УДК 62.752

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования; Ю. В. ЕРМОШЕНКО, кандидат технических наук, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРОЩЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕПЛАНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

Предлагается метод устранения непланарности в механической цепи на основе исключения соответствующих координат. Показаны возможности определения обобщенных сил при переходе от одной системы координат к другой. Рассмотрены примеры получения структурных схем на основе аппарата теории цепей и теории автоматического управления движением.

Введение. Структурные подходы, реализуемые на основе аппарата теории механических цепей и теории управления динамическим состоянием системы связаны с задачами преобразования схем и определением передаточных функций или эквивалентных частотных характеристик [1, 2]. При упрощениях систем, связанных с преобразованиями структур, непланарные связи создают некоторые трудности, хотя и устраняемые на основе использования формул Крамера [3], тем не менее достаточно серьезные для детализированного анализа динамических взаимодействий систем. Ряд предложений по устранению непланарностей рассмотрен в работах [4, 5].

В предлагаемой статье рассматриваются методологические основы устранения непланарностей путем исключения промежуточных координат.

Общие положения. Постановка задачи исследования. Рассматривается ряд приемов, позволяющих оценить особенности динамических взаимодействий между парциальными системами на основе преобразования межкоординатных связей.

Рассмотрим цепную механическую систему, которая состоит из трех масс (m_1, m_2, m_3), соединенных последовательно упругими элементами ($k_1 + k_4$); внешние воздействия имеют форму кинематических (z_1, z_3) и силовых (Q_1, Q_2, Q_3) гармонических возмущений, как показано на рисунке 1. В конкретных случаях рассмотрения часть силовых факторов принимается равной нулю.

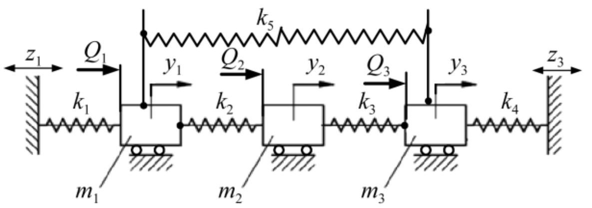

Рисунок 1 – Расчетная схема подвески в виде цепной механической системы с тремя степенями свободы

Введение между элементами m_1 и m_3 упругой связи через упругий элемент k_5 приводит к непланарности. В этом случае система дифференциальных уравнений по координатам y_1, y_2, y_3 может быть получена на основе известных приемов [2] и трансформирована к виду

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2 + k_5) - y_2 k_2 - k_5 y_3 = k_1 z_1; \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2(k_2 + k_3) - y_1 k_2 - k_3' y_3 = 0; \qquad (2)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + y_3(k_3 + k_4 + k_5) - y_2 k_3 - k_5 y_1 = k_4 z_2. \qquad (3)$$

Из (2) можно найти (переходя к преобразованиям Лапласа), что

$$\bar{y}_2 = \frac{k_3\bar{y}_3 + k_1\bar{y}_1}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \qquad (4)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$). Полагая, что $\bar{y}_2 = a\bar{y}_3 + b\bar{y}_1$, преобразуем (1)–(3) к виду

$$\bar{y}_1(m_1 p^2 + k_1 + k_2 + k_5) - k_2 a\bar{y}_3 - k_2 b\bar{y}_1 - k_5\bar{y}_3 = k_1\bar{z}_1, \qquad (5)$$

$$\bar{y}_3(m_3 p^2 + k_3 + k_4 + k_5) - k_3 a\bar{y}_3 - k_3 b\bar{y}_1 - k_5\bar{y}_1 = k_4\bar{z}_3. \qquad (6)$$

Преобразуем (5), (6). Тогда

$$\bar{y}_1(m_1 p^2 + k_1 + k_2 + k_5 - k_2 b) - (k_2 a\bar{y}_3 + k_5) = k_1\bar{z}_1; \qquad (7)$$

$$\bar{y}_3(m_3 p^2 + k_3 + k_4 + k_5 - k_3 a) - \bar{y}_1(k_3 b + k_5) = k_4\bar{z}_3, \qquad (8)$$

где $$a = \frac{k_3}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \quad b = \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \qquad (8')$$

В таблице 1 приведены для сравнения коэффициенты системы уравнений (1)–(3) без упругого элемента ($k_5 = 0$) и с упругим элементом ($k_5 \neq 0$).

Таблица 1 – **Значения коэффициентов двух систем уравнений**

a_{11}	a_{12}	a_{13}
* $m_1p^2 + k_1 + k_2$	$-k_2$	0
$m_1p^2 + k_1 + k_2 + k_5$	$-k_2$	$-k_5$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
* $-k_2$	$m_1p^2 + k_2 + k_3$	$-k_3$
$-k_2$	$m_1p^2 + k_2 + k_3$	$-k_3$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
* 0	$-k_3$	$m_3p^2 + k_3 + k_4$
$-k_5$	$-k_3$	$m_1p^2 + k_3 + k_4 + k_5$
Q_1	Q_2	Q_3
* k_1z_1	0	k_2z_2
k_1z_1	0	k_2z_2

Примечание – * – параметры системы упругого элемента ($k_5 = 0$); под чертой – параметры системы (1)–(3).

Структурная схема системы (координаты y_1 и y_3) представлена на рисунке 2.

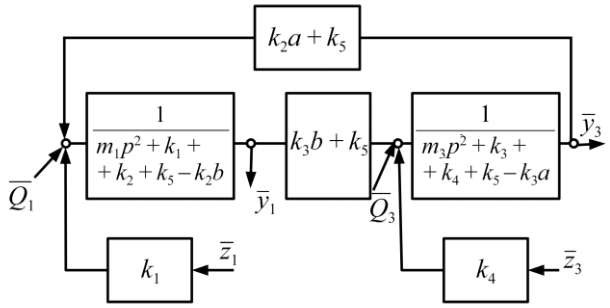

Рисунок 2 – Структурная схема в упрощенном варианте с дополнительной связью k_5

Сравнивая значение коэффициентов в ячейках таблицы 1, можно отметить, что введение дополнительной связи k_5 приводит к заполнению ячейки a_{13} значением k_5 по сравнению с исходной системой; имеются также отличия в ячейках a_{11} и a_{33} (добавился коэффициент жесткости k_5). Заполнение ячейки a_{13} привносит в исходную систему непланарность связей, которая может быть показана как упругое соединение точек (1) и (3) на схеме, приведенной на рисунке 3, с использованием дуальных элементов теории механических цепей (при $Q_2 = 0$; $z_1 = z_2 = 0$; $Q_1 \neq 0$; $Q_3 \neq 0$).

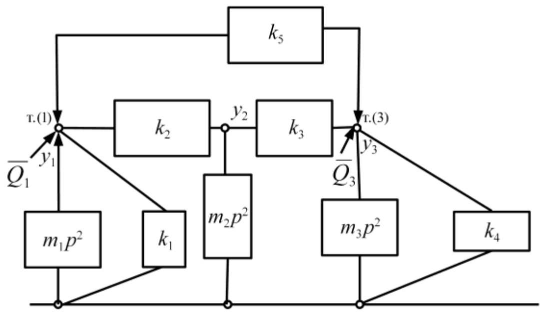

Рисунок 3 – Принципиальная схема механической цепи с непланарной связью (k_5)

Определение приведенной жесткости обобщенной пружины [6], на основе использования которой могут быть построены передаточные функции системы, определяющие связи между внешними воздействиями и соответствующими координатами y_1 и y_3, производятся на основе соответствующих сверток типовых элементов. Последнее встречает затруднения из-за непланарности. Однако эта трудность может быть устранена на основе приемов, изложенных в работах [7, 8].

Исключение промежуточных координат. Рассмотрим каждый парциальный блок структурной схемы на рисунке 2 по отдельности. Тогда

$$\frac{1}{m_1p^2 + k_1 + k_2 + k_5 - k_2 b} = \frac{m_2p^2 + k_2 + k_3}{(m_1p^2 + k_1 + k_2 + k_5)(m_2p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}; \qquad (9)$$

В свою очередь, получим

$$\frac{1}{m_3p^2 + k_3 + k_4 + k_5 - k_3 a} = \frac{m_2p^2 + k_2 + k_3}{(m_3p^2 + k_3 + k_4 + k_5)(m_2p^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}. \qquad (10)$$

Выражения (9), (10) составляют основу, которую можно использовать для построения двух расчетных схем, как показано на рисунке 4.

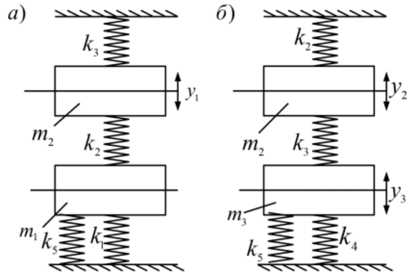

Рисунок 4 – Расчетная схема системы для определения параметров структурной схемы на рисунке 2

Оценка динамических свойств. Отметим, что введение дополнительной связи проявилось в том, что в парциальных блоках появились особенности – пружины с жесткостью k_5; одновременно в перекрестных связях также добавился член k_5. Расчетная схема для этого случая с использованием дуальных элементов по аналогии с [2] представлена на рисунке 5.

При использовании метода исключения промежуточной координаты y_2, которая находится в зоне непланарных связей, динамическое взаимодействие между двумя парциальными подсистемами осуществляется с помощью упругого элемента k_5 и элемента с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k_2 k_3}{m_2p^2 + k_2 + k_3} = k', \qquad (11)$$

порядок определения которой изложен в работе [3].

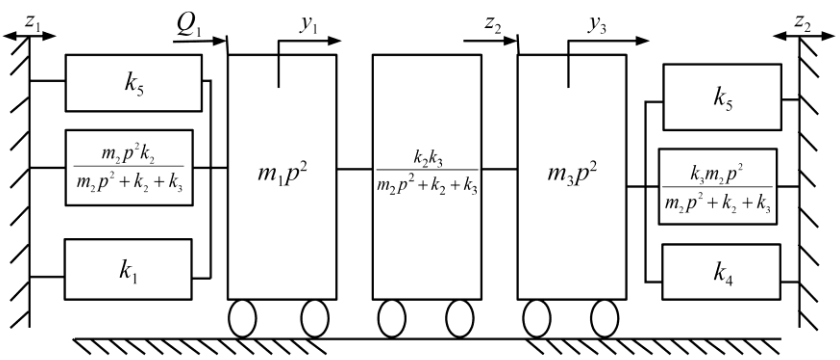

Рисунок 5 – Расчетная схема системы с дополнительной связью k_5 с использованием дуальных элементов

Динамическая развязка соединения между массами m_1 и m_3 через цепь k_2, $k_3m_2p^2$ учитывается двумя обобщенными пружинами. Важным для дальнейших исследований является то, что динамические усилия в непланарной связке разносятся по парциальным системам, а перекрестная связь определяется элементами с передаточными функциями k_5 и k'. Передаточные функции по координатам y_1, y_3 и внешние воздействия z и z_3 (или Q_1 и Q_3) определяются на основе известных подходов. Структурная схема исходной системы с дополнительной связью k_5, представленная на рисунке 1, может быть такой, как показано на рисунке 6.

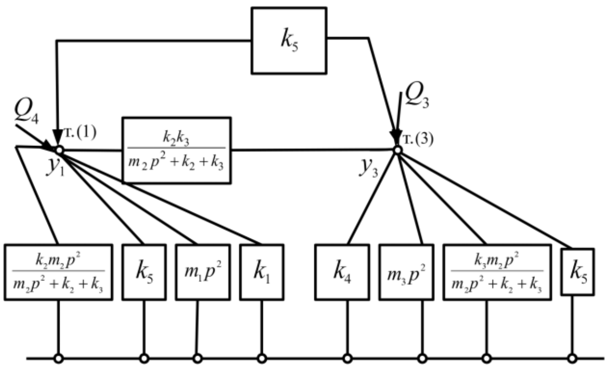

Рисунок 6 – Структурная схема исходной системы с дополнительной связью k_5 с развязкой непланарности

Метод исключения переменной дает возможность не только упростить систему с непланарной связью, но и определиться с динамическими воздействиями, которые формируются тем или иным элементом системы. При исключении непланарных связей, в случае приложения силового фактора в зоне непланарности, необходимо осуществить эквивалентный перенос силы в другие точки или прибегнуть к соответствующим преобразованиям.

Упрощение системы путем исключения координат. Будем полагать, что $k_5 = 0$, то есть система не имеет непланарных связей. Если в системе на рисунке 7 исключается координата y_1, то, используя систему уравнений (1)–(3) при $k_5 = 0$ и $z_1 = 0$, найдем:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_2(m_2p^2+k_2+k_3)-k_3y_2}{k_2} = a_1\bar{y}_2 - b_1\bar{y}_3, \quad (12)$$

где $$a_1 = \frac{m_2p^2+k_2+k_3}{k_2}; \quad b_1 = \frac{k_3}{k_2}. \quad (13)$$

Введем a_1 и b_1 в уравнения (1) и (3) и получим

$$(m_1p^2+k_1+k_2)a_1\bar{y}_2 - (m_1p^2+k_1+k_2)b_1y_3 - y_2k_2 = 0, \quad (14)$$

$$\bar{y}_3(m_3p^2+k_3+k_4) - k_3y_2 = k_4z_3. \quad (15)$$

В таблице 2 приведены коэффициенты уравнений (14), (15).

В свою очередь, исключение переменной y_2 позволяет определиться с передаточными функциями, в которых используются координаты y_1 и y_3. Однако для получения необходимых связей с координатой y_2 необходимо преобразование исходной расчетной схемы, как это показано на рисунке 7.

Таблица 2 – **Значения коэффициентов уравнений (14), (15)**

a_{11}	a_{12}
$(m_1p^2 + k_1 + k_2)a_1 - k_2$	$-(m_1p^2 + k_1 + k_2)b_1$
a_{21}	a_{22}
$-k_3$	$m_3p^2 + k_3 + k_4$
Q_1	Q_2
0	k_4z_3

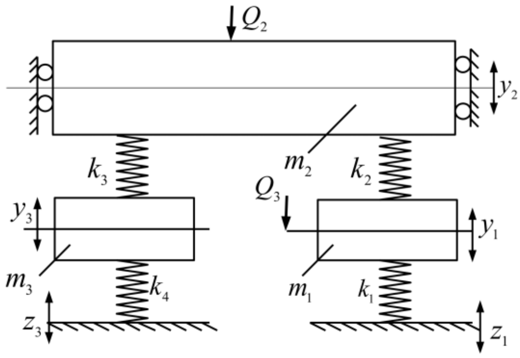

Рисунок 7 – Расчетная схема системы с симметричной загрузкой по координатам y_1 и y_3

Система уравнений для расчетной схемы на рисунке 7 также имеет вид (1)–(3), откуда

$$\bar{y}_1 = \frac{k_1\bar{z}_1 + \bar{y}_2k_2}{m_1p^2+k_1+k_2} = a'\bar{z}_1 + b'\bar{y}_2, \quad (16)$$

где

$$a' = \frac{k_1}{m_1p^2+k_1+k_2}; \quad (17)$$

$$b' = \frac{k_2}{m_1p^2+k_1+k_2}. \quad (18)$$

Соответственно из (3) следует, что

$$\bar{y}_3 = \frac{k_4\bar{z}_3 + \bar{y}_2k_3}{m_3p^2+k_3+k_4} = a''\bar{z}_3 + b''\bar{y}_2, \quad (19)$$

где

$$a'' = \frac{k_4}{m_3p^2+k_3+k_4}; \quad (20)$$

$$b'' = \frac{k_3}{m_3p^2+k_3+k_4}. \quad (21)$$

Преобразуем (2) к виду

$$\bar{y}_2(m_2p^2+k_2+k_3) - k_2b'y_2 - k_3b''\bar{y}_2 = k_2a'z_1 + k_3a''z_3. \quad (22)$$

Расчетная схема в рамках теории механических цепей может быть представлена, как показано на рисунке 8.

Раскроем передаточную функцию обобщенной пружины (в данном случае ее приведенную жесткость):

$$k_2' = k_2 - k_2b' = k_2 - \frac{k_2^2}{m_1p^2+k_1+k_2} = \frac{k_2(m_1p^2+k_1)}{m_1p^2+k_1+k_2}. \quad (23)$$

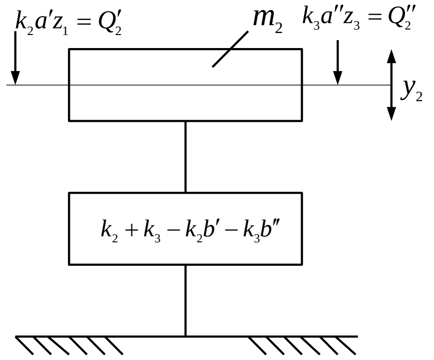

Рисунок 8 – Упрощенная схема системы, представленной на рисунке 7

Соответственно

$$k_3' = k_3 - k_3 b'' = k_3 - \frac{k_3^2}{m_3 p^2 + k_3 + k_4} = \frac{k_3(m_3 p^2 + k_4)}{m_3 p^2 + k_3 + k_4}. \quad (24)$$

Таким образом, можно исходную систему рассматривать в виде системы с одной степенью свободы, как показано на рисунке 9, где кроме структуры с дуальными элементами (см. рисунок 9, *а*) показана и эквивалентная в динамическом отношении структурная схема системы автоматического управления (САУ).

Заключение. Таким образом, передаточные функции механической системы и их структурные аналоги могут быть построены на основе использования упрощенных моделей систем. Последнее предполагает исключение промежуточных координат, что дает возможность более четких представлений об особенностях динамических взаимодействий между отдельными элементами системы. Предлагаемый подход может использоваться для решения задач, связанных с непланарностями. В физическом смысле непланарность проявляется через введение связей между координатами с наличием между ними еще одной или нескольких промежуточных координат. Особенно характерными являются непланарности в системах смешанного (или комбинированного) типа, когда элементы системы, относящиеся к материальным точкам, взаимодействуют с элементами в виде твердого тела, совершающего плоское или пространственное движение.

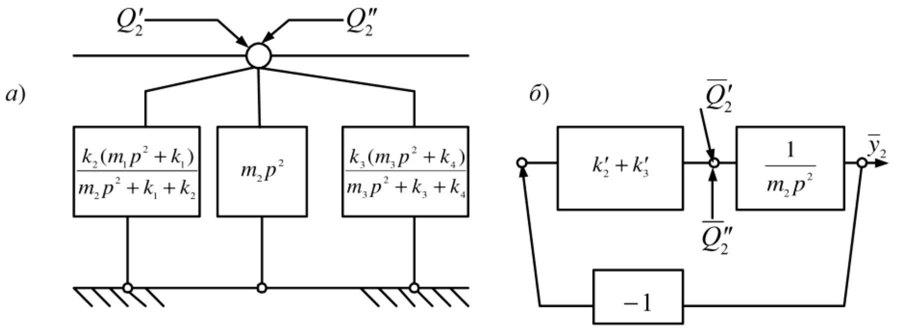

Рисунок 9 – Принципиальные схемы для механической системы на рисунке 7:
а – структурная схема с дуальными элементами; *б* – структурная схема эквивалентной САУ

Список литературы

1 Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев [и др.]. – Иркутск : Изд-во Ирк. гос. ун-та, 2008. – 523 с.

2 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.

3 **Дружинский, И. А.** Механические цепи / И. А. Дружинский. – М. : Машиностроение, 1977. – 240 с.

4 **Гарднер, М. Ф.** Переходные процессы в линейных системах : пер. с англ. / М. Ф. Гарднер, Дж. Л. Бэрнс. – М. : Физматгиз, 1961. – 442 с.

5 **Елисеев, С. В.** Непланарность в структурных аналогах механических систем с межкоординатными связями / С. В. Елисеев, А. П. Хоменко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Вып. 4(32). – Иркутск : ИрГУПС. – 2012. – С. 8–17.

6 **Елисеев, С. В.** Обобщенная пружина в задачах динамики машин и оборудования / С. В. Елисеев, С. В. Белокобыльский, Р. Ю. Упырь // Сборник трудов Полтавского национального технического университета. – Полтава : ПолтНГУ, 2009. – Вып. № 3 (25). – С. 79–89.

7 **Елисеев, С. В.** Рычажные связи в механических цепях / С. В. Елисеев, С. В. Белокобыльский // Системы. Методы. Технологии. – № 3 (15). – Братск : БрГУ, 2012. – С. 7–12.

8 **Елисеев, С. В.** Оценка форм взаимодействия между парциальными системами в механических цепях. Возможные упрощения / С. В. Елисеев, П. А. Лонцих // Вестник Иркутского государственного технического университета. – Иркутск : ИрГТУ, 2012. – С. 17–21.

Получено 04.06.2012

S. V. Eliseev, Yu. V. Ermoshenko. Some questions of approximation of structural schemes of mechanical chains with nonplanarities.

The method of striking off of nonplanarities based on striking off of corresponding coordinates are offered. Possibilities of definition of generalized forces under transformation one of some system of coordinates in another are shown. The examples of creature of structural schemes based on theory of chains and theory of automatic control of movement are considered.