УДК 62.752

Р. С. БОЛЬШАКОВ, аспирант, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Рассмотрены возможности упрощения механической системы с двумя степенями свободы. Используется понятие «обобщенная пружина». Показано, что жесткость такой пружины может принимать значения, равные 0 и ∞ без учета сил сопротивления. Приведены аналитические соотношения.

Введение. Вопросы упрощения механических систем являются важной задачей при построении математических моделей. Ряд вопросов, связанных с использованием электромеханических аналогий и теорией цепей, рассматривается в работах [1–3], однако многие особенности эквивалентных преобразований не получили должного развития, в частности, по отношению к механическим колебательным системам.

В предлагаемой работе рассматриваются возможности построения математических моделей колебательных систем на основе совмещения структурных методов теории автоматического управления и теории механических цепей [4].

I Построение математической модели. Рассмотрим некоторые особенности формирования математических моделей на примере системы с двумя степенями свободы, как показано на рисунке 1. Система состоит из двух масс – m_1 и m_2; пружин K_1, K_2, K_3. Внешние воздействия представлены движениями основания – z_1, z_2. В данном случае предполагается, что можно перейти к силовым возмущениям $Q_1 = K_1z_1$, $Q_2 = K_2z_2$. Однако Q_1 и Q_2 будут рассматриваться приложенными к соответствующим массам m_1 и m_2.

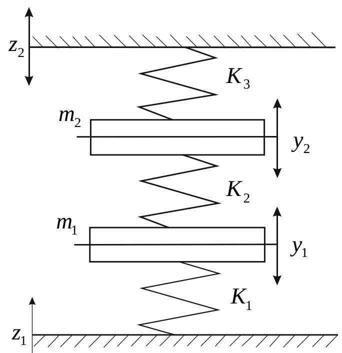

Рисунок 1 – Расчетная схема, имеющая два контура взаимодействия

Запишем выражения для кинематической и потенциальной энергии в координатах y_1 и y_2, связанных с неподвижной системой отсчета:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2; \quad (1)$$

$$П = \frac{1}{2}K_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}K_2(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}K_3(y_3 - z_3)^2. \quad (2)$$

Используя известные приемы, получим систему уравнений движения

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(K_1 + K_2) - K_2y_2 = K_1z_1; \quad (3)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2(K_2 + K_3) - K_2y_1 = K_3z_2. \quad (4)$$

Преобразуем (3), (4) к одному уравнению, используя подстановку:

$$\bar{y}_1 = \frac{(m_2p^2 + K_2 + K_3)\bar{y}_2 - K_3\bar{z}_2}{K_2}, \quad (5)$$

Найдем, что

$$\bar{y}_2[(m_2p^2 + K_2 + K_3)(m_1p^2 + K_1 + K_2) - K_2^2] =$$
$$= K_1K_2z_1 + K_3z_2(m_1p^2 + K_1 + K_2). \quad (6)$$

Система внешних сил такова, что по отношению к координате $\bar{y}_2$ могут быть построены передаточные функции для различных случаев ($z_1 = 0$, $z_2 \neq 0$; $z_1 \neq 0$, $z_2 = 0$; $z = z_1 = z_2$). Будем полагать, что $z_1 = 0$, тогда передаточная функция системы примет вид

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_2} = \frac{K_3(m_1p^2 + K_1 + K_2)}{[(m_1p^2 + K_1 + K_2)(m_1p^2 + K_1 + K_2) - K_2^2]}. \quad (7)$$

Преобразуем (7) к виду

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_2} = \frac{K_3}{m_1p^2 + K_3 + \dfrac{K_2(m_2p^2 + K_1)}{m_1p^2 + K_1 + K_2}}. \quad (8)$$

В соответствии с выражением (8) расчетная схема на рисунке 1 может быть преобразована, как показано на рисунке 2.

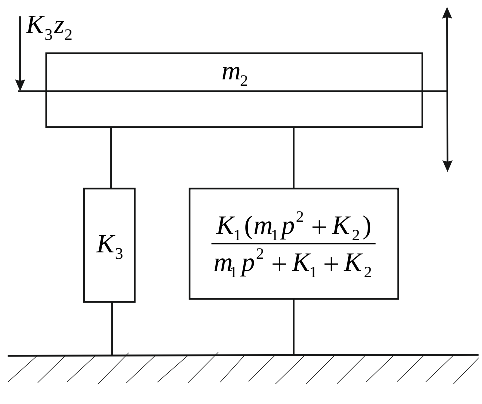

Рисунок 2 – Преобразованная расчетная схема по отношению к схеме на рисунке 1

Отметим, что «локальная свертка» или преобразование (3), (4) с исключением координаты y_1 позволяет «увидеть» структуру исходной системы в упрощенном виде. В частности, при внешнем воздействии $z_2 \neq 0$ и $z_1 = 0$, часть системы, представляющая собой колебательную структуру с одной степенью свободы, может рассматриваться как «обобщенная пружина» [3, 5]. Учет таких особенностей открывает в схеме динамических взаимодействий характерные особенности пружины: при частоте внешнего воздействия

$$\omega^2_{\text{рез}} = \frac{K_1 + K_2}{m_1} \tag{9}$$

в механической цепи возникает резонанс, и эта ветвь приобретает жесткость, равную бесконечности, то есть система по отношению к массе m_2 (координата y_2) «запирается». В свою очередь, при частоте

$$\omega^2_{\text{дин}} = \frac{K_2}{m_2} \tag{10}$$

жесткость ветви становится нулевой, а система на этой частоте работает как система с одной степенью свободы. Для построения передаточной функции «обобщенной» пружины, параллельной K_3, можно использовать схему из дуальных элементов (рисунок 3). Передаточные функции цепи соответствуют, в физическом смысле, жесткости обобщенного упругого элемента

$$W'(p) = \frac{K_2(m_1p^2 + K_1)}{m_1p^2 + K_1 + K_2}. \tag{11}$$

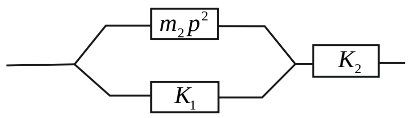

Рисунок 3 – Принципиальная схема системы из дуальных элементов на рисунке 2

Массоинерционный элемент m_1p^2 в механических цепях выступает как элемент с особенностями, поскольку инерционные свойства, которыми он обладает (если его рассматривать как дуальный элемент, имеющий вход и выход), делает условным его контакт с присоединяемым массоинерционным элементом или неподвижной основой. Особенности таких свойств отмечены в работах по теории механических цепей. В тех случаях, когда массоинерционный элемент соединяется с упругим элементом или входит в некоторую структуру, то схема соединения дуальных элементов должна быть детализирована, как показано на рисунке 3.

При решении задач виброзащиты и виброизоляции на основе структурной теории виброзащитных систем и использовании расширенного набора типовых элементов принимается во внимание, что в отличии от звена в виде массы mp^2 применяются специальные массоинерционные звенья с передаточной функцией дифференцирующего звена второго порядка Lp^2. Такие звенья имеют устройство в виде некоторого механизма с входом и выходом, например, несамотормозящаяся винтовая пара, зубчатая передача, рычажный преобразователь [6, 7, 8].

II Оценка частного случая. Рассмотрим случай, когда $z_2 = 0$, $z_1 \neq 0$. Расчетная схема системы при таком варианте действия сил представлена на рисунке 4.

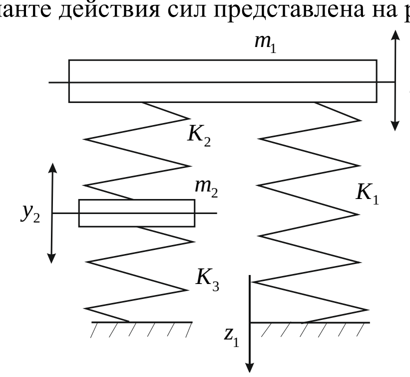

Рисунок 4 – Расчетная схема системы (см. рисунок 1) при схеме возмущения $z_2 = 0$, $z \neq 0$

Передаточная функция системы имеет вид

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{K_1(m_2p^2 + K_2 + K_3)}{[(m_1p^2 + K_1 + K_2)(m_2p^2 + K_2 + K_3) - K_2^2]} =$$

$$= \frac{K_1}{m_1p^2 + K_1 + K_2 - \dfrac{K_2^2}{m_1p^2 + K_2 + K_3}} =$$

$$= \frac{K_1}{m_1p^2 + K_1 + \dfrac{K_2(m_2p^2 + K_3)}{m_2p^2 + K_2 + K_3}}. \tag{12}$$

Расчетная схема упрощенной системы (с исключением координаты y_2) приводится на рисунке 5.

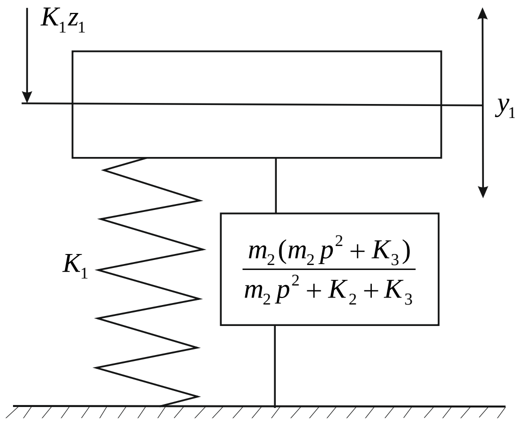

Рисунок 5 – Расчетная схема упрощенной системы (см. рисунок 1) при схеме возмущения $z_2 = 0$, $z_1 \neq 0$

Схема соединения элементов при $z_1 \neq 0$ приведена на рисунке 6. Жесткость обобщенного упругого элемента (механической цепи из K_3, m_2, K_2) может быть определена как

$$W'' = \frac{K_2(m_2p^2 + K_3)}{m_2p^2 + K_2 + K_3}. \tag{13}$$

При такой схеме динамического нагружения при частоте

$$\omega^2_{\text{дин}} = \frac{K_3}{m_2} \tag{14}$$

жесткость обобщенной пружины будет равна нулю, и система (см. рисунок 5) на этой частоте работает как система с одной степенью свободы. В свою очередь, на частоте

$$\omega^2_{\text{рез}} = \frac{K_2 + K_3}{m_2} \tag{15}$$

жесткость механической цепи становится очень большой, и элемент m_2 колеблется как одно целое с пружиной и основанием.

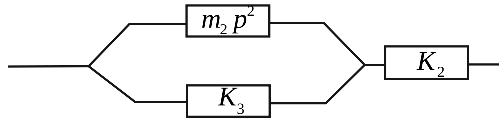

Рисунок 6 – Принципиальная схема соединения элементов в системе на рисунке 5

При рассмотрении случаев совместного действия со стороны основания, когда $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$ можно воспользоваться при определении зависимости между z_1, z_2 и y_1, y_2 теорией четырехполюсников, что нашло отражение в работах [2, 9–11]. Случай $z = z_1 = z_2$ представляет особый интерес, так как механическая система получает одновременно возмущение по двум каналам, что создает условия для суммирования внешних воздействий, поскольку при одинаковой частоте фазовые сдвиги входных воздействий могут создавать ряд новых динамических эффектов [12].

III Динамические свойства. При определении динамических свойств системы в тех случаях, когда внешнее воздействие прикладывается к массе и отыскивается реакция, например, в виде смещения той же массы или скорости этой точки, используется теория импедансов [13, 14]. Если усилие прилагается в одной точке, а смещение определяется в другой, то такой вариант взаимодействий в системе соответствует ситуации, в которой для рассмотренных выше случаев внешнее воздействие прикладывается внутри механической цепи, соответствующей параллельной ветви, как показано на рисунке 7.

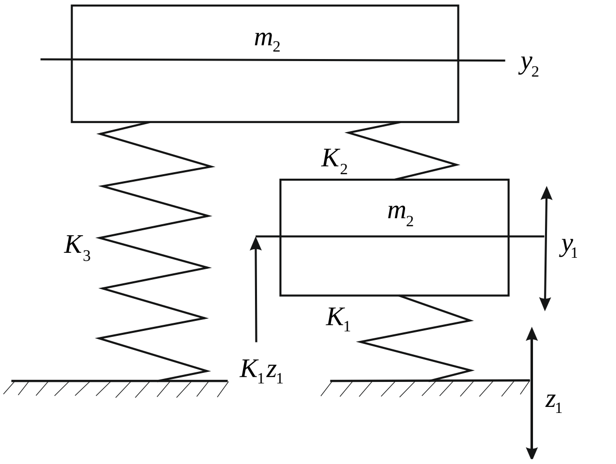

Рисунок 7 – Принципиальная схема системы при силовом возмущении через промежуточный элемент

В качестве возмущения (см. рисунок 7) может рассматриваться кинематическое возмущение z_1. Тогда передаточная функция по отношению к координате y_2 имеет вид

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{K_1 K_2}{[(m_1 p^2 + K_2 + K_3)(m_2 p^2 + K_2 + K_3) - K_2^2]}. \quad (16)$$

Сделаем ряд преобразований и получим

$$W_3(p) = \frac{\dfrac{K_1 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}}{m_3 p^2 + K_3 + \dfrac{K_1(m_1 p^2 + K_1)}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}}. \quad (17)$$

В свою очередь,

$$W_3(p) = \frac{-\dfrac{m_1 p^2 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2} + }{m_3 p^2 + K_3 + \dfrac{m_1 p^2 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2} + } \ldots$$

$$\ldots \frac{+\dfrac{K_2(m_1 p^2 + K_2)}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}}{+\dfrac{K_2(m_1 p^2 + K_2)}{m_1 p^2 + K_1 + K_2} - \dfrac{m_1 p^2 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}}. \quad (18)$$

Таким образом, можно было бы исходную схему на рисунке 7 представить как систему с одной степенью свободы (рисунок 8).

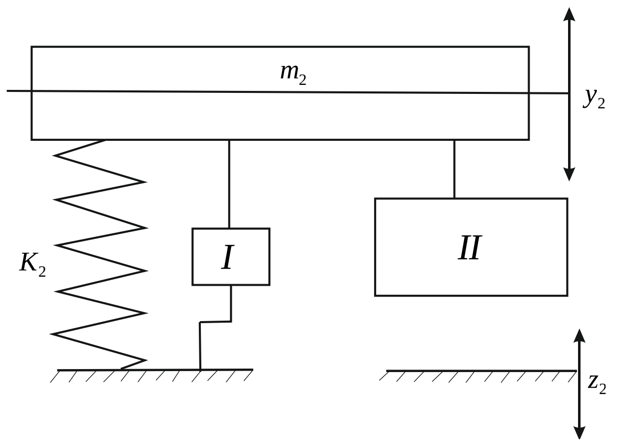

Рисунок 8 – Принципиальная схема упрощенной системы при внешнем воздействии $z_1 \neq 0$, где I – соответствует жесткости $m_2p^2K_2/m_1p^2 + K_1 + K_2$, II – соответствует $K_2(m_2p^2K_1) / m_1p^2 + K_1 + K_2$

Представление об особенностях внешнего воздействия z_1 дает схема на рисунке 7, где внешнее воздействие имеет размерность силы (K_1, z_1) и приложено к массе m_1. В этом случае можно считать, что кинематическое воздействие z_1 приводится к силовому. Такой случай переноса сил по упругому элементу совпадает с правилами преобразований в теории механических цепей [2]. Вместе с тем, такой случай можно отнести к случаю появления «скрытых сил», о чем, в частности, упоминается в работе [15].

В упрощенной модели на вибрирующее основание опирается упругий элемент в виде обобщенной пружины с приведенной жесткостью, зависящей от частоты:

$$W'' = \frac{K_2(m_2 p^2 + K_1)}{m_1 p^2 + K_1 + K_2} - \frac{m_2 p^2 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}. \quad (19)$$

Физический смысл передаточной функции W'' – выражения (19) заключается в том, что обобщенная пружина в данном случае внешнего возмущения по отношению к координате y_2 может рассматриваться в виде обобщенного упругого элемента. Форма или порядок его введения в структуру передаточной функции системы соответствует правилам введения типовых звеньев расширенного набора виброзащитных систем в ситуациях, соответствующих управлению по относительному смещению.

Особенностью рассматриваемого подхода является обнаружение интересного свойства обобщенных упругих элементов. Оно проявляется в том, что возмущение через m_1 привносит в систему «скрытые силы», которые являются переносными силами инерции.

Можно полагать, что эти силы инерции изменяют параметры приведенной жесткости обобщенной пружины [выражение (19)] по сравнению с другой схемой внешнего воздействия, что определяется выражением (11). Вместе схема динамического взаимодействия затрагивает структуру исходной расчетной схемы (см. рисунок 8), в составе которой появляется упругий элемент с приведенной жесткостью, определяемой передаточной функцией:

$$W''(p) = \frac{m_1 p^2 K_2}{m_1 p^2 + K_1 + K_2}. \qquad (20)$$

Этот элемент вводится параллельно пружине с жесткостью K_2 (см. рисунок 8). Физический смысл динамической жесткости заключается в том, что она отражает динамическую реакцию упругого элемента K_1 при действии со стороны m_2 смещения, инициированного переносом динамического воздействия со стороны основания в точку, соответствующую точке крепления m_1 и K_2. Поскольку преобразование обеспечивает, по существу, эквивалентный перенос внешнего кинематического возмущения z_1 с приложением соответствующего силового фактора к массе m_2, то приведенная жесткость (20) определяет динамическую реакцию от z_1, в цепочке K_2, m_2, K_1.

Заключение. Таким образом, упрощение механических систем, имеющих несколько степеней свободы, осуществляется путем исключения соответствующих координат. Правило так называемой локальной свертки определяются правилами соединения элементов теории дуальных цепей. При этом механические цепи при сворачивании превращаются в обобщенные пружины [5]. Особенность таких пружин заключается в зависимости приведенной динамической жесткости от частоты. Обобщенная пружина определяется из передаточной функции механической цепи при входе – «смещение» и выходе – «усилие». Структура механической цепи допускает «сборку» при использовании структурной схемы из дуальных элементов. Если механическая цепь имеет большое количество элементов, то приведенная жесткость обобщенной пружины представляет собой дробно-рациональное выражение от p с соответствующими проблемами оценки нулей и полюсов. Отметим, что механические цепи в связи с возможностями «обнуления» числителя и знаменателя приобретают, при отсутствии сил сопротивления, свойства «запирания» системы или ее полного «открытия» на определенных частотах. В целом, это позволяет формировать нетрадиционную трактовку динамических взаимодействий в колебательных системах. Важно отметить, что внешние силовые и кинематические возмущения, попадая в структуру упрощения обобщенной пружины механической цепи, требуют при преобразованиях учета определенных условий, иначе действие таких возмущений может восприниматься как действие «скрытых» сил. При этом в эквивалентных схемах могут появляться дополнительные элементы, физическая суть которых связана с отражением динамических взаимодействий, характерных для данного случая нагружения.

Список литературы

1 **Хоменко, А. П.** Динамика и управление в задачах виброзащиты и виброизоляции подвижных объектов / А. П. Хоменко. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2000. – 296 с.

2 **Подураев, Ю. В.** Анализ и проектирование мехатронных систем на основе критерия функциональной структурной интеграции / Ю. В. Подураев // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2002. – № 4. – С. 6–12.

3 Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев [и др.]; под общ. ред. С. В. Елисеева. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2008. – 523 с.

4 Мехатроника виброзащитных систем. Элементы теории / С. В. Елисеев [и др.]; под общ. ред. С. В. Елисеева. – Иркутск : ИрГУПС, 2009. – 128 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.11.09, № 738-В, 2009.

5 **Ермошенко, Ю. В.** Управление вибрационным состоянием в задачах виброзащиты и виброизоляции : дис. … канд. техн. наук / Ю. В. Ермошенко; ИрГУПС. – Иркутск, 2002. – 185 с.

6 **Димов, А. В.** Моделирование и динамические процессы в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов : автореф. дис. … канд. техн. наук / А. В. Димов; ИрГУПС. – Иркутск, 2006. – 26 с.

7 **Логунов, А. С.** Динамика пневматических элементов и устройств для преобразования движения в системах вибрационной защиты объектов : автореф. дис. … канд. техн. наук / А. С. Логунов; ИрГУПС. – Иркутск, 2010. – 20 с.

8 **Драч, М. А.** Динамический синтез и моделирования в задачах оценки и изменения вибрационного состояния крутильных колебательных систем: дис. … канд. техн. наук / М. А. Драч; ИрГУПС. – Иркутск, 2006. – 178 с.

9 **Насников, Д. Н.** Формы и особенности динамического взаимодействия звеньев в виброзащитных системах с расширенным набором элементов: дис. … канд. техн. наук // Д. Н. Насников; ИрГУПС. – Иркутск, 2009. – 184 с.

10 **Упырь, Р. Ю.** Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм соединений элементарных звеньев : автореф. дис. … канд. техн. наук / Р. Ю. Упырь; ИрГУПС. – Иркутск, 2009. – 19 с.

11 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.

12 **Коловский, М. З.** Автоматическое управление виброзащитными системами / М. З. Коловский. – М. : Наука, 1976. – 320 с.

13 **Фролов, К. В.** Прикладная теория виброзащитных систем / К. В. Фролов, Ф. А. Фурман. – М. : Машиностроение, 1985. – 286 с.

14 **Генкин, М. Д.** Методы активного гашения вибрации механизмов / М. Д. Генкин, В. Г. Елизов, В. Н. Яблонский // Динамика и акустика машин. – М. : Наука, 1985. – 245 с.

15 **Елисеев, С. В.** Структурная теория виброзащитных систем / С. В. Елисеев. – Новосибирск : Наука, 1978. – 238 с.

Получено 04.06.2012

R. S. Bolshakov. Transformation in mechanical chains.

Possibilities of approximation of mechanical system with two degrees of freedom are considered. The concept of "generalized spring" is using. It is shown that elasticity of such spring may be equal zero and ∞ without of accounting of dissipation of energy. The analytical conditions are offered.