числом l образует электронную оболочку.

Распределение электронов в атоме по значениям квантовых чисел (т. е. энергетическим состояниям) осуществляется на основе следующих двух принципов:

1) ***принцип Паули*** (принцип исключения): в атоме не может быть нескольких электронов, характеризующихся одинаковой комбинацией значений квантовых чисел, или в атоме состояния всех электронов различны;

2) ***принцип минимума энергии:*** распределение электронов в атоме должно соответствовать минимуму энергии атома.

Учитывая принцип Паули, общее выражение для максимального числа $N_{\max}$ электронов в любом электронном слое.

$$N_{\max} = 2n^2.$$

Общее число нуклонов (протонов и нейтронов) в атомном ядре называется массовым числом A.

Заряд атомного ядра любого химического элемента, выраженный в элементарных зарядах, равен атомному номеру Z этого элемента. Соответственно, число протонов N_{p} в атомном ядре элемента равно атомному номеру Z элемента. Атомный номер совпадает с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов Менделеева.

Число нейтронов в атомном ядре элемента равно разности между массовым числом и атомным номером элемента:

$$N_n = A - Z.$$

Радиус ядра атома приближенно определяется соотношением

$$r = r_0 A^{1/3},$$

где $r_0 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м (коэффициент пропорциональности, который можно считать для всех ядер приближенно постоянным); A – массовое число (число нуклонов в ядре).

Масса атомного ядра меньше суммы масс нуклонов, составляющих ядро, на величину Δm, которая называется ***дефектом массы ядра***:

$$\Delta m = Zm_{\text{р}} + \left(A - Z\right)m_n - m_{\text{я}} \approx Zm_{{}^1_1\text{H}} + \left(A - Z\right)m_n - m_{\text{ат}},$$

где Z – зарядовое число (число протонов в ядре); $m_{\text{р}}$ – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_{\text{я}}$ – масса ядра; $m_{{}^1_1\text{H}}$ – масса протия (атома водорода ${}^1_1\text{H}$); $m_{\text{ат}}$ – масса нейтрального атома, соответствующего рассматриваемому ядру.

Энергия связи ядра – энергия, которую нужно затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2 .$$

Во внесистемных единицах энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot k ,$$

где $E_{\text{св}}$ выражена в МэВ, Δm – в а.е.м., $k = 931{,}5$ МэВ/а.е.м. (1 а.е.м. (атомная единица массы) соответствует энергии покоя 931,5 МэВ).

Радиоактивность – способность некоторых атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц.

Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется материнским, возникающее ядро − дочерним.

Закон радиоактивного распада

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{или} \quad N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt; λ – постоянная распада; N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_0 – число ядер в начальный момент ($t = 0$).

Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Если промежуток времени Δt мал по сравнению с периодом полураспада $T_{1/2}$, то число распавшихся ядер приближенно можно определить следующим образом:

$$\Delta N = \lambda N \Delta t .$$

Связь периода полураспада (отрезка времени, за который распадается половина начального числа радиоактивных ядер) с постоянной распада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda} .$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра τ (совпадает со временем релаксации, т. е. интервалом времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз)

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Число атомов, содержащихся в радиоактивном веществе,

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где m – масса вещества; N_A – число Авогадро; μ – молярная масса.

Активность радиоактивного препарата − число ядер $dN^{\text{расп}}$, распадающихся за интервал времени dt

$$a = \frac{dN^{\text{расп}}}{dt}.$$

Связь активности с числом радиоактивных ядер:

$$a = \lambda N.$$

Зависимость активности от времени:

$$a = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = a_0 e^{-\lambda t},$$

где a_0 – активность препарата в начальный момент времени.

Удельная активность – активность единицы массы вещества.

$$a_{\text{уд}} = \frac{a}{m}.$$

Связь удельной активности с периодом полураспада:

$$a_{\text{уд}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{N_A}{\mu}.$$

Символическая запись ядерной реакции может быть дана или в развернутом виде

$$^{A_1}_{Z_1}\mathrm{X}_1 + {}^{A_2}_{Z_2}\mathrm{X}_2 \to {}^{A_3}_{Z_3}\mathrm{X}_3 + {}^{A_4}_{Z_4}\mathrm{X}_4,$$

например $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$,

или сокращенно

$$A(a,b)B,$$

где A и B – исходное и конечное ядра, a и b – исходная и конечная частицы в реакции, например $^{9}\mathrm{Be}$ (p, α) $^{6}\mathrm{Li}$. При этом порядковый номер атома обычно не пишется, т. к. он определяется химическим символом атома. В скобках на первом месте ставят обозначение бомбардирующей частицы, на втором – обозначение вылетающей частицы. Для обозначения частиц приняты следующие символы: e – электрон, p – протон, n – нейтрон, d – дейтрон (ядро атома изотопа водорода $^{2}_{1}\mathrm{H}$), t – тритон (ядро атома изотопа водорода ${}_{1}^{3}\mathrm{H}$), α – альфа-частица (ядро атома изотопа гелия ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$), γ – гамма-частица или гамма-квант.

Во всех ядерных реакциях выполняются законы сохранения:

а) числа нуклонов $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;

б) заряда $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$;

в) релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$;

г) импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$.

Если общее число ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, больше двух, то запись и уравнения дополняются соответствующими слагаемыми, отвечающими третьей частице, и т. д.

Реакция α-распада

$${}_{Z}^{A}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_{2}^{4}\mathrm{He},$$

для урана

$${}_{92}^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\mathrm{Th} + {}_{2}^{4}\mathrm{He}.$$

Реакция β-распада

$${}_{Z}^{A}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{-1}^{0}e,$$

для радиоуглерода

$${}_{6}^{14}\mathrm{C} \rightarrow {}_{7}^{14}\mathrm{N} + {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e,$$

для нейтрона

$${}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{1}p + {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e.$$

Энергия ядерной реакции (энергетический выход) определяется как разница кинетических энергий:

$$Q = \sum_j E_{k,j} - \sum_i E_{k,i},$$

где $\sum_j E_{k,j}$, $\sum_i E_{k,i}$ – суммы кинетических энергий соответственно частиц-продуктов и исходных частиц.

Энергия ядерной реакции также может быть вычислена с помощью энергий покоя или масс покоя соответствующих частиц:

$$Q = c^2\left(\sum_i m_i - \sum_j m_j\right),$$

где $\sum_i m_i$, $\sum_j m_j$ – суммы масс покоя соответственно исходных частиц и частиц-продуктов.

Согласно современным представлениям, в природе осуществляется четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

Сильное, или ***ядерное***, взаимодействие обусловливает связь протонов и нейтронов в ядрах атомов и обеспечивает исключительную прочность этих образований, лежащую в основе стабильности вещества в земных условиях.

Электромагнитное взаимодействие характеризуется как взаимодействие, в основе которого лежит связь с электромагнитным полем. Оно характерно для всех элементарных частиц, за исключением нейтрино, антинейтрино и фотона. Электромагнитное взаимодействие, в частности, ответственно за существование атомов и молекул, обусловливая взаимодействие в них положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов.

Слабое взаимодействие − наиболее медленное из всех, взаимодействий, протекающих в микромире. Оно ответственно за взаимодействие частиц, происходящих с участием нейтрино или антинейтрино (например, β-распад, μ-распад), а также за безнейтринные процессы распада.

Гравитационное взаимодействие присуще всем без исключения частицам, однако из-за малости масс элементарных частиц оно пренебрежимо мало и, по-видимому, в процессах микромира несущественно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6.1. Определить согласно теории Бора момент импульса электрона в однократно ионизированном атоме гелия (He^+), если его полная энергия $E = -3{,}4$ эВ.

Решение

Полная энергия электрона, находящегося на n-й орбите в водородоподобном атоме,

$$E_n = -\frac{Z^2 E_i}{n^2},$$

где E_i – энергия ионизации атома водорода; Z – зарядовое число (для гелия $Z = 2$).

Момент импульса электрона на стационарной орбите

$$L = mvr = n\hbar,$$

где m – масса электрона; v – его скорость; r – радиус орбиты; $\hbar$ – постоянная Планка.

Выразив номер орбиты из первого уравнения и подставив его во второе, найдем искомое соотношение для момента импульса:

$$L = Z\hbar\sqrt{-\frac{E_i}{E_n}} = Z\hbar\sqrt{-\frac{E_i}{E}}.$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах ($E_i = 13{,}6$ эВ):

$$L = 2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \sqrt{-\frac{13,6}{-3,4}} \approx 4,2 \cdot 10^{-34} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Ответ: $L = 4,2 \cdot 10^{-34} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

Пример 6.2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 52$ В; 2) $U_2 = 520$ кВ.

Решение

Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p:

$$\lambda = h/p.$$

Импульс частицы можно определить, если известна его кинетическая энергия E_k. При этом связь между этими величинами выражается различными формулами для нерелятивистского (когда $E_k \ll E_0$) и для релятивистского случаев. Здесь $E_0 = 0,511$ МэВ – энергия покоя электрона.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$E_k = eU,$$

где e – элементарный заряд.

В первом случае $E_k = 52$ эВ, что много меньше энергии покоя электрона, поэтому его импульс можно определить следующим образом:

$$p_1 = \sqrt{2m_0 E_k} = \sqrt{2m_0 eU_1}$$

(здесь m_0 – масса покоя электрона), откуда для длины волны де Бройля получим

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU_1}}.$$

Во втором случае кинетическая энергия $E_k = 520$ кэВ, т. е. сравнима с энергией покоя электрона. Следовательно, необходимо применить следующую формулу для определения импульса:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{\left(2E_0 + E_k\right)E_k},$$

в результате чего длина волны де Бройля

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{\left(2E_0 + eU_2\right)eU_2}}.$$

Проведем вычисления в единицах СИ (0,511 МэВ $\approx 8,18 \cdot 10^{-14}$ Дж):

$$\lambda_1 \approx \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 52}} \approx 1,70 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$\lambda_2 \approx \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{\left(2\cdot8{,}18\cdot10^{-14}+1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}2\cdot10^{5}\right)\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}2\cdot10^{5}}} \approx 1{,}39\cdot10^{-12}\text{ м.}$$

Ответ: $\lambda_1 = 170$ пм; $\lambda_2 = 1{,}39$ пм.

Пример 6.3. Водород обогащен дейтерием. Определить массовые доли w_1 протия и w_2 дейтерия, если относительная атомная масса A_r такого водорода оказалась равной 1,2.

Решение

Массовые доли w_1 протия и w_2 дейтерия можно выразить через соответствующие массы:

$$w_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}; \quad w_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2},$$

где m_1 и m_2 – массы соответственно протия и дейтерия в смеси.

Выразим из этих равенств массы m_1 и m_2:

$$m_1 = w_1\left(m_1+m_2\right); \quad m_2 = w_2\left(m_1+m_2\right)$$

и подставим их в формулу, определяющую молярную массу смеси,

$$\mu = \frac{m_1+m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2},$$

где μ_1 и μ_2 – молярные массы компонентов смеси.

После такой подстановки и простых преобразований получим

$$\mu = \frac{\mu_1\mu_2}{w_1\mu_2 + w_2\mu_1}.$$

Так как молярные массы протия и дейтерия пропорциональны их относительным атомным массам, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\mu = \frac{A_{r1}A_{r2}}{w_1A_{r2} + w_2A_{r1}},$$

где A_{r1} и A_{r2} – относительные атомные массы соответственно протия и дейтерия.

Дополнительно к этому учтем, что сумма массовых долей всех компонентов смеси должна быть равна единице, т. е. $w_1 + w_2 = 1$.

Решив совместно два последних уравнения, найдем

$$w_1 = \frac{A_{r1}A_{r2} - A_rA_{r1}}{A_r\left(A_{r2}-A_{r1}\right)};$$

$$w_2 = \frac{A_{r1}A_{r2} - A_rA_{r2}}{A_r\left(A_{r1}-A_{r2}\right)}.$$

Для расчета воспользуемся табличными значениями: A_{r1} = 1,00783 и A_{r2} = 2,01410.

Подставив числовые значения в расчетные формулы, получим

$$w_1 = \frac{1,00783 \cdot 2,01410 - 1,2 \cdot 1,00783}{1,2 \cdot (2,01410 - 1,00783)} \approx 0,679;$$

$$w_2 = \frac{1,00783 \cdot 2,01410 - 1,2 \cdot 2,01410}{1,2 \cdot (1,00783 - 2,01410)} \approx 0,321.$$

Ответ: w_1 = 0,679; w_2 = 0,321.

Пример 6.4. Определить число незаряженных частиц в атоме урана-235.

Решение

Атом состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженной электронной оболочки. Ядро состоит из нейтральных частиц – нейтронов и положительно заряженных протонов. Число протонов в ядре совпадает с номером элемента в таблице Менделеева (называется зарядовым числом Z). Число протонов вместе с числом нейтронов равно массовому числу A.

Таким образом, $A = Z + N$.

Отсюда $N = A - Z$.

Произведем расчет: N = 235 – 92 = 143.

Ответ: N = 143.

Пример 6.5. Определить разность энергии связи нейтрона и энергии связи протона в ядре атома ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$.

Решение

Энергию связи нейтрона определим как минимальную работу, которую необходимо совершить для разделения исходного ядра на нейтрон и дочернее ядро. Символическая запись реакции распада будет иметь вид

$${}^{11}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{A}_{Z}\mathrm{X},$$

где Z и A – соответственно зарядовое и массовое числа дочернего ядра.

Применив закон сохранения числа нуклонов, получим 11 – 1 = A, отсюда A = 10. Применив закон сохранения электрического заряда (числа протонов), получим уравнение 5 = 0 + Z, отсюда Z = 5. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа бора ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$.

По аналогии с выражением для расчета энергии связи ядра энергию связи одного нейтрона можно рассчитать по формуле

$$E_n = c^2 \left(m_n + m_{я} - m\right),$$

где c – скорость света в вакууме; m_n – масса нейтрона; $m_{я}$ – масса дочернего ядра; m – масса исходного ядра.

При практических расчетах массы ядер удобно заменить на массы соответствующих атомов.

Аналогичные рассуждения можно провести и для энергии связи одного протона в ядре. В данном случае дочерним ядром будет ядро изотопа ${}^{10}_{4}\mathrm{Be}$, а энергию связи найдем по такой же формуле. Отсюда для разности энергий связи получим

$$\Delta E = E_n - E_p = c^2\left[\left(m_n + m_{\mathrm{B}}\right) - \left(m_p + m_{\mathrm{Be}}\right)\right],$$

где m_{B} – масса атома ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$; m_{Be} – масса атома ${}^{10}_{4}\mathrm{Be}$.

При использовании внесистемных единиц (МэВ – для энергии и а. е. м. – для масс) расчетная формула примет вид

$$\Delta E = 931{,}5\cdot\left[\left(m_n + m_{\mathrm{B}}\right) - \left(m_p + m_{\mathrm{Be}}\right)\right].$$

Подставив массы атомов в расчетную формулу, получим

$$\Delta E = 931{,}5\cdot\left[\left(1{,}00867 + 10{,}01294\right) - \left(1{,}00783 + 10{,}01354\right)\right] = 0{,}22 \text{ МэВ.}$$

Ответ: $\Delta E = 0{,}22$ МэВ.

Пример 6.6. Определить начальную активность радиоактивного препарата магния ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$ массой 0,2 мкг, а также его активность через 6 часов. Период полураспада магния считать известным.

Решение

Активность радиоактивного изотопа пропорциональна числу ядер N (в данный момент времени):

$$a = \lambda N,$$

где $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ – постоянная распада.

Число ядер найдем с помощью закона радиоактивного распада:

$$N = N_0 \exp\left(-\lambda t\right),$$

где N_0 – начальное число ядер.

Начальная активность таким же образом связана с начальным числом ядер:

$$a_0 = \lambda N_0.$$

Число ядер, содержащееся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количества вещества ν:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где $\mu = 2{,}7\cdot 10^{-2}$ кг/моль – молярная масса изотопа.

Подстановка вышеприведенных выражений в соотношения для активностей дает

$$a_0 = \frac{\ln 2}{T}\frac{m}{\mu}N_{\rm A}; \quad a = a_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T}t\right).$$

Проведем расчеты:

$$a_0 = \frac{0,693}{600}\frac{0,2\cdot 10^{-9}}{2,7\cdot 10^{-2}}\cdot 6,02\cdot 10^{23} = 5,13\cdot 10^{12}\ \text{Бк};$$

$$a = 5,13\cdot 10^{12}\cdot \exp\left(-\frac{0,693}{600}\cdot 2,16\cdot 10^{4}\right) = 81,3\ \text{Бк}.$$

Ответ: $a_0 \approx 5\cdot 10^{12}$ Бк; $a \approx 81$ Бк.

Пример 6.7. При соударении α-частицы с ядром атома бора $^{10}_{5}\text{B}$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из них было ядро атома водорода $^{1}_{1}\text{H}$. Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, дать символическую запись ядерной реакции и определить ее энергию.

Решение

Обозначим неизвестное ядро символом $^{A}_{Z}\text{X}$. Так как α-частица представляет собой ядро гелия $^{4}_{2}\text{He}$, то запись реакции будет иметь вид

$$^{4}_{2}\text{He} + {}^{10}_{5}\text{B} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{Z}_{A}\text{X}.$$

Применив правило сохранения числа нуклонов (массовых чисел), получим уравнение $4 + 10 = 1 + A$, отсюда $A = 13$. Применив закон сохранения электрического заряда (числа протонов), получим уравнение $2 + 5 = 1 + Z$, отсюда $Z = 6$. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода $^{13}_{6}\text{C}$. Теперь окончательно можно записать уравнение ядерной реакции в развернутом виде

$$^{4}_{2}\text{He} + {}^{10}_{5}\text{B} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{13}_{6}\text{C}.$$

Энергия ядерной реакции может быть вычислена с помощью масс покоя соответствующих частиц

$$Q = 931,5\left[\left(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}\right) - \left(m_{\text{H}} + m_{\text{C}}\right)\right].$$

Здесь в первых круглых скобках подставлены массы исходных ядер, во вторых – массы ядер – продуктов реакции.

При практических расчетах удобно массы ядер заменить массами соответствующих нейтральных атомов. Возможность такой замены обосновывается следующими соображениями. Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома равно его зарядовому числу Z. Сумма зарядовых чисел исходных ядер равна сумме зарядовых чисел ядер – продуктов реакции. Следовательно, электронные оболочки ядер гелия и бора содержат вместе столько же электронов, сколько их содержат электронные оболочки ядер водорода и углерода. Масса нейтрального атома с очень большой точностью равна сумме масс его ядра и электронной оболочки. Поэтому при вычитании сумм масс нейтральных атомов суммарные массы электронов сократятся, и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер.

Подставив массы атомов в расчетную формулу, получим для внесистемных единиц (а.е.м. и МэВ)

$$Q = 931{,}5\cdot\left[\left(4{,}00260+10{,}01294\right)-\left(1{,}00783+13{,}00335\right)\right]=4{,}06 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Z = 6$; $A = 13$; $Q = 4{,}06$ МэВ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.1 Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

6.2 Определите максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера).

6.3 Используя теорию Бора для атома водорода, определите: 1) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый боровский радиус); 2) скорость движения электрона по этой орбите.

6.4 Определите изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $\lambda = 10{,}2$ мкм.

6.5 Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а. е. м.

6.6 Рассчитать концентрацию нуклонов в ядре, полагая, что коэффициент пропорциональности $r_0 = 1{,}4\cdot10^{-15}$ м.

6.7 Определить плотность вещества в атомном ядре (коэффициент пропорциональности $r_0 = 1{,}4\cdot10^{-15}$ м), пренебрегая дефектом массы и приближенно считая, что массы протонов и нейтронов равны.

6.8 Используя соотношение $Z \approx A/2$, которое справедливо для многих легких ядер (коэффициент пропорциональности $r_0 = 1{,}4\cdot10^{-15}$ м), определить среднюю объемную плотность заряда ядра.

6.9 Определить, какое из ядер, ${}^{31}_{14}\mathrm{Si}$ или ${}^{31}_{15}\mathrm{P}$, наиболее устойчиво? Для ответа определите их энергии связи.

6.10 Найти энергию связи, приходящуюся на один нуклон и дефект массы для ядер: 1) ${}^{31}_{14}\mathrm{Si}$; 2) ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca}$.

6.11 Вычислить дефект массы и энергию связи ядра алюминия ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$.

6.12 Вычислить энергию связи и дефект массы ядра атома гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

6.13 Найти энергию связи, приходящуюся на один нуклон, и дефект массы для ядра кислорода $^{16}_{8}O$.

6.14 Вычислить дефект массы и энергию связи ядра лития $^{7}_{3}Li$.

6.15 Определить, какое из ядер, $^{3}_{1}H$ или $^{3}_{2}He$, наиболее устойчиво? Для ответа определите их энергии связи.

6.16 Определить энергию связи и дефект массы ядра водорода $^{2}_{1}H$.

6.17 Какая часть начального количества атомов распадется за один год в радиоактивном изотопе тория $^{228}_{90}Th$?

6.18 Определить постоянные распада двух изотопов радия: $^{219}_{88}Ra$ и $^{226}_{88}Ra$.

6.19 Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния $^{225}_{89}Ac$ останется через: 1) 5 суток; 2) 15 суток?

6.20 За какое время распадается 2/5 начального количества атомов радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T = 24$ ч?

6.21 За время $t = 9$ суток распалось 7/8 начального количества атомов радиоактивного изотопа. Определить период его полураспада.

6.22 Какая часть начального количества атомов радиоактивного изотопа распадается за время, в три раза большее среднего времени жизни этого изотопа?

6.23 Активность препарата уменьшилась в $k = 250$ раз. Скольким периодам полураспада равен протекший промежуток времени?

6.24 Определить активность препарата, содержащего радиоактивный фосфор $^{32}_{15}P$ массой $m = 1$ мг.

6.25 Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определите, в какой элемент превращается $^{238}_{92}U$ после трех α-распадов и двух β-распадов.

6.26. Радиоактивный изотоп радия $^{225}_{88}Ra$ претерпевает четыре α-распада и два β-распада. Определите для конечного ядра: 1) зарядовое число; 2) массовое число.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 14-е изд., стер. – М. : Изд. центр «Академия», 2007. – 560 с.

2 **Детлаф, А. А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 608 с.

3 Физика для втузов / И. И. Наркевич и [др.]. – Минск : Выш. шк., 1994. – Т. 1 – 426 с. Т. 2 – 554 с.

4 **Волькенштейн, В. С.** Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М. : Наука, 1985. – 381 с.

5 **Чертов, А. Г.** Физические величины: (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / А. Г. Чертов. – М. : Высш. шк., 1990. – 334 с.

6 **Трофимова, Т. И.** Курс физики. Задачи и решения : учеб. пособие для учр. высш. проф. образования / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – 4-е изд., испр. – М. : Изд. центр «Академия», 2011. – 592 с.

7 **Яворский, Б. М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – 3-е изд., испр. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 624 с.

8 **Савельев, И. В.** Сборник задач и вопросов по общей физике / И. В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 288 с.

9 **Иродов, И. Е.** Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 416 с.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. $a_\tau = 2{,}7$ м/с^2; $a_n = 14{,}4$ м/с^2; $a = 14{,}7$ м/с^2. **1.2.** $a = 14{,}7$ м/с^2, $t = 2$ с. **1.3.** $H = 3$ м; $L = 10$ м; $t = 1{,}6$ с. **1.4.** $h = 29{,}1$ м; $v = 24{,}4$ м/с. **1.5.** $\alpha = 41{,}6^\circ$. **1.6.** 1) $a_\tau = 2{,}58$ м/с^2; 2) $a_n = 9{,}47$ м/с^2. **1.7.** $R = 102$ м. **1.8.** 1) $\omega = 6$ рад/с; $v = 1{,}2$ м/с; 2) $a_\tau = 0{,}6$ м/с^2; $a_n = 7{,}2$ м/с^2; $a = 7{,}22$ м/с^2. **1.9.** $\varepsilon = 12{,}5$ рад/с^2; $N = 300$. **1.10.** $\alpha = 6{,}5^\circ$. **1.11.** $T_1 = 14{,}8$ Н; $T_2 = 7{,}8$ Н. **1.12.** $a = 3{,}63$ м/с^2; $t = 1{,}05$ с; $v = 3{,}81$ м/с. **1.13.** $\mu = 0{,}137$. **1.14.** $a = 4{,}17$ м/с^2; $T_2 = 2{,}82$ Н. **1.15.** $k_{\text{посл}} = 1{,}5$ кН/м и $k_{\text{пар}} = 8$ кН/м. **1.16.** $E = 208$ ГПа. **1.17.** $\omega = 7{,}27$ рад/с; $R = 42{,}2$ Мм. **1.18.** $n = 0{,}5$ с$^{-1}$. **1.19.** $T = 1{,}42$ с. **1.20.** $A = 1500$ Дж. **1.21.** $l = 19$ м. **1.22.** 1) $\sigma = 49$ МПа; 2) $x = 1{,}29$ мм, $\varepsilon = 2{,}46\cdot10^{-4}$; 3) $\Pi = 12{,}1$ Дж. **1.23.** $A = 2{,}5$ Дж. **1.24.** $N = 16$ Вт. **1.25**. $A = 2{,}15$ кДж; $N = 0{,}62$ кВт. **1.26.** $a_\tau = 0{,}1$ м/с^2. **1.27.** $v = 835$ м/с. **1.28.** $v_2 = 900$ м/с. **1.29.** $h = 7{,}9$ м. **1.30.** $v = 0{,}57$ м/с. **1.31.** $h = 2292$ м. **1.32.** $u = 2{,}3$ м/с; $T_1 = 8{,}25$ Дж; $T_2 = 4{,}1$ Дж; $u_1 = 0{,}67$ м/с; $T_1 = 0{,}22$ Дж; $u_2 = 5{,}67$ м/с; $T_2 = 8{,}04$ Дж. **1.33.** $I = 0{,}09$ кг·м^2. **1.34.** $I = 0{,}259$ кг·м^2. **1.35.** $M = -0{,}1$ Н·м. **1.36.** $a = 2{,}8$ м/с^2. **1.37.** $M = 16$ Н·м. **1.38.** $v = 0{,}94$ м/с. **1.39.** $\Delta E = 600$ кДж.

2.1. $m = 0{,}4$ кг. **2.2.** $T = 329$ К. 2.**3.** $t = 88$ °С. **2.4.** $F = 385$ кН. **2.5.** $\Delta m = 33$ г. **2.6.** $T = 363$ К. **2.7.** $N = 1{,}9\cdot10^{22}$. **2.8.** $T = 1960$ К. **2.9.** $n = 9{,}03\cdot10^{22}$ м$^{-3}$. **2.10.** $E = 5{,}4$ кДж; $E_{\text{п}} = 0{,}6E$; $E_{\text{вр}} = 0{,}4E$. **2.11.** $n_1/n_2 = 5075$. **2.12.** $p = 1{,}3$ км. **2.13.** $\Delta N/N = 5\cdot10^{-4}$. **2.14.** $\langle l\rangle = 17$ мм. **2.15.** $m = 29\cdot10^{-6}$ кг. **2.16.** $\eta = 0{,}11$ Па·с. **2.17.** $\lambda = 16{,}4$ мВт/(м·К). **2.18.** $Q = \Delta U = 831$ кДж; $A = 0$. **2.19.** $A = 7{,}2$ кДж; $\Delta U = 17{,}8$ кДж. **2.20.** $Q = A = 1{,}15$ кДж. **2.21.** При постоянном давлении. **2.22.** $\gamma = 1{,}56$. **2.23.** $\Delta T = 578$ К; $p_2 = 4{,}75$ МПа. **2.24.** $T = 214$ К. **2.25.** $T_1 = 516$ К. **2.26.** $\Delta S = 4{,}8$ Дж/К. **2.27.** $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К. **2.28.** $\eta = 0{,}29$; $Q_1 = 25\cdot10^4$ Дж; $Q_2 = 18\cdot10^4$ Дж. **2.29.** $\Delta S = 96$ Дж/К. **2.30.** $\Delta S = -13{,}4$ Дж/К. **2.31.** $\eta = 0{,}43$. **2.32.** 1) $V_{\text{кр}} = 1{,}5\cdot10^{-6}$ м^3; 2) $V_{\text{кр}} = 6{,}1\cdot10^{-6}$ м^3. **2.33.** $p_{\text{р}} = 4{,}46$ МПа; $p_{\text{ид}} = 5{,}32$ МПа.

2.34. 1) $V' = 2{,}43$ см^3; 2) $p' = 18{,}6$ Па. **2.35.** $Q = a\nu^2\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$.

2.36. $p = 118$ кПа. 2.**37.** $A = 0{,}9$ мДж. **2.38.** $\rho = 1{,}14$ кг/м^3.

3.1.1. $F = 3{,}24\cdot10^{-5}$ Н. **3.1.2.** $F = 2{,}4\cdot10^{-2}$ Н. **3.1.3.** $a = 1\cdot10^8$ м/с. **3.1.4.** $F = 2{,}26\cdot10^{-2}$ Н. **3.1.5.** $q_0 = 4{,}76\cdot10^{-8}$ Кл. **3.1.6.** $F = 6{,}52\cdot10^{-7}$ Н. **3.1.7.** $E = 7{,}39$ В/м. **3.1.8.** $E_{\text{I}} = 1152$ В/м; $E_{\text{II}} = 288$ В/м. **3.1.9.** $E = 3{,}78\cdot10^4$ В/м. **3.1.10.** $F = 81$ мН. **3.1.11.** $F = 0{,}9$ мкН. **3.1.12.** $A = 25{,}9$ Дж. **3.1.13.** $\sigma = 8{,}85\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. **3.1.14.** $A = 0{,}27$ Дж. **3.1.15.** $\Delta\varphi = 0{,}94$ В. **3.1.16.** $N = 1{,}25\cdot10^9$. **3.1.17.** $\Phi_E = 2{,}82\cdot10^2$ В·м. **3.1.18.** $\Phi_E = 4{,}5$ В·м. **3.1.19.** $E = 100$ В/м; $D = 6{,}2\cdot10^{-9}$Кл/м^2; $P = 5{,}31\cdot10^{-9}$ Кл/м^2;

$\sigma' = 5{,}31\cdot10^{-9}$ Кл/м^2. **3.1.20.** $\sigma = 44{,}25\cdot10^{-6}$ Кл/м^2; $\sigma' = 22{,}12\cdot10^{-6}$ Кл/м^2.
3.1.21. $\Delta\varphi = 100$ В. **3.1.22.** $d = 1{,}33$ м. **3.1.23.** $C_1 = 118$ пФ; $U_2 = 250$ В; $C_2 = 236$ пФ. **3.1.24.** $A = 32$ Дж. **3.1.25.** $U_1 = 9{,}7$ В. **3.1.26.** $\Delta\varphi = 30$ В.
3.1.27. $A = 3600$ Дж. **3.1.28.** $Q = 0{,}22$ Дж. **3.1.29.** $U = 2{,}84$ В; $E = 710$ В/м, $w = 2{,}2$ мкДж/м^3. **3.1.30.** $r = 2$ Ом, $\varepsilon = 12$ В. **3.1.31.** $\langle v\rangle = 7{,}47\cdot10^{-6}$ м/с.
3.1.32. $F = 2{,}85\cdot10^{-21}$ Н. **3.1.33.** $\rho = 10^{-6}$ Ом·м. **3.1.34.** $P = 11{,}6$ кВт; $I = 96{,}8$ А.
3.1.35. $R = 7{,}8\cdot10^{13}$ Ом.

3.2.1. $B_A = 0{,}16$ мТл; $B_C = 83{,}3$ мкТл. **3.2.2.** $I = 23$ А. **3.2.3.** $B = 1{,}1$ мкТл.
3.2.4. Внутри угла $B = 0{,}48$ мТл; снаружи угла $B = 0{,}2$ мТл. **3.2.5.** $I = 25$ А.
3.2.6. $B = 0{,}1$ Тл. **3.2.7.** $B = 104$ мкТл. **3.2.8.** $F = 0{,}25$ мН.
3.2.9. $S = 7{,}53\cdot10^{-3}$ мм^2. **3.2.10.** $M = 39{,}4$ мкН·м. **3.2.11.** $F = 9$ мкН.
3.2.12. $\omega = 8{,}8\ 10^{10}$ с$^{-1}$. **3.2.13.** 1) $a = 2{,}01\ 10^{10}$ м/с^2; 2) $a = 3{,}75\ 10^{10}$ м/с^2.
3.2.14. $a_\tau = 0$; $a_n = 7\cdot10^{15}$ м/с^2. **3.2.15.** $p_m = 1{,}4\cdot10^{-13}$ А·м^2.
3.2.16. $v = 2{,}5\cdot10^6$ м/с. **3.2.17.** $R = 137$ нм; $h = 1{,}5$ мкм.
3.2.18. $n = 1{,}4\cdot10^{27}$ м$^{-3}$. **3.2.19.** $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 2{,}51\cdot10^{-5}$ Тл·м. **3.2.20.** $\Phi = 1{,}62$ мкВб.
3.2.21. $A = 3{,}5$ мДж. **3.2.22.** $A = 0{,}2$ Дж; $P = 20$ мВт. **3.2.23.** $\alpha = 60^\circ$.
3.2.24. $T = 0{,}4$ с. **3.2.25.** $I_2 \approx 600$ А. **3.2.26.** $J_2 = 1{,}03\cdot10^6$ А/м.
3.2.27. $W = 0{,}75$ Дж. **3.2.28.** $W = 2{,}2$ Дж. **3.2.29.** $w = 125$ Дж/м^3. **3.2.30.** $I = 1$ А.

4.1. 1) $A = 0{,}02$ м; 2) $\omega_0 = 18{,}84$ с$^{-1}$; 3) $\nu = 3$ Гц; 4) $T = 0{,}33$ с.
4.2. 1) $|F_{max}| = 0{,}158$ Н; 2) $T_{max} = 7{,}89\cdot10^{-3}$ Дж. **4.3.** $a_{max} = 1$ м/с^2; $x = 0{,}25\cos(2t)$, м. **4.4.** $T = 1{,}19$ с. **4.5.** $l_{пр} = 0{,}25$ м; $T = 1$ с. **4.6.** $\nu = 0{,}53$ Гц.
4.7. $A = 11{,}2$ см. **4.8.** $\omega_0 = 4{,}24\cdot10^6$ с$^{-1}$. **4.9.** $x = 9{,}24\cos(\pi t/2 + \pi/8)$, см.
4.10. 1) $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$; 2) $T_б = 3{,}14$ с. **4.11.** $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$.
4.12. 1) $t_1 = 43{,}5$ с; 2) $N = 69$. **4.13.** $r = 8{,}51\cdot10^{-4}$. **4.14.** $\omega_0 = 67$ рад/ с.
4.15. $Q = 227$. **4.16.** $T = 3{,}14$ мс; $\theta = 0{,}063$; $U(t) = 100e^{-20t}\cos 637\pi t$.
4.17. $\nu_{рез} = 299{,}7$ Гц. **4.18.** $R = 2{,}28$ Ом. **4.19.** 1) $\Delta_{max} = 2{,}5$ м; 2) $\Delta_{min} = 1{,}25$ м.
4.20. $\lambda = 10$ м; $s = 0{,}05\cos(2\pi t - \pi x/5)$, м; $s_2 = 5$ см. **4.21.** $\Delta\varphi = \pi$, т. е. точки колеблются в противофазе. **4.22.** $\Delta\nu = 35{,}4$ Гц. **4.23.** $v = 4{,}3$ м/с, удаляется.
4.24. $\lambda = 62{,}8$ м. **4.25.** $v = 328$ м/с. **4.26.** $H_0 = 3{,}77$ В/м. **4.27.** $I = 3{,}32$ мкВт/м^2.

5.1. $\alpha = 1{,}16\cdot10^{-4}$ рад. **5.2.** $r = 1{,}64$ мм. **5.3.** $d_1 = 6{,}93$ см; $d_2 = 16{,}1$ см.
5.4. $\alpha = 0{,}404$ см$^{-1}$. **5.5.** $I_1/I_2 = 1{,}5$. **5.6.** $l_1 = 7{,}5$ мм. **5.7.** 1) $x_{max} = \pm1{,}5$ мм; 2) $x_{min} = \pm5{,}35$ мм. **5.8.** $l = 1$ м. **5.9.** $d_{min} = 400$ нм. **5.10.** $n = 1{,}48$. **5.11.** $b = 2$ м.
5.12. $a/\lambda = 104$. **5.13.** $m_{max} = 3$. **5.14.** 1) $n = 18$; 2) $\varphi = 81^\circ54'$. **5.15.** 1) $d = 6$ мкм; 2) $l = 3{,}6$ мм. **5.16.** 1) $D_\varphi = 3{,}46\cdot10^5$ рад / м; 2) $R = 5000$. **5.17.** $\varphi = 37^\circ11'$.
5.18. $v = 0{,}75c$. **5.19.** $p_{min} = 2{,}44\cdot10^{-22}$ кг·м/с. **5.20.** $I_{max}/I_{min} = 7$.
5.21. $I = 0{,}5I_0\cos^4\alpha$. **5.22.** $n = 1{,}73$. **5.23.** $d_2 = 6$ мм. **5.24.** $C = 74{,}8$ кг/ м^3.
5.25. $T = 866$ К. **5.26.** $T = 4143$ К; $R_e = 1{,}67\cdot10^7$ Вт/м^2. **5.27.** $a = 0{,}26$.

5.28. $E = 1{,}96 \cdot 10^5$ Дж. **5.29.** $a = 0{,}92$. **5.30.** В 2 раза уменьшилась.
5.31. $\lambda = 7{,}3 \cdot 10^{-11}$м. **5.32.** $v = 8{,}2 \cdot 10^5$м/с. **5.33.** $\varphi = 1{,}87$ В.
5.34. $p = 1{,}3 \cdot 10^{-24}$кг·м/с. **5.35.** $\lambda_0 = 3{,}1 \cdot 10^{-7}$ м. **5.36.** $\rho = 0{,}25$. **5.37.** $n = 10^{12}$ м$^{-3}$.

6.1. $E_{3,2} = 1{,}87$ эВ. **6.2.** $E_{\text{max}} = 3{,}41$ эВ; $E_{\text{min}} = 1{,}89$ эВ. **6.3.** $r = 52{,}8$ пм; $v_1 = 2{,}19$ Мм/с. **6.4.** $\Delta L = 2{,}1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. **6.5.** $m_{\text{я}} = 7{,}01436$ а.е.м. **6.6.** $n = 8{,}7 \cdot 10^{43}$ м$^{-3}$. **6.7.** $\rho = 1{,}45 \cdot 10^{17}$ кг/м^3. **6.8.** $\rho_q = 7 \cdot 10^{24}$ Кл/м^3. **6.9.** Второе ядро более устойчиво, т. к. его энергия больше. **6.10.** 1) $E_{\text{уд1}} = 8{,}459$ МэВ/н; $\Delta m_1 = 0{,}282$ а.е.м.; 2) $E_{\text{уд2}} = 8{,}659$ МэВ/н; $\Delta m_2 = 0{,}409$ а.е.м.
6.11. $\Delta m = 0{,}2415$ а.е.м.; $E_{\text{св}} = 225$ МэВ. **6.12.** $E_{\text{св}} = 28{,}3$ МэВ; $\Delta m = 0{,}03045$ а.е.м. **6.13.** $E_{\text{уд}} = 7{,}977$ МэВ/н; $\Delta m = 0{,}137$ а.е.м.
6.14. $\Delta m = 0{,}04214$ а.е.м.; $E_{\text{св}} = 39{,}25$ МэВ. **6.15.** $E_1 > E_2$, следовательно ядро ^3_1H устойчивее. **6.16.** $E_{\text{св}} = 2{,}23$ МэВ; $\Delta m = 0{,}00239$ а.е.м. **6.17.** $\Delta N/N_0 = 0{,}306$.
6.18. $\lambda = 693$ с$^{-1}$; $\lambda = 1{,}36 \cdot 10^{-11}$ с$^{-1}$. **6.19.** $N/N_{01} = 0{,}707$; $N/N_{02} = 0{,}354$.
6.20. $t = 17{,}7$ ч. **6.21.** $T = 3$ сут. **6.22.** $\Delta N/N_0 = 0{,}95$. **6.23.** $t/T = 7{,}97$.
6.24. $A = 1{,}05 \cdot 10^{13}$ Бк. **6.25.** X = $^{226}_{88}Ra$. **6.26.** $Z = 82$; $A = 209$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

ВОПРОСЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Механика.

Введение. Предмет физики, методы физического исследования. Важнейшие этапы истории физики. Физика и естествознание. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики. Компьютеры в современной физике. Роль физики в становлении инженера. Общая структура и задачи курса физики. Система единиц физических величин СИ.

Кинематика. Пространственно-временные представления. Система отсчета. Основные физические модели: материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело, сплошная среда. Скалярные и векторные физические величины. Основные кинематические характеристики движения частиц и тел. Скорость и ускорение. Кинематика вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение.

Динамика поступательного движения. Основная задача динамики. Уравнение движения. Масса и импульс. Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета. Второй закон Ньютона как уравнение движения. Сила как производная импульса. Третий закон Ньютона. Сила трения. Упругие силы. Сила тяжести и вес. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Закон сохранения импульса. Законы сохранения импульса как фундаментальный закон природы. Реактивное движение. Центр масс (центр инерции) механической системы и закон его движения. Система центра масс.

Работа и энергия. Работа. Кинетическая энергия. Мощность. Энергия движения тела как целого. Потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы.

Закон сохранения энергии. Закон сохранения энергии в механике и его связь с однородностью пространства. Общефизический закон сохранения энергии. Удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Динамика вращательного движения твердого тела. Главные оси и главные моменты инерции твердого тела. Моменты инерции некоторых тел правильной формы. Теорема Штейнера. Вращательный момент (момент силы). Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Закон сохранения момента импульса твердого тела. Кинетическая энергия вращения твердого тела. Работа и мощность при вращении твердого тела. Гироскоп.

Элементы релятивистской механики. Механический принцип относительности. Преобразования Галилея. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца и их следствия. Релятивистский импульс.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки. Закон взаимосвязи массы и энергии. Понятие об общей теории относительности.

Молекулярная физика и термодинамика.

Основы молекулярной (статистической) физики. Статистический и термодинамический методы. Тепловое движение частиц. Макроскопические параметры. Уравнение состояния идеального газа. Давление с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Молекулярно-кинетический смысл температуры.

Статистические распределения. Вероятность и флуктуации. Распределение Максвелла. Средняя кинетическая энергия частицы. Скорости теплового движения частиц. Диффузия газа. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

Основы термодинамики. Степени свободы молекул. Распределение энергии по степеням свободы молекул. Внутренняя энергия. Теплоемкость многоатомных газов. Теплоемкость твердых тел. Недостатки классической теории теплоемкости.

Второе начало термодинамики. Обратимые и необратимые тепловые процессы. Круговые процессы. Тепловые машины и холодильники. Цикл Карно. Максимальный КПД тепловой машины. Энтропия, ее связь с термодинамической вероятностью. Статистический смысл второго начала термодинамики.

Явления переноса. Понятие о физической кинетике. Время релаксации. Эффективный диаметр молекулы, число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Диффузия, внутреннее трение, теплопроводность. Свойства разреженных газов.

Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Теоретические и опытные изотермы реального газа. Критические состояния. Фазовые превращения. Фазовые диаграммы.

Особенности жидкого и твердого состояний вещества. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления. Кристаллические и аморфные тела. Тепловое расширение твердых тел. Теплоемкость твердых тел.

Электричество и магнетизм.

Электрическое поле в вакууме. Предмет классической электродинамики. Близкодействие. Дискретность заряда и закон его сохранения. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции. Электрический диполь. Электрическая теорема Гаусса и ее применение к расчету полей.

Потенциал электрического поля. Работа электростатического_ поля. Потенциал поля и его связь с напряженностью. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

Электрическое поле в веществе. Диполь во внешнем поле. Типы диэлектриков и виды поляризации. Поляризованность. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электрического поля в веществе. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред. Сегнетоэлектрики.

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Электростатическая защита. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Энергия системы заряженных проводников. Энергия электрического поля и ее объемная плотность.

Постоянный электрический ток. Условия существования тока. Законы Ома и Джоуля − Ленца. Правила Кирхгофа. Работа и мощность тока.

Классическая теория электропроводности металлов. Носители тока в металлах. Вывод законов электрического тока. Закон Видемана − Франца. Недостатки элементарной классической теории.

Электрический ток в вакууме и газах. Термоэлектронная эмиссия. Ионизация газов. Несамостоятельный и самостоятельный газовые разряды. Плазма и ее свойства.

Магнитное поле в вакууме. Магнитная индукция. Закон Ампера. Сила Лоренца. Закон Био – Савара − Лапласа. Магнитные поля простейших систем. Магнитное поле движущегося заряда. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Движение заряженной частицы в магнитном поле. Эффект Холла и его применение. Ускоритель заряженных частиц. Магнетрон. МГД-генератор. Магнитное поле Земли.

Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты атомов и молекул. Типы магнетиков. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Ферромагнетики, их свойства и применение. Природа ферромагнетизма.

Электромагнитная индукция. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля. Опыты и закон Фарадея. Правило Ленца. Вихревые токи. Самоиндукция. Индуктивность. Взаимная индукция. Трансформатор. Энергия магнитного поля.

Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

Колебания и волны.

Свободные гармонические колебания (механические и электромагнитные). Характеристики гармонических колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятник. Энергия колебаний. Колебательный контур.

Сложение колебаний. Сложение колебаний одного направления. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания.

Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Амплитуда и фаза колебаний. Резонанс. Переменный ток. Резонанс напряжений. Резонанс токов. Мощность переменного тока.

Волновые процессы. Продольные и поперечные волны. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость, длина волны, волновое число. Групповая скорость. Энергия волны. Элементы акустики. Эффект Доплера. Ультразвук и его применение.

Электромагнитные волны. Экспериментальное получение электромагнитных волн: Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Энергия электромагнитной волны. Применение электромагнитных волн.

Оптика.

Геометрическая оптика. Основные законы геометрической оптики. Полное отражение. Световоды. Тонкие линзы, изображение предметов с помощью линз.

Интерференция света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Оптическая длина пути. Расчет интерференционной картины от двух источников. Интерференция света в тонких пленках. Интерферометры.

Дифракция света. Принцип Гюйгенса − Френеля. Метод зон Френеля. Приближения Френеля и Фраунгофера. Простые задачи дифракции: дифракция на одной и многих щелях. Дифракционная решетка. Дифракция на кристаллах. Понятие о голографии.

Взаимодействие света с веществом. Дисперсия света. Электронная теория дисперсии света. Поглощение света. Эффект Доплера. Излучение Вавилова − Черенкова.

Поляризация света. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Малюса. Двойное лучепреломление. Искусственная оптическая анизотропия. Вращение плоскости поляризации. Поляризационные призмы и поляроиды.

Тепловое излучение. Характеристики теплового излучения. Абсолютно черное тело. Законы теплового излучения. Гипотеза и формула Планка. Оптическая пирометрия.

Энергия и импульс фотона. Внешний фотоэффект и его законы. Давление света. Эффект Комптона и его теория. Дуализм свойств электромагнитного излучения.

Физика атома и ядра.

Теория Бора. Модели атома Томсона и Резерфорда. Постулаты Бора. Теория водородоподобных атомов. Спектр атома водорода.

Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов. Соотношение неопределенностей. Волновая функция и ее статистический смысл.

Элементы физики атомного ядра. Характеристики ядра. Нуклоны. Ядерные силы. Энергия связи. Модели ядра.

Радиоактивность. Радиоактивное излучение и его виды. Закон радиоактивного распада. Деление ядер. Ядерный реактор. Термоядерные реакции.

Элементарные частицы. Классификация и взаимопревращаемость частиц. Переносчики фундаментальных взаимодействий. Кварки.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

1 Некоторые физические постоянные (округленные значения)

Ускорение свободного падения .... $g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная............................... $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2)
Постоянная Авогадро…………………………… $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная………………….. $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К)
Скорость света в вакууме .... $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Больцмана .... $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд .... $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона .... $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона .... $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона... $m_n = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная .... $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная... $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнетон Бора... $\mu_{\text{Б}} = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл
Постоянная Стефана-Больцмана......................... $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4)
Первая постоянная Вина...................................... $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К
Вторая постоянная Вина...................................... $C = 1{,}2\ 9 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3 \cdot$К^5)
Постоянная Планка .... $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с

Комптоновская длина волны электрона.............. $\Lambda = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Первый боровский радиус .... $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Энергия ионизации атома водорода .... $E_i = 2{,}16 \cdot 10^{-18}$ Дж
Постоянная Ридберга .... $R = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ рад/с
Атомная единица массы .... 1 а. е. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

2 Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение	Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м	Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг	Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м	Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг

3 Упругие постоянные твердых тел

Вещество	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа
Алюминий	69	24
Вольфрам	380	140
Железо (сталь)	200	76
Медь	98	44

4 Плотность ρ твёрдых тел и жидкостей

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Алюминий	2,70	Вода (при 4 ºС)	1
Железо	7,88	Глицерин	1,26
Медь	8,93	Дизельное топливо	1
Свинец	11,3	Масло трансформаторное	0,9
Серебро	10,5	Керосин	0,8
Эбонит	1,2	Масло касторовое	0,9
Магний	1,74	Спирт	0,83

5 Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность λ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,27	17,2	24,1
Гелий	0,22	18,9	142
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	0,30	8,32	15,8

6 Динамическая вязкость η и поверхностное натяжение α жидкостей при 20 °С

Вещество	η, мПа·с	α, мН/м	Вещество	η, мПа·с	α, мН/м
Бензол	0,6	29	Мыльная вода	–	40
Вода	1,00	73	Ртуть	1,58	500
Глицерин	1480	62	Спирт	1,19	22

7 Диэлектрическая проницаемость ε некоторых веществ

Вещество	ε	Вещество	ε
Вода	81,0	Оргстекло	3,5
Глицерин	3,9	Полиэтилен	2,3
Керосин	2,0	Резина, каучук	2,5
Масло (трансформаторное)	2,2	Слюда	7,5
Масло (касторовое)	4,8	Стекло	7,0
Спирт	26,0	Фарфор	5,0
Парафин	2,0	Эбонит	2,7

9 Удельное сопротивление ρ_0 (при 20 °С) и температурный коэффициент α проводников

Вещество	ρ_0, 10^{-8} Ом·м	α, 10^{-4} °С$^{-1}$
Серебро	1,66	40
Алюминий	3,21	38
Медь	1,7	42,8
Железо	12	62
Вольфрам	5,5	51
Свинец	20,8	43
Нихром	100	4
Манганин	44,5	0,5
Никелин	40	2,3
Графит	390	–8

10 Подвижность ионов газов (при нормальных условиях)

Газ	Подвижность, 10^{-4} м^2/(В·с)		Газ	Подвижность, 10^{-4} м^2/(В·с)	
	u_+	u_-		u_+	u_-
Водород	1,3	1,8	Кислород	1,3	1,8
Воздух	5,4	7,4	Углекислый газ	1,0	1,1
Азот	1,4	1,9	Хлор	0,6	0,5

11 Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетики	χ, 10^{-6}	Диамагнетики	χ, 10^{-6}
Азот	0,013	Водород	–0,063
Алюминий	23	Бензол	–7,5
Воздух	0,38	Висмут	–176
Вольфрам	176	Вода	–9
Жидкий кислород	3400	Каменная соль	–12,6
Кислород	1,9	Кварц	–15,1
Марганец	121	Медь	–10,3
Платина	360	Стекло	–12,3

12 Работа выхода электрона из металлов

Металл	Работа выхода, эВ	Металл	Работа выхода, эВ	Металл	Работа выхода, эВ
Алюминий	3,74	Литий	2,39	Платина	5,29
Вольфрам	4,50	Медь	4,47	Серебро	4,28
Железо	4,36	Натрий	2,27	Цезий	1,89
Калий	2,15	Никель	4,84	Цинк	3,74

13 Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	Масса покоя		Энергия покоя	
	кг	а. е. м.	Дж	МэВ
Электрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8{,}16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$	1876
α-частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5{,}96 \cdot 10^{-10}$	3733

14 Относительные атомные массы (округленные средние значения) A и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Символ	A	Z	Элемент	Символ	A	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Натрий	Na	23	11
Бор	B	11	5	Неон	Ne	20	10
Бром	Br	80	35	Радий	Ra	226	88
Водород	H	1	1	Радон	Rn	222	86
Гелий	He	4	2	Ртуть	Hg	201	80
Йод	I	127	53	Свинец	Pb	207	82
Калий	K	39	19	Титан	Ti	48	22
Кальций	Ca	40	20	Фосфор	P	31	15
Кислород	O	16	8	Цинк	Zn	65	30
Кобальт	Co	59	27	Углерод	C	12	6
Кремний	Si	28	14	Уран	U	238	92
Литий	Li	6	3	Хлор	Cl	35	17

15 Массы атомов некоторых изотопов

Элемент	Символ изотопа	Масса, а. е. м.	Элемент	Символ изотопа	Масса, а. е. м.
Водород	$^{1}_{1}H$	1,00782	Кремний	$^{29}_{14}Si$	28,97649
	$^{2}_{1}H$	2,01410		$^{31}_{14}Si$	30,97536
	$^{3}_{1}H$	3,01604	Кальций	$^{44}_{20}Ca$	43,95548
Гелий	$^{3}_{2}He$	3,01602		$^{29}_{15}P$	28,98180
	$^{4}_{2}He$	4,00260	Фосфор	$^{30}_{15}P$	29,97831
Литий	$^{6}_{3}Li$	6,01512		$^{31}_{15}P$	30,97376
	$^{7}_{3}Li$	7,01600	Уран	$^{235}_{92}U$	235,04394
Кислород	$^{15}_{8}O$	15,00307		$^{238}_{92}U$	238,05081
	$^{16}_{8}O$	15,99491	Полоний	$^{210}_{84}Po$	209,98288
	$^{17}_{8}O$	16,99913	Радон	$^{222}_{86}Rn$	222,01760
Алюминий	$^{27}_{13}Al$	26,98154	Плутоний	$^{239}_{94}Pu$	239,05217

16 Периоды полураспада некоторых радиоактивных изотопов

Элемент	Символ изотопа	Период полураспада	Элемент	Символ изотопа	Период полураспада
Фосфор	$^{32}_{15}P$	14,3 сут	Актиний	$^{225}_{89}Ac$	10 сут
Радий	$^{219}_{88}Ra$	10^{-3} с	Торий	$^{228}_{90}Th$	1,9 года
	$^{226}_{88}Ra$	1620 лет	Уран	$^{235}_{92}U$	$7{,}1 \cdot 10^{8}$ лет
Калий	$^{40}_{19}K$	$1{,}32 \cdot 10^{9}$ лет		$^{238}_{92}U$	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет

17 Множители и приставки для образования десятичных, кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Приставка		
Обозначение	Наименование	Множитель	Обозначение	Наименование	Множитель
Т	тера	10^{12}	с	санти	10^{-2}
Г	гига	10^{9}	м	милли	10^{-3}
М	мега	10^{6}	мк	микро	10^{-6}
к	кило	10^{3}	н	нано	10^{-9}
д	деци	10^{-1}	п	пико	10^{-12}

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………………….. 3
1 МЕХАНИКА……..……………………………………………………….... 4
Основные определения, законы и формулы………………………...... 4
Примеры решения задач……………………………………………….. 16
Задачи для самостоятельного решения……………………………….. 31
2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА………………... 35
Основные определения, законы и формулы………………………...... 35
Примеры решения задач……………………………………………….. 48
Задачи для самостоятельного решения……………………………….. 57
3 ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ …………………...………… 61
3.1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК…………………… 61
Основные определения, законы и формулы…..………………...... 61
Примеры решения задач……………………………………….….. 79
Задачи для самостоятельного решения……………………….….. 89
3.2 МАГНЕТИЗМ…….………………………………………………….. 93
Основные определения, законы и формулы…………………...... 93
Примеры решения задач…………………………………………….. 102
Задачи для самостоятельного решения…………………………….. 122
4 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ………………………………………………... 125
Основные определения, законы и формулы………………………...... 125
Примеры решения задач……………………………………………….. 140
Задачи для самостоятельного решения……………………………….. 149
5 ОПТИКА……………………………………………………………….... 152
Основные определения, законы и формулы………………………...... 152
Примеры решения задач……………………………………………….. 167
Задачи для самостоятельного решения……………………………….. 177
6 ФИЗИКА АТОМА И ЯДРА……………………………….................... 181
Основные определения, законы и формулы………………………...... 181
Примеры решения задач……………………………………………….. 188
Задачи для самостоятельного решения……………………………….. 194
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА………………………..................... 196
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ……………………………………...................... 197
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Вопросы для изучения теоретического материала………… 200
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Справочные таблицы……………………….……………... 205

Учебное издание

ШИЛЯЕВА Ксения Павловна
ДЕЛИКАТНАЯ Ирина Олеговна
АХРАМЕНКО Николай Арсеньевич

ФИЗИКА. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Пособие

Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 25.10.2021 г. Формат $60x84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 10,53. Тираж 250 экз.
Зак. № 2566. Изд. № 58.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель