

6 Соколов, М. М. Зарубежные вагоны. Особенности конструкции, теории и расчета / М. М. Соколов, Ю. П. Борошенко, А. А. Эстлинг. – Л., 1988. – 60 с.

7 Устройство для крепления штабеля труб на транспортном средстве : а. с. 1638043 СССР, МКИ В 60 Р 7/12 / В. И. Тарлыков [и др.]. – № 4419163 ; заявл. 03.05.88 ; опубл. 30.03.91, Бюл. № 12. – 7 с.

Получено 10.10.2007

I. A. Vorojun. Estimation of dynamic forces in elements of fastening of pipes on a railway platform.

In paper the circuit design of fastening of four pipes of the big diameter on the flat-car with use of wire ropes and the tensioning devices surveyed, allowing to create prestressing ropes of a cross binding and fastening of intermediate support. The method of mathematical modelling investigates agency of prestressing of ropes of fastening of pipes to the flat-car on magnitude of dynamic forces during a collision of carriages. Agency of prestressing of ropes of a cross binding and fastening of intermediate support on magnitude of dynamic affectings as on a platform and carriages is established during their collision. The executed calculations show, that the increase in prestressing of ropes of a cross binding and fastening of intermediate support is accompanied by decrease of dynamic forces in ropes of longitudinal fastening pipes to a platform.

8 Шилович, А. В. Динамические воздействия на крепление труб к железнодорожной платформе / А. В. Шилович, А. В. Сементовский, И. А. Ворожун // *Материалы, технологии, инструменты.* – 2002. – Т. 7. – № 1. – С. 25–28.

9 Вершинский, С. В. Динамика вагонов / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов ; под ред. С. В. Вершинского. – М. : Транспорт, 1991. – 360 с.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2008. № 1 (16)

УДК 539.3

Е. П. ДОРОВСКАЯ, аспирант, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАНСПОРТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Рассмотрен изгиб упругой прямоугольной трехслойной пластины с жестким наполнителем, покоящейся на упругом основании, как элемента транспортной конструкции. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Реакция основания описывается моделью Винклера. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Для получения дифференциальной системы уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа. Аналитическое решение выписано в определителях. Его численная апробация проведена с помощью обратной матрицы. Проведен числовой параметрический анализ напряженного состояния материалов слоев в зависимости от жесткости упругого основания.

Композитные, в том числе слоистые, элементы конструкций широко используются в транспортном машиностроении: в качестве обшивки вагонов, корпусных элементов авиационных аппаратов, космических объектов, строительных панелей и т. д. Трехслойные пластины в условиях деформации изгиба оказываются наиболее рациональными с точки зрения прочности и жесткости. В работах [1–4] исследованы трехслойные элементы конструкций, не связанные с упругим основанием. В статье [5] исследованы перемещения в трехслойной прямоугольной пластине, связанной с упругим основанием. Здесь приводится математическая постановка задачи по определению напряженного состояния подобной пластины, ее аналитическое решение и численный параметрический анализ зависимости напряжений на поверхностях слоев от жесткости упругого основания.

Несимметричная по толщине упругая трех-

слойная прямоугольная пластина с жестким наполнителем покоится на упругом основании. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедлива гипотеза Кирхгофа, в несжимаемом по толщине наполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатными осями величины $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$. Деформации считаем малыми. Реакция основания q_r соответствует модели Винклера

$$q_r = -kw, \quad (1)$$

где k – коэффициент жесткости основания; w – прогиб пластины; знак минус указывает на то, что реакция направлена в сторону, противоположную прогибу.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. На пластину действуют внешние распределенные поверхностные нагрузки $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$ и реакция ос-

нования (рисунок 1 а, б). Через $w(x, y)$ и $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ обозначены прогиб и осевые продольные перемещения срединной поверхности заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие

жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В дальнейшем все перемещения и геометрические параметры пластины считаем отнесенными к ее длине a вдоль оси x .

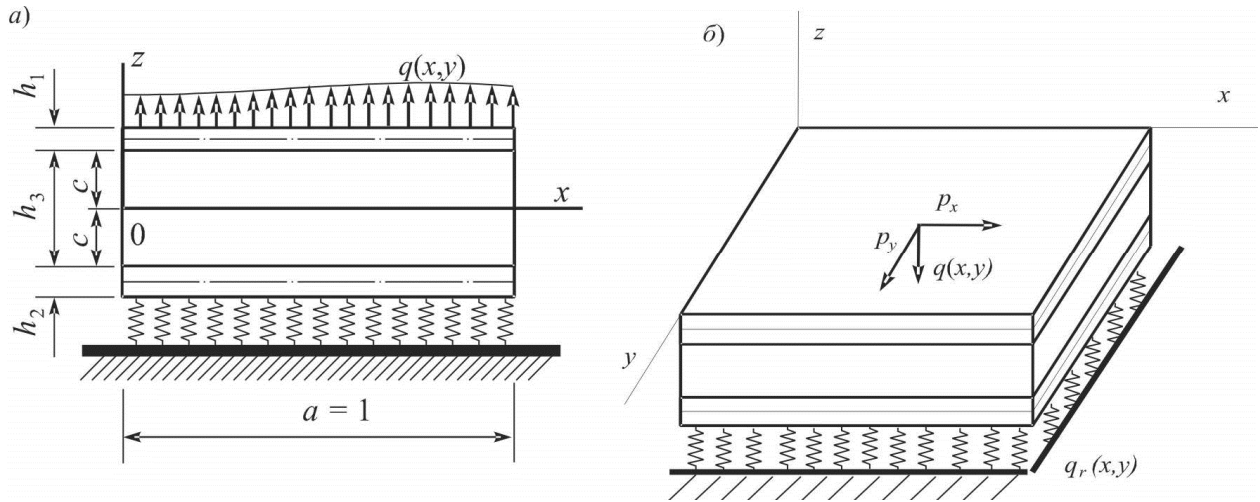


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной пластины на упругом основании

Обозначим через h_k толщину k -го слоя, при этом $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$). Используя введенные геометрические гипотезы, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ можно выразить через искомые пять функций u_x, u_y, Ψ_x, Ψ_y и w :

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\Psi_x - zw_{,x}, \\ u_y^{(1)} &= u_y + c\Psi_y - zw_{,y} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_x^{(3)} &= u_x + z\Psi_x - zw_{,x}, \\ u_y^{(3)} &= u_y + z\Psi_y - zw_{,y} \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\Psi_x - zw_{,x}, \\ u_y^{(2)} &= u_y - c\Psi_y - zw_{,y} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $u + c\Psi$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение будет $(u - c\Psi)$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций выражаются через пять искомых функций с помощью соотношений Коши и выражений (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(1)} &= u_{x,x} + c\Psi_{x,x} - zw_{,xx}, \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} &= u_{y,y} + c\Psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ \varepsilon_{xx}^{(3)} &= u_{x,x} + z\Psi_{x,x} - zw_{,xx}, \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} &= u_{y,y} + z\Psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (-c \leq z \leq c); \\ \varepsilon_{xx}^{(2)} &= u_{x,x} - c\Psi_{x,x} - zw_{,xx}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{yy}^{(2)} = u_{y,y} - c\Psi_{y,y} - zw_{,yy} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + c\Psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} + c\Psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x} + c\Psi_{x,y}) - zw_{,xy}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^{(3)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + z\Psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} + z\Psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x} + z\Psi_{x,y}) - zw_{,xy}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} - c\Psi_{x,y} - zw_{,xy} + u_{y,x} - c\Psi_{y,x} - zw_{,yx}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x} - c\Psi_{x,y}) - zw_{,xy}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xz}^{(1)} = \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{1}{2}\Psi_x;$$

$$\varepsilon_{yz}^{(1)} = \varepsilon_{yz}^{(2)} = 0; \quad \varepsilon_{yz}^{(3)} = \frac{1}{2}\Psi_y; \quad \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy}.$$

Введем внутренние усилия и моменты следующими соотношениями:

$$N_{xx}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad M_{xx}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{xx}^{(k)} z dz;$$

$$Q_{xz}^{(3)} = \int \sigma_{xz}^{(3)} dz; \quad N_{yy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{yy}^{(k)} dz;$$

$$M_{yy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{yy}^{(k)} z dz; \quad Q_{yz}^{(3)} = \int \sigma_{yz}^{(3)} dz;$$

$$M_{xy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{xy}^{(k)} z dz; \quad Q_{xy}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{xy}^{(k)} dz. \quad (4)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{yy}^{(k)}$, $\sigma_{yz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений в слоях пластины; интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A + \delta W = 0. \quad (5)$$

Здесь вариация работы внешних поверхностных сил

$$\delta A = \iint_S (p\delta u_x + p\delta u_y + (q + q_r)\delta w) dS. \quad (6)$$

Вариация работы внутренних напряжений учитывает работу заполнителя в тангенциальном направлении

$$\delta W = \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \epsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \delta \epsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)} \delta \epsilon_{xy}^{(k)}) dz \right\} + 2 \int_{h_3} (\sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)} \delta \epsilon_{yz}^{(3)}) dz \} dx dy. \quad (7)$$

Вариации перемещений в слоях

$$\begin{aligned} \delta u_x^{(1)} &= \delta u_x + c\delta\psi_x - z\delta w_{,x}, & \delta u_y^{(1)} &= \delta u_y + c\delta\psi_y - z\delta w_{,y} & (c \leq z \leq c + h_1); \\ \delta u_x^{(3)} &= \delta u_x + z\delta\psi_x - z\delta w_{,x}, & \delta u_y^{(3)} &= \delta u_y + z\delta\psi_y - z\delta w_{,y} & (-c \leq z \leq c); \\ \delta u_x^{(2)} &= \delta u_x - c\delta\psi_x - z\delta w_{,x}, & \delta u_y^{(2)} &= \delta u_y - c\delta\psi_y - z\delta w_{,y} & (-c - h_2 \leq z \leq -c). \end{aligned} \quad (8)$$

Вариации деформаций следуют из соотношений (3) с учетом (8).

Рассмотрим интегралы по толщине слоев,

входящие в выражение (7). Для первого слоя с учетом деформаций (3) и внутренних усилий (4)

получаем

$$\int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} dz = \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)} (\delta u_{x,x} + c\delta\psi_{x,x} - z\delta w_{,xx}) dz = N_{xx}^{(1)} \delta u_{x,x} + cN_{xx}^{(1)} \delta\psi_{x,x} - M_{xx}^{(1)} \delta w_{,xx}.$$

Аналогично для слоев 2 и 3

$$\int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)} \delta \epsilon_{xx}^{(2)} dz = N_{xx}^{(2)} \delta u_{x,x} - cN_{xx}^{(2)} \delta\psi_{x,x} - M_{xx}^{(2)} \delta w_{,xx}; \quad \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)} \delta \epsilon_{xx}^{(3)} dz = N_{xx}^{(3)} \delta u_{x,x} + M_{xx}^{(3)} \delta\psi_{x,x} - M_{xx}^{(3)} \delta w_{,xx};$$

$$\int_{h_1} \sigma_{yy}^{(1)} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} dz = \int_{h_1} \sigma_{yy}^{(1)} (\delta u_{y,y} + c\delta\psi_{y,y} - z\delta w_{,yy}) dz = N_{yy}^{(1)} \delta u_{y,y} + cN_{yy}^{(1)} \delta\psi_{y,y} - M_{yy}^{(1)} \delta w_{,yy};$$

$$\int_{h_2} \sigma_{yy}^{(2)} \delta \epsilon_{yy}^{(2)} dz = N_{yy}^{(2)} \delta u_{y,y} - cN_{yy}^{(2)} \delta\psi_{y,y} - M_{yy}^{(2)} \delta w_{,yy}; \quad \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)} \delta \epsilon_{yy}^{(3)} dz = N_{yy}^{(3)} \delta u_{y,y} + M_{yy}^{(3)} \delta\psi_{y,y} - M_{yy}^{(3)} \delta w_{,yy};$$

$$\begin{aligned} \int_{h_1} \sigma_{xy}^{(1)} \delta \epsilon_{xy}^{(1)} dz &= \int_{h_1} \sigma_{xy}^{(1)} \left(\frac{1}{2} (\delta u_{x,y} + \delta u_{y,x}) + c\delta\psi_{x,y} - z\delta w_{,xy} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} (Q_{xy}^{(1)} \delta u_{x,y} + Q_{xy}^{(1)} \delta u_{y,x}) + cQ_{xy}^{(1)} \delta\psi_{x,y} - M_{xy}^{(1)} \delta w_{,xy}; \end{aligned}$$

$$\int_{h_2} \sigma_{xy}^{(2)} \delta \epsilon_{xy}^{(2)} dz = \frac{1}{2} (Q_{xy}^{(2)} \delta u_{x,y} + Q_{xy}^{(2)} \delta u_{y,x}) - cQ_{xy}^{(2)} \delta\psi_{x,y} - M_{xy}^{(2)} \delta w_{,xy};$$

$$\int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)} \delta \epsilon_{xy}^{(3)} dz = \frac{1}{2} (Q_{xy}^{(3)} \delta u_{x,y} + Q_{xy}^{(3)} \delta u_{y,x}) + M_{xy}^{(3)} \delta\psi_{x,y} - M_{xy}^{(3)} \delta w_{,xy};$$

$$\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \left(\frac{1}{2} \delta\psi_x \right) dz = \frac{1}{2} Q_{xz}^{(3)} \delta\psi_x; \quad \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} \delta \epsilon_{yz}^{(3)} dz = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} \left(\frac{1}{2} \delta\psi_y \right) dz = \frac{1}{2} Q_{yz}^{(3)} \delta\psi_y. \quad (9)$$

Суммируя выражения для приведенных интегралов (9), подставляя их в (7) и приводя подоб-

ные, получим вариацию работ сил упругости в виде

$$\begin{aligned}
\delta W = \iint_S & \left[(N_{xx}^{(1)} + N_{xx}^{(2)} + N_{xx}^{(3)}) \delta u_{x,x} - (M_{xx}^{(1)} + M_{xx}^{(2)} + M_{xx}^{(3)}) \delta w_{,xx} + (M_{xx}^{(3)} + cN_{xx}^{(1)} - cN_{xx}^{(2)}) \delta \psi_{x,x} + \right. \\
& + (N_{yy}^{(1)} + N_{yy}^{(2)} + N_{yy}^{(3)}) \delta u_{y,y} - (M_{yy}^{(1)} + M_{yy}^{(2)} + M_{yy}^{(3)}) \delta w_{,yy} + (M_{yy}^{(3)} + cN_{yy}^{(1)} - cN_{yy}^{(2)}) \delta \psi_{y,y} + \\
& + (Q_{xy}^{(1)} + Q_{xy}^{(2)} + Q_{xy}^{(3)}) \delta u_{x,y} + (Q_{xy}^{(1)} + Q_{xy}^{(2)} + Q_{xy}^{(3)}) \delta u_{y,x} - 2(M_{xy}^{(1)} + M_{xy}^{(2)} + M_{xy}^{(3)}) \delta w_{,xy} + \\
& \left. + 2(M_{xy}^{(3)} + cQ_{xy}^{(1)} + cQ_{xy}^{(2)}) \delta \psi_{x,y} + Q_{xz}^{(3)} \delta \psi_x + Q_{yz}^{(3)} \delta \psi_y \right] dx dy. \quad (10)
\end{aligned}$$

Введем обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \sum_{k=1}^3 N_{xx}^{(k)}; \quad M_{xx} = \sum_{k=1}^3 M_{xx}^{(k)}; \quad H_{xx} = c(N_{xx}^{(1)} + N_{xx}^{(2)}) + M_{xx}^{(3)}; \quad Q_x = Q_{xz}^{(3)}; \\
N_{yy} &= \sum_{k=1}^3 N_{yy}^{(k)}; \quad M_{yy} = \sum_{k=1}^3 M_{yy}^{(k)}; \quad H_{yy} = c(N_{yy}^{(1)} + N_{yy}^{(2)}) + M_{yy}^{(3)}; \quad Q_y = Q_{yz}^{(3)}; \\
Q_{xy} &= \sum_{k=1}^3 Q_{xy}^{(k)}; \quad M_{xy} = \sum_{k=1}^3 M_{xy}^{(k)}; \quad H_{xy} = c(Q_{xy}^{(1)} + Q_{xy}^{(2)}) + M_{xy}^{(3)}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Подставив выражения (11) в формулы (10) и приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим систему дифференциальных уравнений равновесия прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании в усилиях

$$\begin{aligned}
N_{xx,x} + Q_{xy,y} &= -p_x, \quad N_{yy,y} + Q_{yx,x} = -p_y, \\
H_{xx,x} + H_{xy,y} - Q_x &= 0, \\
H_{yy,y} + H_{yx,x} - Q_y &= 0, \\
M_{xx,x} + 2M_{xy,y} + M_{yy,yy} &= -(q + q_r). \quad (12)
\end{aligned}$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях

используем соотношения закона Гука в девиаторно-сферической форме

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{ij}^{(k)};$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \quad (13)$$

где G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформаций, $s_{ij}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений, $\vartheta_{ij}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций,

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)}), \quad \vartheta_{ij}^{(k)} = \vartheta_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Компоненты тензора напряжений в слоях с учетом выражений (4) и (13)

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= s_x^{(k)} + \sigma^{(k)} = \frac{4}{3} G \varepsilon_{xx}^{(k)} + K \varepsilon_{xx}^{(k)} - \frac{2}{3} G \varepsilon_{yy}^{(k)} + K \varepsilon_{yy}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^- \varepsilon_{yy}^{(k)}; \\
\sigma_{yy}^{(k)} &= K_k^- \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^+ \varepsilon_{yy}^{(k)}; \quad \sigma_{xy}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xy}^{(k)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{yz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{yz}^{(3)}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\text{где } K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

Используя соотношения (3), (4) и (14), выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции u_x, u_y, ψ_x, ψ_y и w :

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{x,x} + K_k^- u_{y,y}) + c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) \psi_{x,x} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \psi_{y,y} - \\
&- \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right] w_{,xx} - \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right] w_{,yy}; \\
N_{yy} &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^- u_{x,x} + K_k^+ u_{y,y}) + c(h_1 K_1^- - h_2 K_2^-) \psi_{x,x} + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{y,y} -
\end{aligned}$$

$$-\left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^- - h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^-\right]w_{,xx} - \left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^+\right]w_{,yy};$$

$$Q_{yz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{yz} dz = 2cG_3\Psi_y; \quad Q_{xz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{xz} dz = 2cG_3\Psi_x;$$

$$\begin{aligned} M_{xx} = & \left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^+\right]u_{x,x} + \left[K_1^-h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) - K_2^-h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right]u_{y,y} + \\ & + c\left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+\right]\Psi_{x,x} + c\left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^- + h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^- + \frac{2}{3}c^2K_3^-\right]\Psi_{y,y} - \\ & - \left[K_1^+h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right) + K_2^+h_2\left(c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right) + \frac{2}{3}K_3^+c^3\right]w_{,xx} - \\ & - \left[K_1^-h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right) + K_2^-h_2\left(c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right) + \frac{2}{3}K_3^-c^3\right]w_{,yy}. \end{aligned}$$

M_{yy} следует из M_{xx} , если параметры K^+ и K^- поменять местами.

$$\begin{aligned} H_{xx} = & c(K_1^+h_1 - K_2^+h_2)u_{x,x} + c(K_1^-h_1 + K_2^-h_2)u_{y,y} + \left[c^2(K_1^+h_1 + K_2^+h_2) + K_3^+\frac{2}{3}c^3\right]\Psi_{x,x} + \\ & + \left[c^2(K_1^-h_1 + K_2^-h_2) + K_3^-\frac{2}{3}c^3\right]\Psi_{y,y} - \left[c\left(K_1^+h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) + K_2^+h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3K_3^+\right]w_{,xx} - \\ & - \left[c\left(K_1^-h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) + K_2^-h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3K_3^-\right]w_{,yy}. \end{aligned}$$

Величина H_{yy} следует из H_{xx} , если параметры K^+ и K^- поменять местами.

$$\begin{aligned} Q_{xy} = & \sum_{k=1}^3 h_k G^{(k)}(u_{x,y} + u_{y,x}) + G_1 c(h_1 - h_2)(\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}) - G_1 \left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) - h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right](w_{,xy} + w_{,yx}); \\ M_{xy} = & G_1 \left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) + h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right](u_{x,y} + u_{y,x}) + \left[G_1 \left[ch_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) - ch_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right] + G_3 \frac{2}{3}c^3\right](\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}) - \\ & - \left[G_1 \left[h_1\left[c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right] + h_2\left[c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right]\right] + \frac{2}{3}c^3G_3\right](w_{,xy} + w_{,yx}); \\ H_{xy} = & cG_1(h_1 - h_2)(u_{x,y} + u_{y,x}) + \left[G_1 c^2(h_1 + h_2) + \frac{2}{3}G_3 c^3\right](\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}) - \\ & - \left[G_1 \left[ch_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right) - ch_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right] + G_3 \frac{2}{3}c^3\right](w_{,xy} + w_{,yx}). \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя в (7) выражения деформаций через выражения (6), (5) и (1), получим из (12) систему искомые перемещения (3), производя интегрирование по толщине каждого из слоев и используя равновесия относительно искомых перемещений:

$$\begin{aligned}
 a_1(u_{x,xx} + u_{y,yx}) + a_2(\Psi_{x,xx} + \Psi_{y,yx}) - a_3(w_{,xxx} + w_{,yyx}) + a_8u_{x,yy} + a_9\Psi_{x,yy} &= -p_x; \\
 a_1(u_{y,yy} + u_{x,xy}) + a_2(\Psi_{y,yy} + \Psi_{x,xy}) - a_3(w_{,yyy} + w_{,xxy}) + a_8u_{x,yy} + a_9\Psi_{y,xx} &= -p_y; \\
 a_2(u_{x,xx} + u_{y,yx}) + a_4(\Psi_{x,xx} + \Psi_{y,yx}) - a_5(w_{,xxx} + w_{,yyx}) + a_9u_{x,yy} + a_{10}\Psi_{x,yy} - a_7\Psi_x &= 0; \\
 a_2(u_{y,yy} + u_{x,xy}) + a_4(\Psi_{y,yy} + \Psi_{x,xy}) - a_5(w_{,yyy} + w_{,xxy}) + a_9u_{y,xx} + a_{10}\Psi_{y,xx} - a_7\Psi_y &= 0; \\
 a_3(u_{x,xxx} + u_{y,yxx} + u_{x,xyy} + u_{y,yyx}) + a_5(\Psi_{x,xxx} + \Psi_{y,yxx} + \Psi_{x,xyy} + \Psi_{y,yyx}) - a_6(w_{,xxx} + w_{,yyy} + 2w_{,yyx}) - & \\
 -\kappa w &= -q, \tag{16}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+; \\
 a_4 &= c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\
 a_6 &= h_1 \left[c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right] K_1^+ + h_2 \left[c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right] K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \quad a_7 = 2G_3 c; \\
 a_8 &= \sum_{k=1}^3 h_k G_k; \quad a_9 = G_1 c (h_1 - h_2); \quad a_{10} = c^2 (G_1 h_1 - G_2 h_2) + \frac{2}{3} c^3 G_3.
 \end{aligned}$$

Принимаем граничные условия, соответствующие свободному опиранию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда для искомых перемещений должны выполняться при $x = 0; 1$ следующие требования:

$$u_x = u_y = \Psi_x = \Psi_y = w = 0. \tag{17}$$

Для автоматического удовлетворения условиям (17) решение системы дифференциальных уравнений (16) принимается в виде разложения в двойные тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{n,m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \quad u_x = \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \quad u_y = \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 \Psi_y &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \quad \Psi_x = \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

где $U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}, W_{mn}$ – неизвестные амплитуды перемещений.

Положим продольную нагрузку $p_x \equiv 0, p_y \equiv 0$. Поперечную нагрузку q представим в виде разложения в следующий ряд:

$$q = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy. \tag{19}$$

После подстановки перемещений (18) и нагрузок (19) в уравнения (16) получим систему линей-

ных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений:

$$\begin{aligned}
b_6 U_{1mn} + b_7 U_{2mn} + b_8 \Psi_{1mn} + b_9 \Psi_{2mn} + b_{11} W_{mn} &= 0; & b_7 U_{1mn} + b_{11} U_{2mn} + b_9 \Psi_{1mn} + b_{12} \Psi_{2mn} + b_2 W_{mn} &= 0; \\
b_8 U_{1mn} + b_9 U_{2mn} + b_{13} \Psi_{1mn} + b_{14} \Psi_{2mn} + b_3 W_{mn} &= 0; & b_9 U_{1mn} + b_{12} U_{2mn} + b_{14} \Psi_{1mn} + b_{10} \Psi_{2mn} + b_4 W_{mn} &= 0; \\
b_1 U_{1mn} + b_2 U_{2mn} + b_3 \Psi_{1mn} + b_4 \Psi_{2mn} + b_5 W_{mn} &= q_{mn}, & &
\end{aligned} \tag{20}$$

где коэффициенты b_j выражаются через величины a_i и зависят от параметра m и n .

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_3 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^3 + \frac{\pi n}{a} \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 a_3; & b_2 &= \frac{\pi m}{b} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 a_3 + a_3 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^3; & b_3 &= a_5 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^3 + \frac{\pi n}{a} \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 a_5; \\
b_4 &= \frac{\pi m}{b} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 a_5 + a_5 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^3; & b_5 &= -a_6 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^4 - 2a_6 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - a_6 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^4 - \kappa; \\
b_6 &= -a_1 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - a_{11} \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2; & b_7 &= -\frac{\pi n}{a} \frac{\pi m}{b} a_1; & b_8 &= -a_2 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - a_{12} \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2; & b_9 &= -\frac{\pi n}{a} \frac{\pi m}{b} a_2; \\
b_{10} &= -a_4 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 - a_{17} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - a_7; & b_{11} &= -a_1 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 - a_{11} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2; \\
b_{12} &= -a_2 \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 - a_{12} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2; & b_{13} &= -a_4 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - a_{17} \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 - a_7; & b_{14} &= -\frac{\pi n}{a} \frac{\pi m}{b} a_4.
\end{aligned}$$

Решение системы (20) можно выписать в определителях или получать численно с помощью обратной матрицы. После определения амплитуд $U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}, W_{mn}$ искомые функции вычисляются по формулам (18). Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (2).

Численный счёт производился для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т, механические характеристики которых приведены в [1]. Относительные толщины слоев принимались: $h_1 = 0,02, h_2 = 0,04, c = 0,09$; соотношение сторон пластины $a = 1, b = 1$. Интенсивность поверхностной нагрузки $q = 1$ МПа.

Численное исследование сходимости рядов (15) показало, что при их суммировании достаточно удерживать 30 первых слагаемых. Добавление еще 70 слагаемых изменяет результат менее чем на 0,1 %.

Распределение нормальных напряжений σ_{xx} по внешним плоскостям первого и второго слоев показано на рисунке 2 ($y = 0,5$). С повышением жесткости упругого основания напряжения уменьшаются, причем на внешней плоскости примерно на 40 %.

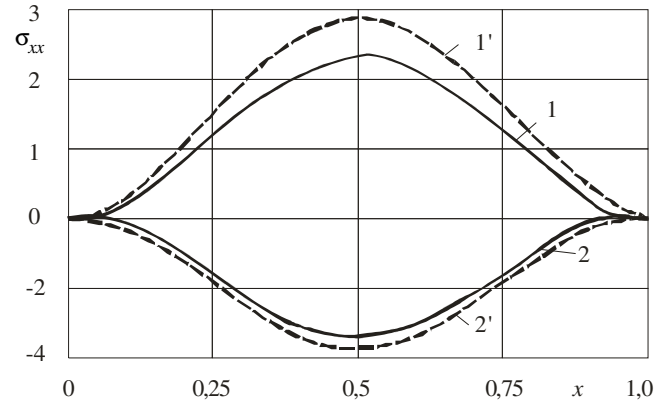


Рисунок 2 – Изменение вдоль оси пластины напряжений σ_{xx} на внешних плоскостях (отнесены к 10^8):
 $1 - z = -c - h_2; 2 - z = c + h_1$; со штрихом $\kappa = 1$ МПа/м², без штриха $\kappa = 100$ МПа/м²

На рисунке 3 приведены напряжения в несущих слоях на плоскостях склейки с заполнителем. Здесь напряжения уменьшаются с увеличением жесткости основания подобным образом, но в гораздо меньшей степени.

Изменение вдоль оси x нормальных напряжений $\sigma_{xx}^{(3)}$ в заполнителе на плоскостях склейки с несущими слоями иллюстрирует рисунок 4 (значения уменьшены в 10^5 раз). При увеличении коэффициента жесткости основания напряжения в плоскостях заполнителя остаются того же знака, достигают максимума в нижней склейке и уменьшаются в 1,5 раза.

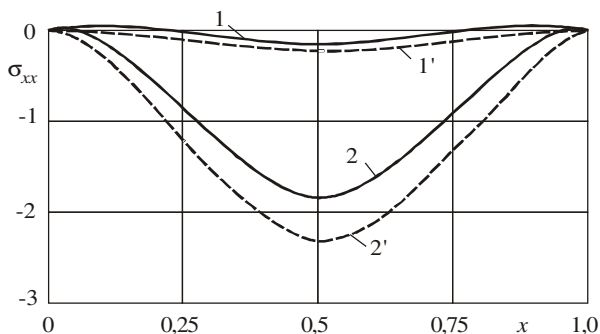


Рисунок 3 – Изменение вдоль оси стержня нормальных напряжений σ_{xx} в склейке с заполнителем:

1 – $z = -c$ (второй слой), 2 – $z = c$ (первый слой); без штриха – $\kappa = 100$ МПа/м; со штрихом – $\kappa = 1$ МПа/м (все значения напряжения отнесены к 10^8)

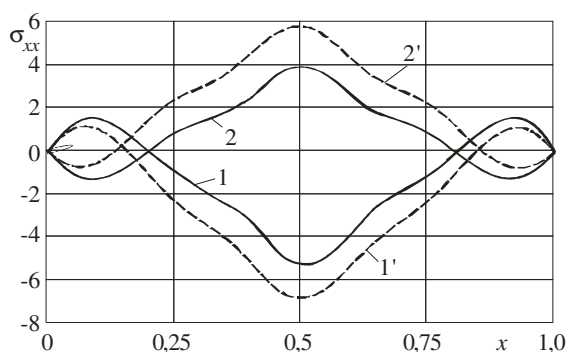


Рисунок 4 – Изменение вдоль оси x прямоугольной трехслойной пластины нормальных напряжений σ_{xx} на плоскостях заполнителя (1 – $z = -c$, 2 – $z = c$):

без штриха – $\kappa = 100$ МПа/м; со штрихом – $\kappa = 1$ МПа/м (все значения напряжения отнесены к 10^8)

Таким образом, учет жесткости упругого основания приводит к существенному уточнению напряженного состояния, возникающего в трехслой-

Получено 14.05.2007

E. P. Dorovskaya. Stress state of transport construction sandwich elements connected with elastic foundation.

Bend of elastic rectangular sandwich plate with incompressible filler resting on elastic foundation as, a transport construction element is examined. Kirchhoff's hypotheses are accepted for description of base layers kinematics. The foundation reaction is described by Winkler's model. The presence of rigid diaphragm impeding the relative shift of layers is presumed on the contour of the plate. The variational Lagrange's principle is used for receiving differential system of equilibrium equations. Analytical solution is written in determinants. Its numerical approbation is carried out by means of inverse matrix. Numerical parametric analysis of stress state of layers material depending on elastic foundation rigidity is carried out.

ной пластине при внешнем силовом воздействии. Приведенная в работе методика теоретического исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов транспортных систем может быть применена в дальнейшем при различных видах внешнего воздействия, включая термосиловое.

Список литературы

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

2 Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

3 Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

4 Старовойтов, Э. И. Колебания круговой трехслойной пластины возбужденным терморadiационным воздействием / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Гу Юй // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2002. – № 3. – С. 71–76.

5 Старовойтов, Э. И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 21–28.

6 Доровская, Е. П. Деформирование прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Е. П. Доровская // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(37). – С. 20–23.