Параметры разложения нагрузки (12) в ряд по системе собственных ортонормированных функций

$$q_n(t)=\frac{q_1\delta(t)}{\pi M_0 d_n}\left[U_2(\pi,\beta_n)-\frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}U_2(\pi,i\beta_n)\right]. \quad (13)$$

Функция времени принимает вид

$$T_n(t)=A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)+$$

$$+\frac{q_1\sin(\omega_n t)}{\pi M_0 d_n\omega_n}\left[U_2(\pi,\beta_n)-\frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}U_2(\pi,i\beta_n)\right]. \quad (14)$$

Для импульсной нагрузки прямоугольной формы $q(r,t)=q_1\delta(t)$ функции (13) и (14)

$$q_n(t)=\frac{q_1\delta(t)}{M_0 d_n\beta_n}\left(J_1(\beta_n)-\frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}I_1(\beta_n)\right).$$

$$T_n(t)=A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)+$$

$$+\frac{q_1\sin(\omega_n t)}{M_0 d_n\beta_n\omega_n}\left(J_1(\beta_n)-\frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}I_1(\beta_n)\right). \quad (15)$$

На рисунке 4 показано изменение во времени прогиба в центре круговой трехслойной пластины при импульсной поверхностной нагрузке прямоугольной формы (1) с интенсивностью q_1 = 700 и синусоидальной эквивалентной ей по мощности нагрузке (2) с интенсивностью $q_1' = \frac{1}{2}\pi q_1$. В силу нулевых начальных условий константы интегрирования в функциях (14) и (15) $A_n = B_n = 0$. Во втором случае прогиб больше по величине, что подтверждает большую опасность синусоидального импульса по сравнению с прямоугольным при их одинаковой мощности.

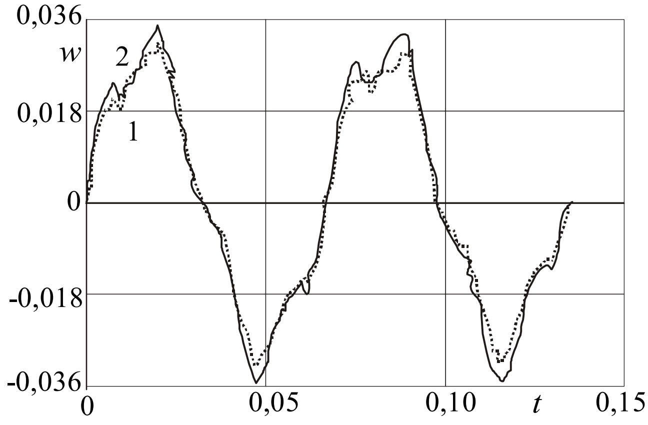


Рисунок 4

Динамическая поверхностная синусоидальная нагрузка является, с точки зрения прочности элементов конструкций, более опасной, чем нагрузка прямоугольной формы, так как вызывает при одинаковой мощности бóльшие прогибы.

Список литературы

1 *Леоненко Д. В.* Локальные динамические нагружения круговых трехслойных пластин // Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – Т. 7, № 4. – С. 8–13.

2 *Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В.* Колебание круговых трехслойных пластин под действием резонансных нагрузок // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 114–120.

3 *Старовойтов Э.И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. –Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

4 *Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В.* Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.

Получено 29.09.2004

D. V. Leonenko. Fluctuations of circular sandwich plate by sine-shapet shallow loads**.**

Explored axisymmetric compelled fluctuations springy circular sandwich plate under the action of sine-shapet shallow loads. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypothesises broken normal. Filler – light. Received analytical deciding the problems under striking and pulsed influences. Conducted numerical analysis decisions. Results are compared with corresponding events of shallow load right angle form.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2004. № 2(9)

УДК 539.3

С. А. ОРЛОВ, кандидат физико-математических наук; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА В МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Предлагается новый универсальный метод исследования, основанный на интегрировании большого количества дифференциальных уравнений для функций перемещений в стержневых системах. Показана на примерах возможность формализации соответствующих аналитических вычислений на языке Maple. Обсуждаются приложения и перспективы развития подхода, объединяющего матричные (численные) и аналитические методы.

Существует множество приемов и методик расчета как отдельных стержней, так и сложных стержневых систем. Рассматриваются они обычно в курсе строительной механики. Многие приемы носят весьма частный характер, поэтому их использование ограничено. Однако существует лишь три основополагающих подхода к расчету стержневых систем. Кратко остановимся на каждом из них.

1 Метод интегрирования дифференциального уравнения. В случае линейно упругих стержней эти уравнения, в зависимости от характера деформирования, имеют вид:

$$EF\frac{dw^N}{dz}=N,\ GF\frac{dw^Q}{dz}=kQ,$$

$$GJ_к\frac{d\varphi}{dz}=M_к,\ EJ\frac{d\theta}{dz}=M, \qquad (1)$$

где E, G – характеристики материала, модуль Юнга и модуль сдвига соответственно; F – площадь поперечного сечения стержня; $J_к$, J – геометрические характеристики, моменты инерции при кручении и изгибе; w^N – перемещение, обусловленное растяжением (сжатием); w^Q – перемещение, вызванное сдвигом; φ – угол закручивания при кручении; θ – угол изгиба; N, Q – продольная и поперечная силы соответственно; $M_к$, M – крутящий и изгибающий моменты; k – коэффициент сдвига.

Поскольку один и тот же вид деформирования может быть реализован различными способами приложения внешней нагрузки, то уравнения (1) могут быть дополнены так называемыми дифференциальными соотношениями. В случае изгиба, например, к последнему уравнению (1) следует добавить следующие:

$$q=\frac{dQ}{dz},\ Q=\frac{dM}{dz},$$

где q – распределенная поперечная нагрузка.

Не нарушая общности, дальнейшие рассуждения будем вести в отношении прямого изгиба. Поведение исследуемых балок можно проанализировать, решив дифференциальное уравнение линии прогибов

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2}=M \quad \left(\theta=\frac{dy}{dz}\right), \qquad (2)$$

где $y = y(z)$ – прогиб бруса в сечении с текущей координатой z.

Процедура заключается в составлении дифференциального уравнения, получении его общего решения и затем использовании граничных условий для вычисления постоянных интегрирования. Впервые дифференциальное уравнение линии прогибов было применено при расчете балок в книге Навье [1].

Двойственность представлений энергии деформации и дополнительной энергии служит основанием для следующих общих приемов расчета.

2 Приемы, основанные на применении первой теоремы Кастилиано. Математически она выражается следующим образом:

$$P_i=\frac{\partial U}{\partial \delta_i}. \qquad (3)$$

Данное соотношение означает, что если энергия деформации U выражена как функция от перемещений, то частная производная от энергии деформации по произвольному перемещению δ_i равна соответствующей этому перемещению силе P_i. Под P_i и δ_i понимаются силы и вызываемые этими силами перемещения в обобщенном смысле.

Фундаментальным расширением теоремы Кастилиано (3) является принцип стационарности потенциальной энергии. Он утверждает, что если потенциальная энергия упругой конструкции (линейной или нелинейной) представляется функцией от неизвестных перемещений узлов D_i, то конструкция будет находиться в состоянии равновесия, когда перемещения имеют такие значения, при которых полная потенциальная энергия П принимает стационарное значение [2]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_i}=0. \qquad (4)$$

Применение принципа стационарности потенциальной энергии (4) приводит к уравнениям равновесия так называемого метода перемещений. В случае линейно деформируемых конструкций метод иногда называют методом жесткостей.

3 Методы, основанные на теореме Кротти–Энгессера и второй теореме Кастилиано. Если дополнительную энергию обозначить U^*, то теорема Кротти–Энгессера записывается в такой форме:

$$\delta_i=\frac{\partial U^*}{\partial P_i}. \qquad (5)$$

Здесь дополнительная энергия U^* есть функция внешних нагрузок P_i. В частном случае линейно упругих стержневых систем $U^* = U$ и уравнение (5) принимает форму второй теоремы Кастилиано

$$\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}. \qquad (6)$$

Когда в заданной системе отсутствуют перемещения, соответствующие так называемым лишним статическим неизвестным X_i (реакциям, например), приходим к уравнениям принципа стационарности дополнительной энергии. Для нелинейно деформируемых конструкций принцип стационарности записывается через дополнительную энергию U^*, а для линейно упругих конструкций – через энергию деформации U:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = 0\,,\ \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0\,. \qquad (7)$$

Соответственно, первая группа уравнений (7) лежит в основе метода сил, а вторая – в основе того же метода, который часто называют методом податливостей.

В отличие от метода перемещений, уравнения (4) которого представляют собой уравнения равновесия в силах, уравнения (7) имеют смысл уравнений совместности перемещений.

Наиболее важной частью исследования по методу сил (податливостей) является определение перемещений. При линейном поведении конструкций используют интегралы Мора – Максвелла. Например, если энергия деформации, накопленная в призматической балке, обусловлена изгибом в плоскости симметрии сечения, то перемещение любой точки балки может быть найдено по формуле:

$$\delta = \int_l \frac{M_{\text{P}} M_1}{EJ} dz\,,$$

где M_{P} – внутренний изгибающий момент, обусловленный действием внешних нагрузок;

M_1 – внутренний момент, вызванный единичной нагрузкой, соответствующей искомому перемещению δ.

Действительно, используя вторую теорему Кастилиано (6) и выражение для энергии изгиба в условиях линейной упругости

$$U = \int_l \frac{M^2}{2EJ} dz\,,$$

получаем

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_l \frac{M^2}{2EJ} dz = \int_l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_i} dz\,,$$

где отношение $M_1 = \partial M / \partial P_i$ представляет собой момент, вызванный действием единичной нагрузки, соответствующей искомому перемещению δ_i [2].

Справедливо считается [2, 3], что вследствие вычислительных трудностей при определении большого числа постоянных метод интегрирования дифференциального уравнения практически удобен только для сравнительно простых видов нагружения и для балок с одним пролетом. В самом деле, для статически определимой балки, имеющей n участков, необходимо совместно решить $2n$ уравнений для определения $2n$ постоянных интегрирования. Задача усложняется в случае статической неопределимости бруса. К константам интегрирования добавляются неизвестные реакции, число которых определяется степенью статической неопределимости.

Однако такой метод универсален, – в этом его важнейшее преимущество. Ограничения в использовании метода интегрирования дифференциального уравнения могут быть связаны, в конечном итоге, лишь с проблемой разрешимости краевых задач.

Общей характерной особенностью метода сил и метода перемещений является необходимость предварительного анализа работы конструкции. Важными являются вопросы о степени статической неопределимости, выборе основной системы метода и т. д.

В настоящее время в связи с развитием ЭВМ в технике безраздельно господствуют численные методы. Их применение, по-видимому, может быть полностью оправданным лишь в тех случаях, когда интеграл дифференциального уравнения не выражается в элементарных функциях и качественный характер решения не вполне известен. Численные методы ориентированы на операции с матрицами. Так, при расчете конструкций широко применяются методы, включающие в себя метод податливостей и метод жесткостей и усовершенствованные в том отношении, что все уравнения записываются в матричной форме. Универсальным методом расчета сложных стержневых систем является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод можно рассматривать, с одной стороны, как развитие метода Рэлея–Ритца в задачах, точное решение которых получить затруднительно, и, с другой стороны, как обобщение метода податливостей и метода жесткостей при получении точных решений для стержневых систем.

Пожалуй, не имеет смысла обсуждать преимущества и недостатки МКЭ. Объективно надо признать, что прогресс в решении множества задач механики деформируемого твердого тела достигнут именно благодаря этому методу.

Тем не менее, укажем на очевидный недостаток МКЭ. Исходные данные задачи и полученные решения – массивы чисел. Это обстоятельство значительно усложняет решение задач проектирования и оптимизации.

Сегодня появилась возможность вернуться к методу интегрирования, который долгое время представлял лишь методическую ценность в преподавании. Аналитические вычисления, связанные с составлением и интегрированием большого числа дифференциальных уравнений (1), поддаются формализации. Это стало возможным благодаря развитию универсальных систем компьютерной математики. Вообще говоря, именно универсальность систем обеспечивает доступ к базам данных практически по всем разделам математики (по сути, автоматическое использование справочной информации) и к базам данных по всем разрешенным путям преобразований аналитических выражений. Вкупе с широко используемыми матричными алгоритмами такие системы превращаются в мощнейший инструмент для исследования самых разнообразных явлений и процессов. Думается, таким универсальным средам в скором времени будет принадлежать доминирующая роль.

Эффективно проводить громоздкие аналитические вычисления позволяют средства пакета Maple компании Waterloo Maple Inc. Последние версии этих систем дополнены численными алгоритмами фирмы The Numeric Algorithms Group, являющейся мировым лидером в этой области. Совместная работа продолжается в рамках единого проекта по созданию математического пакета следующего поколения [4].

Приведем результаты расчета балочных сеток, широко распространенных на транспорте и в строительстве объектов.

Задача 1. Получить общее решение задачи о поведении плоскопространственной рамы, нагруженной так, как показано на рисунке 1, *а*. Узлы рамы – жесткие. Учесть деформации изгиба и кручения.

Общий характер решения виден в окне рабочего документа Maple, которое представлено ниже:

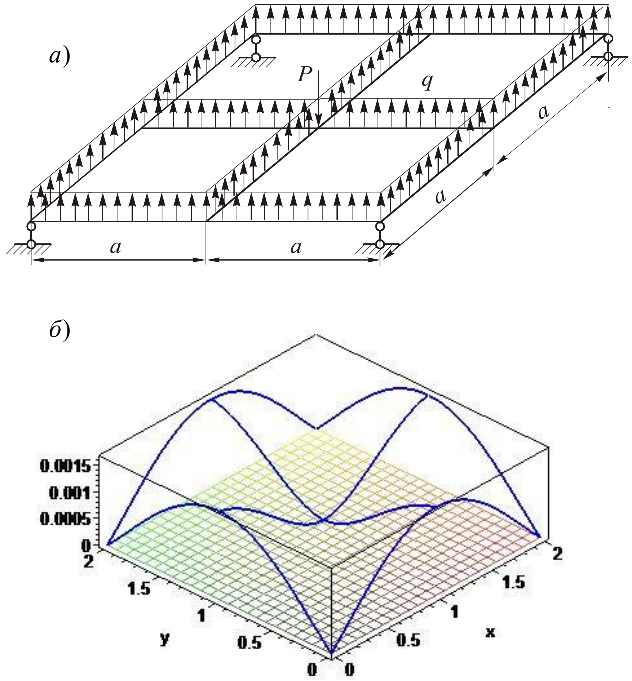
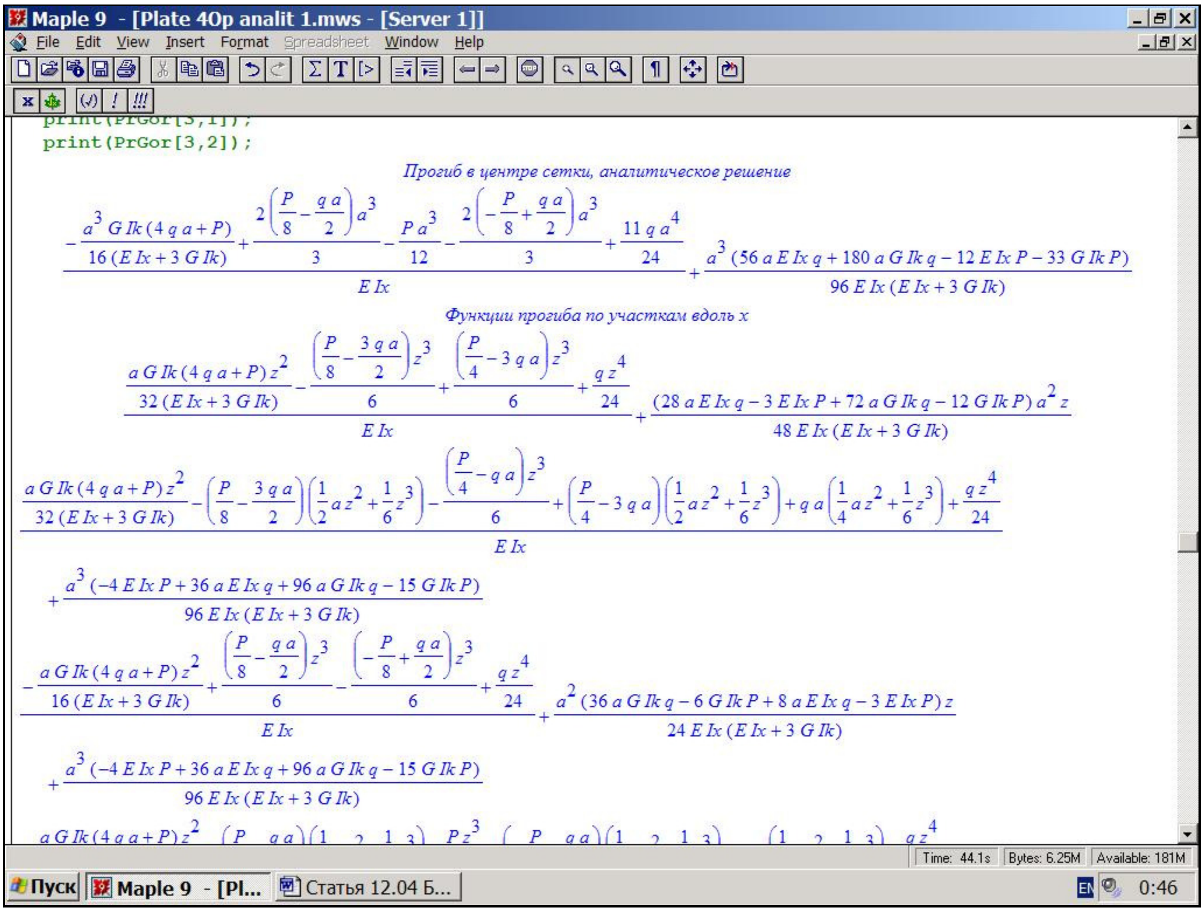


Рисунок 1 – Расчетная схема (а) и перемещения в балочной сетке (б)



Для графического вывода перемещений произвольным образом задаемся нагрузками и жесткостями (рисунок 1, *б*).

Задача 2. Рассчитать шарнирно закрепленную по контурам раму, показанную на рисунке 2. Расстояние между опорами – *a*.

На рисунке 3 представлена стержневая система в деформированном состоянии, рисунки отличаются масштабом. Исходные данные для графического вывода перемещений w, м, выбраны произвольно: q = 1 кН/м, a = 1 м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $G =$ $= 0{,}8 \cdot 10^{11}$ Па, $d = 5 \cdot 10^{-2}$ м (круглое поперечное сечение). Эпюры изгибающих моментов M, Н, на вертикальных участках рамы иллюстрирует рисунок 4. Здесь эпюры построены на сжатом волокне. Заметим, что решение изначально может быть получено в самом общем виде.

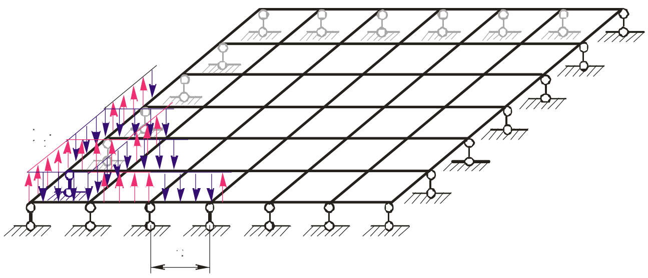


Рисунок 2 – Расчетная модель плоскопространственной стержневой системы

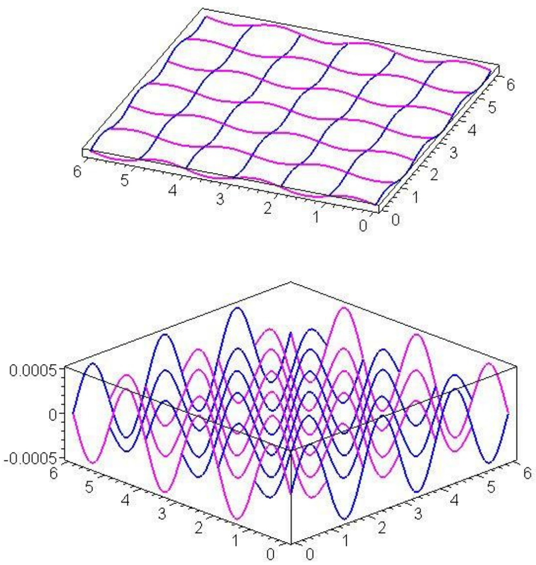


Рисунок 3 – Перемещения в стержневой системе

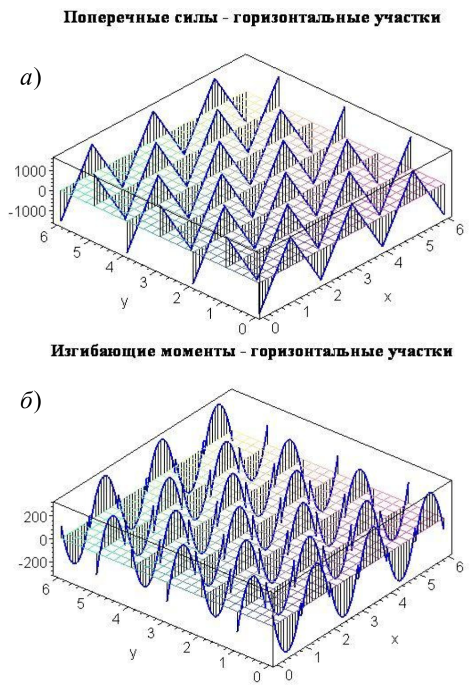


Рисунок 4 – Эпюры поперечных сил (а) и изгибающих моментов (б)

Достоинства предлагаемого подхода, основанного на символьном интегрировании дифференциального уравнения для функции перемещений, очевидны. Аналитическое решение всегда предпочтительнее любого численного результата. Конечно, общий вид решения для большого числа сопряженных граничных условий может оказаться громоздким и сложным для восприятия. Анализ такого решения естественно проводить аналитически машинным способом, т. е. использовать всю мощь накопленных знаний в области дифференциального и интегрального исчислений для выяснения характера исследуемых зависимостей. И вряд ли стоит каждый раз задумываться над тем, каким именно путем получен результат[1)]. В большинстве случаев проще проверить решение обратной подстановкой, а также соблюдением качественных закономерностей. Более того, результаты профессиональных тестирований свидетельствуют о том, что оснований не доверять системе Maple сегодня нет.

Граничные условия могут формулироваться в нагрузках, в перемещениях и смешанным образом. Вопрос обо всех возможных классах задач в прикладном понимании – это вопрос о разрешимости краевых задач в теории дифференциальных уравнений. Поэтому возникающие проблемы могут быть связаны либо с ограниченной возможностью получить аналитическое решение либо с некорректностью условий на границах.

К недостаткам следует отнести то обстоятельство, что аналитические вычисления требуют значительных машинных ресурсов. Но, с одной стороны, характеристики персональных компьютеров обновляются практически непрерывно, а, с другой стороны, совершенствуются и символьные алгоритмы. Следует особо подчеркнуть, что понятие ограниченности машинных ресурсов в широком смысле в настоящее время является весьма относительным.

Возможность проводить символьные расчеты в автоматическом режиме приводит к естественному расширению матричных методов в том смысле, что они перестают быть исключительно численными. Элементами матриц или, в более широком смысле, ранжированными переменными могут быть аналитические выражения. В зависимости от условий конкретной задачи можно управлять видом получаемого решения: от численного до самого общего. Понятно, что получение общего решения потребует наибольших машинных ресурсов, но и ценность такого решения велика.

[1)] Проведение аналитических расчетов карманными электронными устройствами становится таким же привычным, как операции с числами. В сомнительных ситуациях имеется возможность получить отчет о проделанных символьных вычислениях.

Интерес вызывают несколько общих направлений: возможность решения задач оптимизации, трехмерное моделирование и степень усложнения дифференциального уравнения для функции перемещений.

Рассмотренный выше пример расчета плоско-пространственной рамы указывает на возможность получения приближенных решений задач теории упругости, в частности задач изгиба пластин. При определенных ограничениях на жесткость стержневой системы решение, полученное для рамы, должно переходить в точное решение задачи об изгибе пластины [5]. Таким способом могут быть оперативно получены приближенные решения множества важных частных задач.

Весьма перспективным может оказаться указанный подход для моделирования композиционных материалов, наполнитель которых состоит из системы упругих волокон. Варьированием жесткости волокон в разных направлениях можно учесть анизотропию свойств и особенности структуры. И наоборот, зная характер эксплуатационной нагрузки, можно получить решения в виде зависимостей геометрических параметров и механических характеристик по длине стержня. Такой путь противоположен ставшему традиционным методу осреднения механических характеристик сплошной среды и рассматривает композиционный материал как конструкцию, состоящую из упругих элементов с различными свойствами в условиях стесненного деформирования.

Изменением жесткости отдельных стержней-связей можно моделировать и несовершенство микроструктуры (скопления дислокаций, химическая неоднородность и т. д.) в телах, приближаемых пространственными стержневыми системами. Это может принести пользу в вопросах теории разрушения. Понятно, что такие задачи могут быть решены только с помощью суперЭВМ.

Весьма заманчивой представляется постановка следующей задачи. Предположим имеется исчерпывающий набор сведений о поведении некоторой идеальной связи, например молекула – молекула. Вообще говоря, речь идет о некотором минимальном структурном образовании, являющемся фундаментальным носителем свойств данного материала. С другой стороны, имеются некоторые сведения о степени дефектности в материале. Имеются также результаты экспериментальных исследований образцов, подвергнутых элементарным видам деформирования, например, растяжению.

Ставится следующая задача: построить и исследовать виртуальную структуру, моделирующую деформирование континуума под нагрузкой. Проще говоря, для получения исчерпывающей механической характеристики материала необходимо поставить виртуальный эксперимент и получить данные о тех видах деформирования, которые сегодня технически недоступны (всестороннее растяжение-сжатие, к примеру). Тем самым дополнить виртуально полученными сведениями обобщения Мора относительно критериев разрушения. Понятно, что здесь встретится ряд важных проблем из трех областей:

1 Физика твердого тела.

2 Механика деформируемого твердого тела.

3 Формализация вычислений. Компьютерная математика.

Например, принцип суперпозиции для таких нелинейных структур применять нельзя. Это сильно усложняет решение задачи. И все же постановка такой задачи сегодня кажется не такой уж фантастической, как это могло бы показаться ранее.

Очевидно, предлагаемая методика найдет отражение в задачах динамики и устойчивости стержневых систем. Имеются также перспективы в автоматическом учете геометрической и физической нелинейности.

Возможные классы задач по понятным причинам не исчерпываются проблемами механики сплошной среды.

Список литературы

1 *Navier L. M. H.*, Résumé des lecons données à l'école des ponts et chausses sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Paris, Chez Carilian-Goeury, 3me ed. avec des notes et appendices par M. Barré Saint-Venant: Paris, Dunod, 1864.

2 *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. – СПб.: Издательство "Лань", 2002. – 672 с.

3 *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

4 *Аладьев В. З., Богдявичус М. А.* Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 824 с.

Получено 10.12.2004

S. A. Orlov The new method of calculation in mechanics of framed structures.

The new universal method of research based on integration of a plenty of the differential equations for functions of movings in rod systems is offered. The opportunity of formalization of corresponding analytical calculations in language Maple is shown on an example. Appendices and prospects of development of the approach uniting matrix (numerical) and analytical methods are discussed.