

УДК 537.2.001.24

Д. В. КОМНАТНЫЙ, кандидат технических наук; Производственное управление информационных технологий РУП «ПО Белоруснефть»

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА СЕТКАМИ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрены задачи построения сеток граничных элементов для численного расчета электростатических полей. Выявлено отсутствие в литературе обоснованных рекомендаций по распределению граничных элементов на граничных поверхностях, встречающихся в конкретной задаче. Обосновано рассмотрение сеток граничных элементов с точки зрения выполнения граничного условия электростатики при расчетах с их помощью. Выполнен анализ свойств потенциала сеток двумерных граничных элементов путем аналитического решения модельных задач, соответствующих граничным поверхностям, встречающимся в инженерной практике. Анализ полученных соотношений, описывающих потенциал сетки граничных элементов, позволил обосновать рекомендации по построению таких сеток. В частности, показано, что равномерные сетки дают наилучшее приближение для граничного условия задачи.

В настоящее время особое внимание уделяется обеспечению бесперебойного и безаварийного функционирования железных дорог и безопасности перевозочного процесса. Постоянное выполнение этих требований означает повышение привлекательности железных дорог для грузоперевозчиков и пассажиров, а следовательно, – успех коммерческой деятельности.

Безопасность и бесперебойность перевозок во многом определяется безотказной работой систем железнодорожной автоматики и телемеханики, связи, энергоснабжения. Разработка аппаратуры этих систем с должными характеристиками надежности и помехоустойчивости существенно облегчается при применении автоматизированного проектирования.

В частности, при конструировании оборудования энергоснабжения для анализа помехоустойчивости технических средств автоматики и связи требуется производить расчеты статических и квазистатических электрических полей [1 – 3].

Расчет таких полей успешно выполняется методом граничных элементов. В этом методе непрерывное распределение заряда по граничным поверхностям задачи заменяется кусочно-непрерывным распределением по участкам поверхности, причем форма участков подбирается таким образом, чтобы поле участка можно было найти аналитически. В литературе по численным методам решения задач автоматического проектирования предложены различные системы граничных элементов.

Так, в [4] описаны треугольные граничные элементы, граничные элементы в форме отрезка и осесимметричные граничные элементы в виде окружности. В работе [2] рассмотрены прямоугольные граничные элементы, а также граничные элементы в виде отрезков прямых и в форме окружностей. При этом заряд граничного элемента может быть сведен к точечному, может быть равномерно распределен по элементу или распределен с убыванием от центра элемента к его границам. В

работе [5] предложены граничные элементы в виде отрезков прямых и дуг окружностей. Плотность заряда на этих элементах аппроксимируется В-сплайнами. В статье [6] с помощью осесимметричных граничных элементов рассчитано начальное распределение заряда и потенциала при электростатическом разряде между эллипсоидом и бесконечной проводящей плоскостью.

Тем не менее, в литературных источниках отсутствуют строгие рекомендации по построению сеток граничных элементов. Более того, в [5] констатируется, что такие рекомендации дать затруднительно, и на практике руководствуются прагматическими соображениями. Исходя из таковых обычно проектируют равномерно сетки граничных элементов, так как алгоритмы расчета ее параметров легче всего реализовать на ЭВМ.

Цель данной статьи – анализ свойств сеток граничных элементов с точки зрения выполнения известного граничного условия электростатического поля – постоянства потенциала поля на граничных поверхностях. Приближенные методы расчета параметров поля должны как можно точнее удовлетворять именно граничным условиям задачи. В этом случае по теореме единственности решения приближенное решение будет наилучшим образом соответствовать реальному распределению поля.

Ограничимся рассмотрением двумерного случая и поточечной коллокации, которой можно придать ясный физический смысл. При использовании поточечной коллокации для решения двумерных задач границы проводников задачи разделяются на участки, в центре которых размещаются электрические оси. Полагают, что действие этой оси равно действию заряда, распределенного по участку [1, 2]. В связи с этим поточечная коллокация находит широкое применение при решении технических задач [7].

Необходимо установить, каким наилучшим образом размечать сетку граничных элементов. Для этого рассмотрим ряд модельных задач, кото-

рые охватывают большую часть существующих в технических приложениях границ [8].

В задачах на рисунках 1 – 4 электрические оси размещены на граничной поверхности, точки которой в выбранной системе координат имеют одну из координат постоянной. Вторая координата электрических осей на этой граничной поверхности меняется периодически.

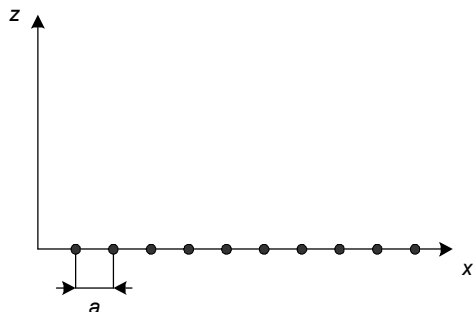


Рисунок 1 – Система электрических осей на плоскости

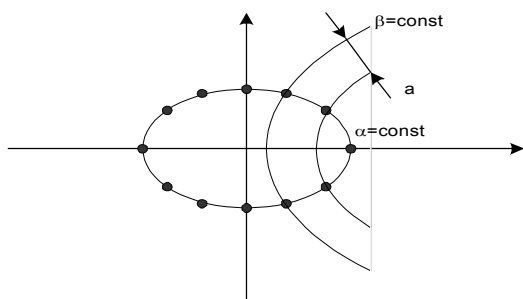


Рисунок 2 – Система электрических осей на эллиптическом цилиндре

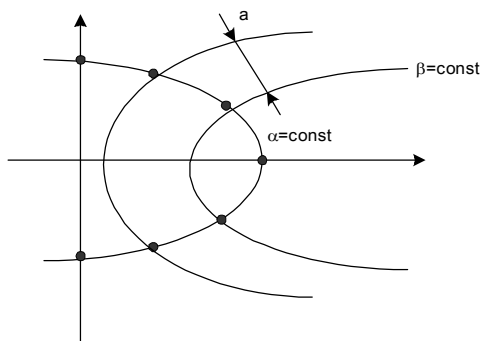


Рисунок 3 – Система электрических осей на параболическом цилиндре

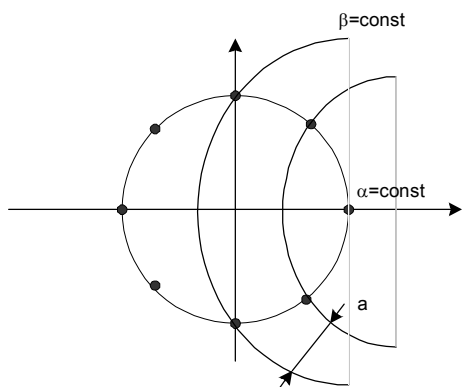


Рисунок 4 – Система электрических осей на поверхности цилиндра в биполярной системе координат

Электрическое поле всех приведенных систем электрических осей удовлетворяет уравнению Лапласа. Уравнение Лапласа для всех этих систем может быть записано в виде [8]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} = 0, \quad (1)$$

где φ – потенциал поля, V ; q_1 – периодически меняющаяся координата; q_2 – постоянная координата граничной поверхности.

Условие периодичности изменения одной из координат имеет вид

$$\varphi(q_1, q_2) = \varphi(q_1 + na, q_2), \quad (2)$$

где n – число; a – период изменения координаты.

Значения координат q_1 и q_2 для каждой задачи приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Координаты модельных задач

Модельная задача	Периодически меняющаяся координата q_1	Постоянная координата q_2
Рисунок 1	x	z
Рисунок 2	β	α
Рисунок 3	β	α
Рисунок 4	β	α

Согласно [9] уравнения (1) и (2) определяют математическую форму решения задачи расчета потенциала электростатического поля. Известно, что условию периодичности (2) удовлетворяет функция косинус [10], поэтому решение уравнения (1) ищется в виде

$$\varphi = F_n(q_2) \cos \frac{2\pi n q_1}{a}. \quad (3)$$

После подстановки (3) в (1) и преобразований получается линейное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $F_n(q_2)$

$$\frac{\partial^2 F_n(q_2)}{\partial q_2^2} - \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(q_2) = 0. \quad (4)$$

Решением уравнения (4) является функция [10]

$$F_n(q_2) = A_1 e^{-\frac{2\pi n q_2}{a}}, \quad (5)$$

где A_1 – коэффициент ряда Фурье.

Подставляя (5) в (3), окончательно получаем формулу для потенциала рассматриваемых систем электрических осей вблизи граничной поверхности

$$\varphi = A_1 e^{-\frac{2\pi n q_2}{a}} \cos \frac{2\pi n q_1}{a}. \quad (6)$$

Формула (6) сходна с результатом решения задачи из книги [10] о поле системы электрических осей, показанной на рисунке 1.

Анализ выражения (6) позволяет сделать следующие выводы:

Список литературы

1 Поле системы граничных элементов не удовлетворяет условию постоянства потенциала на граничной поверхности в любой ее точке.

2 Чтобы исключить дополнительные искажения поля, сетка граничных элементов должна быть как можно более равномерной; таким образом, использование равномерных сеток оказывается физически оправданным.

3 В общем случае для повышения точности решения следует увеличивать число граничных элементов в сетке.

4 Сетка граничных элементов должна включать в себя особенности граничной поверхности – острия и углы – без изменения равномерности расположения граничных элементов.

Данные рекомендации проверены при разработке программы расчета электрического поля прямого электростатического разряда в корпусах технических средств железнодорожной автоматики и телемеханики. Опыт расчетов на ЭВМ показал, что сходимость итерационных процессов решения интегральных уравнений для распределения электрического заряда методом граничных элементов существенно ухудшается на неравномерных сетках, не отвечающих приведенным выше условиям.

Получено 25.10.2005

D. V. Komnatny. Rational approximation of electric charge distribution by boundary element meshes

Problems of boundary element meshes construction for electrostatic field calculation are considered in this article. The absence of substantiated recommendations on boundary elements distribution on boundary surfaces, are found in concrete task, is exposed. The consideration of boundary element meshes from the point of view of boundary condition accomplishment is substantiated. The analysis of two-dimensional boundary element meshes potential is fulfilled by analytical solution of model tasks, which correspond to boundary surfaces, founded in engineer practice. The analysis of received formulas, described the boundary element meshes potential, permit to substantiate the recommendations of such meshes construction. In particular, it is shown, that uniform meshes gives the best approximation for boundary condition of the task.

1 **Колечицкий, Е. С.** Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / Е. С. Колечицкий. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 168 с.

2 **Кечиев, Л. Н.** Расчет электрической емкости в конструкциях РЭС: учеб. пособие / Л. Н. Кечиев, И. В. Цирин. – М.: Московский институт электронного машиностроения, 1990. – 96 с.

3 **Velicovic, D. M.** Slit cable calculation. / D. M. Velicovic, A. M. Dekic // Electromagnetic Environments and Consequences: Proceeding of the EUROEM 94 International Symposium. / EUROEM – Bordeaux, EUROEM, 1994. – P. 1002 – 1008.

4 **Беннерджи, П. К.** Методы граничных элементов в прикладных науках / П. К. Беннерджи, Р. Баттерфильд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

5 **Ильин, В. П.** Численные методы решения задач электрофизики / В. П. Ильин. – М.: Наука, 1985. – 334 с.

6 **Jobava, R.** Computer Simulation of ESD from Voluminous Objects Compared to Transient Field of Human / R. Jobava, D. Pommerenke, D. Karkashadze, P. Shubitidze, R. Zaridze, S. Frei, M. Adam // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2002. – Vol. 42, № 1. – P. 54-65.

7 **Вишневский, А. М.** К расчету трехмерных электрических полей / А. М. Вишневский // Электричество. – 1981. – № 8. – С. 49 – 52.

8 **Иоссель, Ю. Я.** Расчет потенциальных полей в энергетике / Ю. Я. Иоссель. – Л.: Энергия, 1978. – 351 с.

9 **Литвиненко, Л. Н.** Численное исследование электростатических полей в периодических структурах / Л. Н. Литвиненко, Л. П. Сальникова. – Киев: Наукова думка, 1986. – 160 с.

10 **Фейнман, Р.** Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5 / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966. – 296 с.