АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

УДК 681.5

В. В. КИКИНЕВ, заместитель директора ОДО «Пневмоэлектросервис», г. Гомель

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТОГО КОНТУРА ПРИ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрены основные аспекты применения метода формирования передаточной функции разомкнутого контура для синтеза регуляторов систем автоматического управления, обеспечивающих наилучшее приближение передаточной функции синтезируемой замкнутой системы к заданной модели. Также рассмотрены особенности специализированной функции ***loopsyn*** пакета *Robust Control Toolbox* программной среды *MatLab*, включая алгоритм автоматизированного синтеза, синтаксис и ограничения при задании целевой модели. В качестве примера произведен синтез регулятора для системы регулирования тормозного момента, включающей электромагнитный тормоз в качестве объекта управления и датчик усилия. Полученный в результате синтеза регулятор обеспечивает необходимые стабильность и качество регулирования в замкнутой системе при минимальной сложности его реализации. Редуцированная модель регулятора имеет вид передаточной функции четвертого порядка.

При разработке САР достаточно часто требуется произвести синтез регулятора, обеспечивающего наилучшее приближение передаточной функции синтезируемой замкнутой системы к заданной модели. Рассмотрим замкнутую систему с неединичной обратной связью, структура которой соответствует приведенной на рисунке 1.

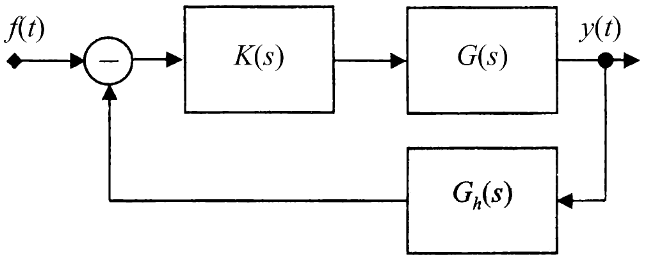

Рисунок 1 – Структурная схема замкнутой системы: $f(t)$ – функция времени, представляющая задающее воздействие; $y(t)$ – функция времени, представляющая выходную переменную; $K(s)$ – передаточная функция регулятора; $G(s)$ – передаточная функция объекта управления; $G_h(s)$ – передаточная функция цепи обратной связи.

Для передаточной функции $K(s)$ регулятора, который обеспечивает требуемый вид передаточной функции $T_d(s)$ рассматриваемой замкнутой системы (см. рисунок 1), можно записать [1, с. 146]:

$$K(s) = \frac{T_d(s)}{G(s)[1 - T_d(s)G_h(s)]}. \qquad (1)$$

Очевидно, регулятор, полученный в соответствии с (1), в общем случае не гарантирует синтезируемой замкнутой системе необходимых устойчивости и робастности, что не позволяет применять данный простейший подход на практике.

Наиболее целесообразным в подобных случаях представляется автоматизированный синтез регулятора в программной среде *MatLab*.

Преобразуем (1) к виду

$$G_{dol}(s) = \frac{T_d(s)G_h(s)}{1 - T_d(s)G_h(s)}, \qquad (2)$$

где $G_{dol}(s)$ – целевая передаточная функция разомкнутого контура рассматриваемой замкнутой системы (см. рисунок 1),

$$G_{dol}(s) = K(s)G(s)G_h(s). \qquad (3)$$

Очевидно, регулятор, формирующий передаточную функцию $G_{dol}(s)$ разомкнутого контура в соответствии с (2), одновременно обеспечивает требуемый вид передаточной функции $T_d(s)$ замкнутой системы; данное обстоятельство лежит в основе рассматриваемой методики.

Процедура формирования целевой передаточной функции разомкнутого контура в англоязычной специальной литературе носит название “loop-shaping”. Для реализации данной процедуры программная среда *MatLab* обладает целым набором специализированных функций (пакет *Robust Control Toolbox*), наиболее эффективной и простой из которых является ***loopsyn*** [2, с. 1.10].

Специализированная функция *loopsyn*. Применение этой функции позволяет произвести автоматизированный синтез стабилизирующего регулятора, обеспечивающего наилучшее приближение передаточной функции $G_{ol}(s)$ разомкнутого контура синтезируемой замкнутой системы к требуемой передаточной функции $G_{dol}(s)$ [2, с. 10.172–10.177]. Указанный синтез в общем случае (для многосвязной системы) включает следующие основные процедуры:

– расчет последовательного корректирующего устройства с матричной амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) $W(j\omega)$, такой, что для любой частоты ω_i из диапазона частот, существенных для достижения целей синтеза, выполняется с достаточной точностью равенство

$$\sigma\{W(j\omega_i)G(j\omega_i)G_h(j\omega_i)\}=\sigma\{G_{dol}(j\omega_i)\}, \quad (4)$$

где $\sigma\{W(j\omega_i)G(j\omega_i)G_n(j\omega_i)\}$ – сингулярное число матрицы, представляющей собой произведение матричных АФЧХ указанного последовательного корректирующего устройства, объекта управления и цепи обратной связи синтезируемой замкнутой системы на частоте ω_i; $\sigma\{G_{dol}(j\omega_i)\}$ – сингулярное число целевой матричной АФЧХ на частоте ω_i.

При выполнении данной процедуры используется алгоритм *Ли-Сафонова* [3];

– расчет регулятора с матричной передаточной функцией $K_s(s)$, такой, что одновременно оптимальным образом выполняются следующие условия:

1) справедливы неравенства:

$$\underline{\sigma}\{W(j\omega_i)G(j\omega_i)G_h(j\omega_i)\}\geq$$
$$\geq\frac{1}{\gamma}\overline{\sigma}\{G_{dol}(j\omega_i)\}, \quad \omega<\omega_0; \quad (5)$$

$$\overline{\sigma}\{W(j\omega_i)G(j\omega_i)G_h(j\omega_i)\}\geq$$
$$\geq\frac{1}{\gamma}\underline{\sigma}\{G_{dol}(j\omega_i)\}, \quad \omega>\omega_0, \quad (6)$$

где $\underline{\sigma}\{W(j\omega)G(j\omega)G_h(j\omega)\}$, $\overline{\sigma}\{W(j\omega)G(j\omega)G_h(j\omega)\}$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы, представляющей собой произведение матричных АФЧХ указанного последовательного корректирующего устройства, объекта управления и цепи обратной связи синтезируемой замкнутой системы, в указанном диапазоне частот; $\overline{\sigma}\{G_{dol}(j\omega)\}$, $\underline{\sigma}\{G_{dol}(j\omega)\}$ – соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа целевой матричной АФЧХ в указанном диапазоне частот; γ – постоянный коэффициент, представляющий погрешность приближения матричной АФЧХ $W(j\omega)G(j\omega)G_h(j\omega)$ разомкнутого контура к целевой матричной АФЧХ $G_{dol}(j\omega)$; ω_0 – частота среза, соответствующая целевой матричной АФЧХ $G_{dol}(j\omega)$;

2) обеспечиваются необходимые запасы устойчивости замкнутой системы с матричной передаточной функцией разомкнутого контура $W(s)G(s)G_h(s)K_s(s)$.

При выполнении данной процедуры используется алгоритм *Гловера-Макфэрлейна* [4, 5];

– расчет искомой матричной передаточной функции $K(s)$ регулятора для синтезируемой замкнутой системы:

$$K(s)=W(s)K_s(s). \quad (7)$$

При синтезе регулятора для одномерной замкнутой системы входными аргументами специализированной функции ***loopsyn*** являются:

G – модель обобщенного объекта управления – линейная и стационарная, в виде передаточной функции *G(s).* Под обобщенным объектом управления здесь понимается разомкнутый контур без регулятора;

G_d – модель разомкнутого контура синтезируемой замкнутой системы – целевая, линейная и стационарная, в виде передаточной функции $G_{dol}(s)$;

RANGE – диапазон частот, существенных для достижения целей синтеза, в виде вектора (ω_{min}; ω_{max}), где $\omega_{max} > 10\omega_{min}$. Задание данного аргумента является необязательным; по умолчанию указанный диапазон частот составляет $[0; \infty[$.

Результаты автоматизированного синтеза включают:

K – модель регулятора – линейная и стационарная, в виде передаточной функции $K(s)$;

CL – модель синтезируемой замкнутой системы, линейная и стационарная, в виде передаточной функции $CL(s)$; при этом выполняется равенство

$$CL(s)=\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}; \quad (8)$$

GAM – показатель, представляющий погрешность приближения модели разомкнутого контура синтезируемой замкнутой системы, включающей регулятор с моделью *K,* к целевой модели G_d; при этом при полном совпадении указанных моделей выполняется равенство *GAM* = 1;

INFO – массив данных, представляющих дополнительную информацию о промежуточных результатах синтеза.

Формат ("синтаксис") специализированной функции ***loopsyn*** имеет вид

[K, CL, GAM, INFO] = loopsyn (G, Gd)
[K, CL, GAM, INFO] = loopsyn (G, Gd, RANGE).

Необходимо отметить, что целевая передаточная функция разомкнутого контура $G_{dol}(s)$ не может быть задана абсолютно произвольно. Основные требования, которым она должна удовлетворять, таковы [2, с. 2.16]:

– для обеспечения робастной устойчивости синтезируемой замкнутой системы модуль АФЧХ, соответствующей передаточной функции $G_{dol}(s)$, должен быть мал на частотах, где модель обобщенного объекта управления *G* неточна или не определена;

– модуль АФЧХ, соответствующей передаточной функции $G_{dol}(s)$, должен иметь достаточную величину на частотах, существенных для обеспечения качества регулирования;

– частота среза замкнутой системы ω_c должна находиться между двумя указанными частотными областями. АЧХ, соответствующая передаточной функции $G_{dol}(s)$, на частоте ω_c должна иметь наклон от –20 до –40 дБ / дек.

Пример: синтез замкнутой системы регулирования тормозного момента. Произведем синтез стабилизирующего регулятора для замкнутой системы регулирования тормозного момента. Объектом управления в рассматриваемом случае является электромагнитный тормоз, представляющий собой индукционную муфту явнополюсного типа с наружным массивным якорем [6, с. 146–150], датчиком – датчик момента.

Пусть для синтезируемой замкнутой системы определены:

– модель объекта управления в виде передаточной функции $G_p(s)$ [7]:

$$G_p(s) = K_p \frac{14{,}2}{s + 14{,}2}, \tag{9}$$

где K_p = 10,6 Н·м / В;

– передаточная функция $G_h(s)$ цепи обратной связи, которая включает датчик момента и усилитель:

$$G_h(s) = K_{fb} \frac{26244}{s^2 + 10{,}4s + 26244}, \tag{10}$$

где $K_{fb} = 31311{,}55 \cdot 10^{-6}$ В / Н·м.

Пусть также в результате анализа требований технического задания определена целевая модель замкнутой системы в виде передаточной функции $T_d(s)$:

$$T_d(s) = K_{Td} \frac{4}{s + 4}, \tag{11}$$

где K_{Td} = 31,83 Н·м / В.

Очевидно, в данном случае обобщенный объект управления включает электромагнитный тормоз и цепь обратной связи.

Программа расчета регулятора имеет вид [8, с. 11.224–11.230; 2, с. 10.172–10.177]:

```
Gp = tf([150.52], [1 14.2]); Gh = tf([821.7404412],
[1 10.4 26244]); Td = tf([127.324], [1 4]); Gdol =
= Td*Gh/(l–Td*Gh);
[Kpre, CL, GAM, INFO] = loopsyn(Gp*Gh, Gdol);
GAM = 1.4174
INFO = W: [1x1 ss]
    Gs: [1x1 ss]
    Ks: [1x1 ss]
    range: {[0.0013] [8192]}
```

Получен стабилизирующий регулятор с передаточной функцией $K_{pre}(s)$, обеспечивающий согласование АЧХ, соответствующих передаточным функциям $G_{ol}(s)$ и $G_{dol}(s)$, с погрешностью не более ±3,03 дБ (т. е. 201g(l,4174)) в диапазоне частот от 0,0013 до 8192 рад/с.

Представление передаточной функции $K_{pre}(s)$ в виде отношения двух полиномов от s позволяет определить порядок полученной модели регулятора, равный 17.

Необходимо отметить, что высокий порядок получаемых моделей характерен для синтеза регуляторов посредством решения оптимизационных задач в пространствах *Харди* H_∞ и H_2, а также при μ-синтезе [2, с. 1.14]. Данное обстоятельство затрудняет, конечно, физическую реализацию соответствующего результата, но не делает ее невозможной в силу эффективности и доступности в настоящее время процедур автоматизированной редукции моделей (см., например, [9]).

Определим вначале, до какой степени полученная модель регулятора может быть упрощена. Воспользуемся для этого процедурой *NCF* (“normalized coprime factor *Hankel* singular values” [10]), которая в общем случае заключается в аппроксимации матрицы, представляющей модель исследуемой системы, линейной и стационарной, матрицей более низкого ранга. Соответствующая программа *MatLab* [2, с. 10.107–10.109, 10.209–10.212; 11, с. 2.1098–2.1099; 12, с. 2.1684–2.1689] имеет вид

```
hankelsv(Kpre, 'ncf', 'log');
v = axis; hold on;
plot(v(l:2), ncfmargin(Gp*Gh, Kpre)*[1 1], ’--’);
hold off
```

Результаты расчета в виде графика приведены на рисунке 2.

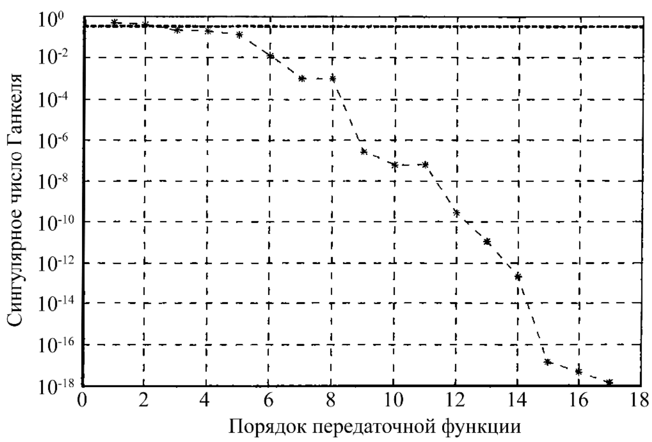

Рисунок 2 – График сингулярных чисел *Ганкеля* для передаточной функции регулятора $K_{pre}(s)$

Из графика (см. рисунок 2) можно определить, что порядки передаточной функции регулятора $K_{pre}(s)$ выше второго для обеспечения устойчивости синтезируемой замкнутой системы являются несущественными. В том случае, если модель объекта управления имеет неопределенности (что является, скорее, правилом при разработке реальных систем), для регулятора представляется целесообразным выбрать порядок, на одну или две единицы превышающий минимально допустимый.

Произведем аппроксимацию передаточной функции регулятора $K_{pre}(s)$ передаточной функцией четвертого порядка $K_{pre}^{[4]}(s)$. Соответствующая программа *MatLab* [2, с. 10.245–10.248] имеет вид

Kpre4 = reduce(Kpre, 4);

Простейший анализ показывает, что регулятор с редуцированной моделью $K_{pre}^{[4]}(s)$ обеспечивает синтезируемой замкнутой системе запас устойчивости по модулю 11,7 дБ и по фазе 94,4 град. При этом, как можно заключить из рисунка 3, степень приближения передаточной функции замкнутой системы к целевой передаточной функции $T_d(s)$ достаточно высока.

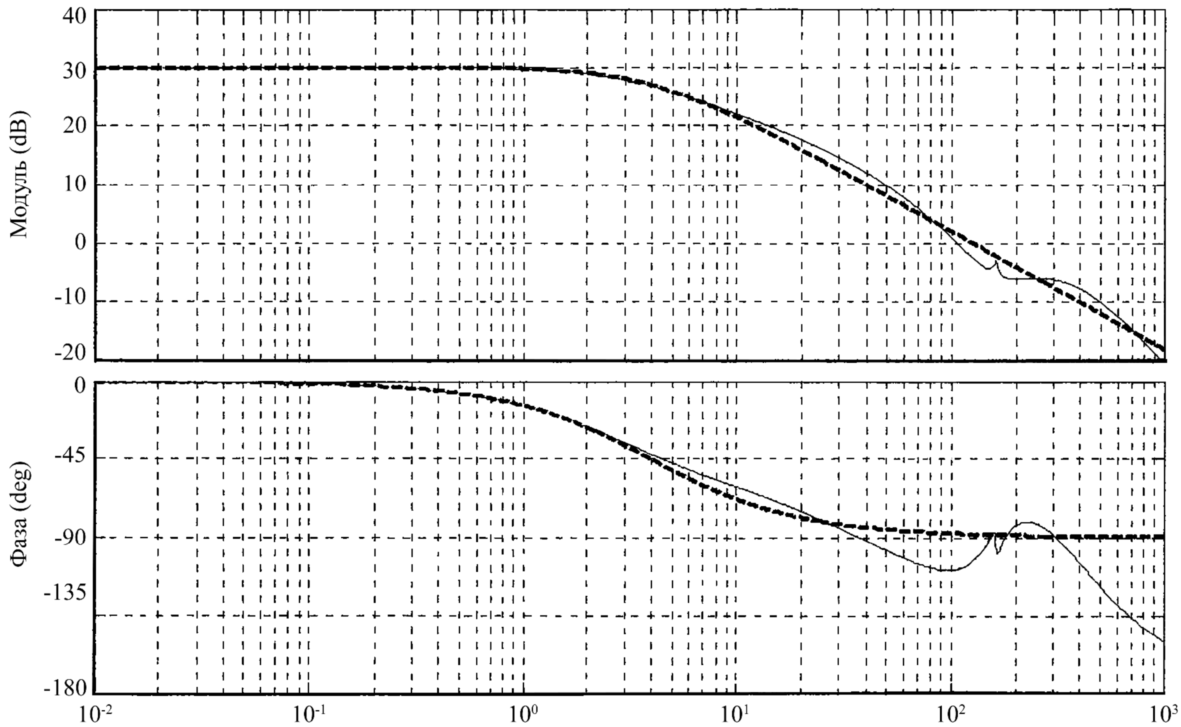

Рисунок 3 – Диаграммы *Боде* синтезируемой замкнутой системы (сплошная линия) и соответствующая целевой передаточной функции замкнутой системы $T_d(s)$ (11) (пунктирная линия)

Следовательно, регулятор с редуцированной моделью $K_{pre}^{[4]}(s)$ является вполне приемлемым решением; он обеспечивает необходимые стабильность и качество регулирования в замкнутой системе при минимальной сложности реализации. Отметим, что передаточная функция $K_{pre}^{[4]}(s)$ имеет вид

$$K_{pre}^{[4]}(s) = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \qquad (12)$$

где $a_3 = 700{,}2$; $a_2 = 1{,}0 \cdot 10^5$; $a_1 = 2{,}0 \cdot 10^7$; $a_0 = 1{,}9 \cdot 10^8$; $b_3 = 669{,}3$; $b_2 = 1{,}9 \cdot 10^5$; $b_1 = 1{,}6 \cdot 10^7$; $b_0 = 2{,}1 \cdot 10^5$.

Таким образом, материалы настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы:

– специализированная функция ***loopsyn*** пакета *Robust Control Toolbox* программной среды *MatLab* является достаточно простым и эффективным средством синтеза стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих наилучшее приближение передаточной функции синтезируемой замкнутой системы к заданной модели;

– основной недостаток, имеющий место при использовании указанной специализированной функции, состоит в высоком порядке получаемых моделей регуляторов, что делает необходимым применение соответствующих процедур редукции.

Список литературы

1 **Филлипс, Ч.** Системы управления с обратной связью : пер. с англ. / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.

2 Robust control toolbox user's guide / G. Balas [and others]. – Ver. 3. – The Math Works, Inc., 2005. – 639 p.

3 **Le, V. X.** Rational matrix GCD's and the design of squaring-down compensators – a state space theory / V. X. Le, M. G. Safonov // IEEE Trans. Autom. Control. – 1992. – vol. 36(3). – P. 384–392.

4 **McFarlane, D. C.** A loop shaping design procedure using synthesis / D. C. McFarlane, K. Glover // IEEE Trans. Autom. Control. – 1992. – Vol. 37(6). – P. 759–769.

5 **Glover, K.** Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H∞-bounded uncertainty / K. Glover, D. McFarlane // IEEE Trans. Autom. Control. – 1992. – Vol. 34(8). – P. 821–830.

6 **Щетинин, Т. А.** Электропривод с индукционными муфтами и тормозами / Т. А. Щетинин. – М. : Машиностроение, 1970. – 320 с.

7 **Забеньков, И. И.** Исследование передаточной функции нагрузочного устройства велоэргометра с электромагнитной системой торможения / И. И. Забеньков, В. В. Кикинев, Д. А. Еньков // Доклады БГУИР. – 2003. – № 3(1). – С. 5–11.

8 Control system toolbox user's guide. – Ver. 4.2. – The Math Works, Inc., 1999. – 647 p.

9 **Antoulas, A. C.** Approximation of large-scale dynamical systems: an overview / A. C. Antoulas, D. C. Sorensen // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2001. – Vol. 11(5). – P. 1093–1121.

10 **Glover, K.** All optimal Hankel norm approximation of linear multivariable systems, and their L_∞-error bounds / K. Glover // Int. J. Control. – 1984. – Vol. 39(6). – P. 1115–1193.

11 MatLab function reference volume 2: F–O. – Ver. 7. – The Math Works, Inc., 2004. – 936 p.

12 MatLab function reference volume 3: P–Z. – Ver. 7. – The Math Works, Inc., 2004. – 1039 p.

Получено 05.06.2007

V. V. Kickinyov. Application of loop shaping technique to PC-based stabilizing feedback controller synthesis.

The basic principles of application of loop shaping technique to the synthesis of stabilizing feedback controllers that optimally approximate the closed-loop transfer function to the target model are considered. The *MatLab Robust Control Toolbox* ***loopsyn*** command basics including the synthesis algorithm, syntax and target model assignment limitations are considered as well. A controller synthesis for the automatic torque control system including an eddy current brake and torque sensor is used as an example. The necessary closed-loop stability and control performance are achieved through the controller synthesized with minimal complexity. The reduced-order transfer function model of the controller has the fourth order.