

МЕХАНИКА

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО, младший научный сотрудник; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК СИНУСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Исследованы осесимметричные вынужденные колебания упругой круговой трехслойной пластины под действием синусоидальных поверхностных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Получены аналитические решения задач при динамическом и импульсном воздействиях. Проведен численный анализ решений. Результаты сопоставлены с соответствующими случаями поверхностной прямоугольной нагрузки.

Все более широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях промышленности (авиа-, ракетостроение) и на транспорте находят слоистые элементы конструкций. Трехслойные пластины относятся к классу особо распространенных в народном хозяйстве деталей и элементов конструкций. Это объясняется рядом их положительных качеств: высокой удельной жесткостью, хорошими звукопоглощающими и теплоизоляционными свойствами, возможностью использования в качестве защиты от радиационного воздействия, высокими аэродинамическими качествами. Все это обуславливает необходимость предварительного проектного расчета, создание методик, позволяющих исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций при динамических воздействиях локальными нагрузками.

Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных пластин, в том числе и вязкоупруго-пластических, геометрия и движение которых описываются с помощью тех или иных гипотез, получены в работах [1–4].

Целью работы является получение аналитического решения задачи о колебаниях круговой трехслойной пластины под действием синусоидальных нагрузок различного типа.*

Пусть на трехслойную круговую пластину действует внешняя осесимметричная нагрузка q (рисунок 1). Цилиндрическая система координат r, φ ,

z связана со срединной поверхностью заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев. Заполнитель считаем легким, т.е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , т.е. $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , силовые характеристики – к 1 Па; через h_k и ρ_k обозначены толщина и плотность материала k -го слоя.

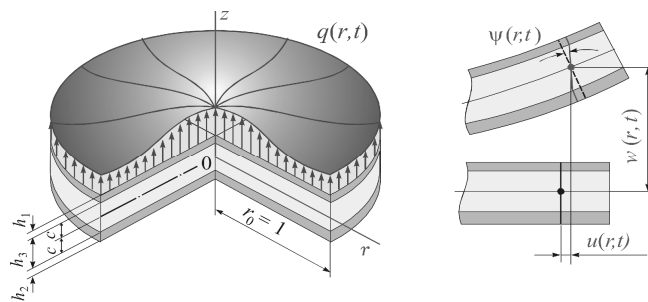


Рисунок 1

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона [3]:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РБ.

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0; \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = -q, \quad (1)$$

где $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$; h_1, h_2, h_3 – толщины несущих слоев и заполнителя; ρ_i – плотность материалов; a_i – коэффициенты; L_2, L_3 – дифференциальные операторы;

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+);$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k;$$

$$a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+;$$

$$a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right);$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+;$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \quad c = \frac{h_3}{2};$$

G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации материала; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, две точки вверху – вторая производная по времени t .

Задача нахождения функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к формуле (1) граничных и начальных условий.

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластины, следует из (1) при $q = 0$. В [3] приведено ее решение и построена система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$:

$$v_n(\beta_n, r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (2)$$

где J_n, I_n – функции Бесселя n -го порядка от действительного и комплексного аргументов; d_n – нормировочные коэффициенты для системы (2).

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \\ \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad (3)$$

где

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)) \right];$$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr; \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2};$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел β_n следуют из граничных условий. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования $u = \psi = w = w_{,r} = 0$. Удовлетворяя два последние из них с помощью представления (3), получим трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел $I_1(\beta) J_0(\beta) = -J_1(\beta) I_0(\beta)$. Первые 15 корней этого уравнения вычислены с точностью до 0,001 и сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Собственные числа для защемленной круговой трехслойной пластины

Номер n	Собственное число β_n	Номер n	Собственное число β_n
0	3,196	8	28,279
1	6,306	9	31,420
2	9,439	10	34,561
3	12,577	11	37,702
4	15,716	12	40,844
5	18,856	13	43,985
6	21,997	14	47,126
7	25,138		

После этого частоты колебаний ω_n получим из соотношения

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4},$$

$$M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}. \quad (4)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (3) и использования линейной связи функций v_n, φ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (5)$$

Задача исследования вынужденных колебаний, как правило, сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$ для каждого вида динамической нагрузки (стационарная, импульсная).

1 Предположим, что на всю поверхность рассматриваемой пластины действует динамическая поверхностная нагрузка, распределенная по полуwave синусоиды (рисунок 2):

$$q(r, t) = q_0(t) \sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - r^2) \right]. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулу (3), получим следующее интегральное выражение для параметров разложения нагрузки $q(r, t)$ в ряд по системе собственных ортонормированных функций v_n :

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n} \int_0^1 \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-r^2)\right] \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right] r dr.$$

После взятия определенных интегралов, содержащих произведения тригонометрических и бесселевых функций, имеем

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{\pi M_0 d_n} \left[U_2(\pi, \beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} U_2(\pi, i\beta_n) \right]. \quad (7)$$

Здесь $U_n(x, y)$ – функция Ломмеля двух переменных, действительная и при комплексных значениях аргументов.

Функция $T_n(t)$, как решение уравнения (5), может быть принята в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Теперь перемещения u, ψ, w в задаче о вынужденных колебаниях пластины определяются соотношениями (3). При стационарной внешней динамической нагрузке $q_0 = \text{const}$ функция (8)

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{\pi M_0 d_n \omega_n^2} \left[U_2(\pi, \beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} U_2(\pi, i\beta_n) \right]. \quad (9)$$

Заметим, если внешняя распределенная нагрузка прямоугольной формы, т. е. $q(r, t) = q_0 = \text{const}$, то

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n) \right),$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n) \right). \quad (10)$$

Численный счет здесь и далее проводился для защемленной по контуру круговой трехслойной пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле (4) с использованием собственных чисел из приведенной таблицы 1. Параметры слоев принимались $h_1 = h_2 = 0,01$, $c = 0,05$. Начальные условия движения предполагались нулевыми $w(r, 0) \equiv \dot{w}(r, 0) \equiv 0$, что в данном случае позволяет применять в (9) и (10) константы интегрирования $A_n = B_n = 0$.

Рисунок 3 показывает изменение прогибов (в процентах по отношению к радиусу) во времени

при воздействии на всю внешнюю поверхность пластины распределенной нагрузки синусоидальной (кривые 1, 3) и прямоугольной форм (кривая 2).

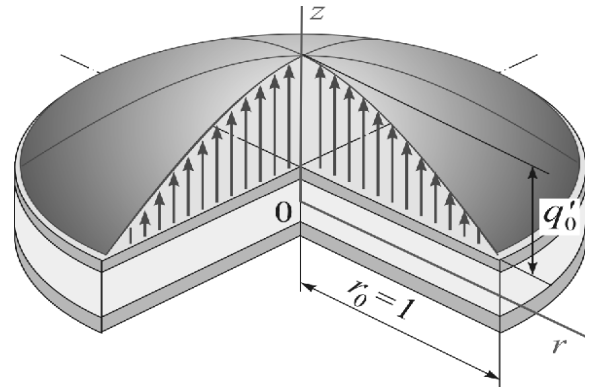


Рисунок 2

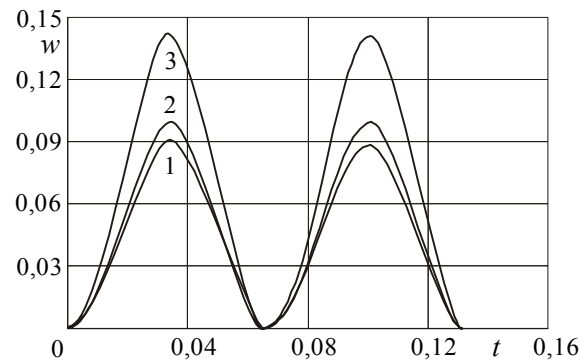


Рисунок 3

Сравнение прогибов 1 и 2, вычисленных при одинаковой максимальной интенсивности (7), показывает, что прямоугольная форма нагрузки вызывает больший прогиб.

Теперь примем одинаковую мощность для синусоидальной и прямоугольной нагрузок. Для этого потребуем равенство интегралов по объему, занимаемому соответствующей нагрузкой в фиксированный момент времени. Это приведет к увеличению максимальной интенсивности синусоидальной нагрузки до величины

$$q_0' = q_0 \int_V dV / \int_V \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-r^2)\right] dV = \frac{1}{2} \pi q_0. \quad (11)$$

В результате получим прогиб 3, который превосходит по максимуму прогиб от прямоугольной нагрузки 2 на величину порядка 40%. Таким образом, с точки зрения прочности, при одинаковой мощности (11) стационарная динамическая синусоидальная нагрузка более опасна, чем прямоугольная, так как вызывает в пластине большие перемещения, а следовательно, и напряжения.

2 Если внешняя синусоидальная нагрузка приложена импульсно, то, добавляя в (6) функцию Дирака $\delta(t)$, получим

$$q(r, t) = q_1 \delta(t) \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-r^2)\right], \quad q_1 = \text{const}. \quad (12)$$

Параметры разложения нагрузки (12) в ряд по системе собственных ортонормированных функций

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{\pi M_0 d_n} \left[U_2(\pi, \beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} U_2(\pi, i\beta_n) \right]. \quad (13)$$

Функция времени принимает вид

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_1 \sin(\omega_n t)}{\pi M_0 d_n \omega_n} \left[U_2(\pi, \beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} U_2(\pi, i\beta_n) \right]. \quad (14)$$

Для импульсной нагрузки прямоугольной формы $q(r, t) = q_1 \delta(t)$ функции (13) и (14)

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n) \right).$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_1 \sin(\omega_n t)}{M_0 d_n \beta_n \omega_n} \left(J_1(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n) \right). \quad (15)$$

На рисунке 4 показано изменение во времени прогиба в центре круговой трехслойной пластины при импульсной поверхностной нагрузке прямоугольной формы (1) с интенсивностью $q_1 = 700$ и синусоидальной эквивалентной ей по мощности нагрузке (2) с интенсивностью $q_1' = \frac{1}{2} \pi q_1$. В силу нулевых начальных условий константы интегрирования в функциях (14) и (15) $A_n = B_n = 0$. Во втором случае прогиб больше по величине, что подтверждает большую опасность синусоидального

Получено 29.09.2004

D. V. Leonenko. Fluctuations of circular sandwich plate by sine-shaped shallow loads.

Explored axisymmetric compelled fluctuations springy circular sandwich plate under the action of sine-shaped shallow loads. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypotheses broken normal. Filler – light. Received analytical deciding the problems under striking and pulsed influences. Conducted numerical analysis decisions. Results are compared with corresponding events of shallow load right angle form.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2004. № 2(9)

УДК 539.3

С. А. ОРЛОВ, кандидат физико-математических наук; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА В МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Предлагается новый универсальный метод исследования, основанный на интегрировании большого количества дифференциальных уравнений для функций перемещений в стержневых системах. Показана на примерах возможность формализации соответствующих аналитических вычислений на языке Maple. Обсуждаются приложения и перспективы развития подхода, объединяющего матричные (численные) и аналитические методы.

импульса по сравнению с прямоугольным при их одинаковой мощности.

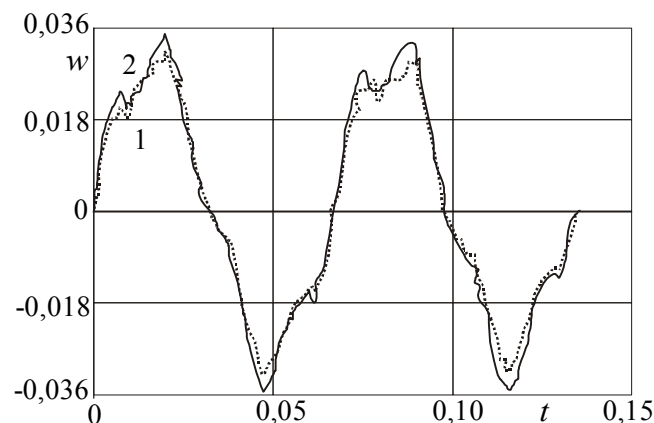


Рисунок 4

Динамическая поверхностная синусоидальная нагрузка является, с точки зрения прочности элементов конструкций, более опасной, чем нагрузка прямоугольной формы, так как вызывает при одинаковой мощности большие прогибы.

Список литературы

- 1 Леоненко Д. В. Локальные динамические нагружения круговых трехслойных пластин // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2002. – Т. 7, № 4. – С. 8–13.
- 2 Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебание круговых трехслойных пластин под действием резонансных нагрузок // *Прикладная механика*. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 114–120.
- 3 Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 4 Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.