

УДК 652.72

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования;  
 А. П. ХОМЕНКО, доктор технических наук, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С СОЧЛЕНЕНИЯМИ

Рассматриваются вопросы построения математических моделей механических систем с сочленениями. Предлагается метод построения моделей, который заключается в реализации некоторой последовательности действий по выбору точек возможного сочленения двух тел и системы соответствующих координат.

**Введение.** Механические колебательные системы могут иметь сочленения различных типов, что обеспечивает особенности структуры системы и так называемой «метрики» [1]. Вращательные сочленения твердых тел приносят в системы рычажные связи. Поскольку сочленения уменьшают число степеней свободы системы в целом, то достаточно рациональным подходом представляется первоначальное составление более общей модели без ограничений движения.

**Общие положения. Постановка задач исследования.** Набор возможных сочленений может обеспечивать сложные формы взаимодействий, в том числе и на основе обычных вращательных кинематических пар V класса [4]. На рисунке 1 представлена расчетная схема виброзащитной системы, в которой имеется два блока, которые показаны контурами I и II. В основе блоков – твердое тело, обладающее массой и моментом инерции; в составе ВЗС имеются упругие элементы, предполагается, что смещение центра тяжести блока I не оказывает существенного влияния на динамику системы в целом, а силы сопротивления достаточно малы.

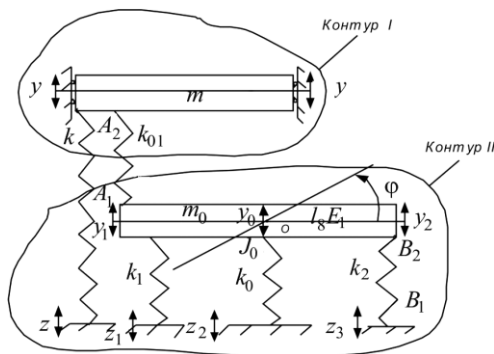


Рисунок 1 – Расчетная схема, имеющая два контура взаимодействия

Расчетная схема в виде колебательной системы с тремя степенями свободы ( $y_1, y_2, y_3$ ) может рассматриваться как фрагмент ВЗС, в которой совместно работает блок I (контур I) и блок II (контур II), состоящий из твердого тела, опирающегося на упругие опоры. Контур I и II находятся во взаимодействии через упругий связующий элемент  $k_{01}$ . В свою очередь, твердое тело опирается не только на упругие опоры  $k_1$  и  $k_2$ , но имеет упругую связь  $k_0$ , линия действия которой проходит через центр тяжести балки в точке O. Примем, что  $A_1O = l_1, B_2O = l_2$ , а присоединенная масса  $m$  не вызывает значительных изменений массоинерционных параметров системы. Силы сопротивления также счи-

таются малыми. Полагая жесткости  $k_{01}$  и  $k_0$  достаточно большими, можно преобразовать расчетную схему к виду, как показано на рисунке 2.

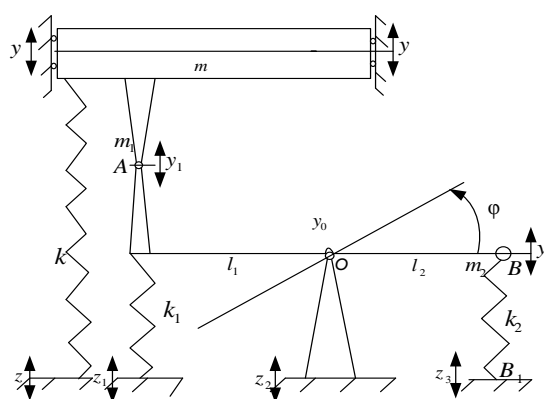


Рисунок 2 – Преобразованная расчетная схема, содержащая сочленения

Для данной расчетной схемы могут быть получены математические модели, свойства которых зависят от выбора системы обобщенных координат. При этом представляет интерес формализм построения уравнений движения, на основе которых могут быть построены структурные схемы и определены передаточные функции системы. Передаточные функции дают возможность определить появление различных режимов движения и оценить роль и влияние введения сочленений.

**Построение математических моделей.** Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий для расчетной схемы, приведенной на рисунке 2:

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$P = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_2(y - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2, \quad (2)$$

где  $y_2$  – скорость элемента массой  $m_2$  в абсолютном движении, которая определяется из соотношения

$$\dot{y}_2 = -\left(\frac{\dot{y}}{l_1} \cdot l_2\right) + \dot{z}_2. \quad (3)$$

Знак минус отражает изменения движения, вызванное рычагами второго рода.

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2[-\dot{y}i + \dot{z}_2(1 + i)]^2, \quad (4)$$

где  $i = l_2/l_1$  – передаточное отношение рычага.

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_{2a6}-z_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2[-yi+z_2(1+i)-z_3]^2. \quad (5)$$

Получим дифференциальное уравнение движения для системы на рисунке 2:

$$\ddot{y}(m_1+m_2+m_2i^2) + y(k+k_1+k_2i^2) =$$

$$= m_2(1+i)\ddot{z}_2 + z_2k_2(1+i) + k_1z_1 + kz - k_2iz_3. \quad (6)$$

Для упрощения расчетов примем, что  $z_1 = z_2 = z_3$ ;  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$ . Тогда передаточная функция системы примет вид

$$W(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{z}(p)} = \frac{m_2(1+i)ip^2 + k}{(m_1+m+m_2i^2)p^2 + k}, \quad (7)$$

где  $p = j\omega$  – комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ).

В качестве примера на рисунке 3 показано семейство амплитудно-частотных характеристик, построенных на основе (7) при изменении значений передаточного отношения рычага  $i$  в пределах 0–3 с шагом 0,5. В качестве исходных приняты следующие параметры системы:  $m = 100$  кг;  $m_1 = m_2 = 20$  кг;  $k = 10000$  Н/м.

На рисунке 3 через  $\omega_1$ – $\omega_6$  обозначены частоты динамического гашения колебаний. Соответствующие значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами динамического гашения приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами динамического гашения  $\omega_1$ – $\omega_6$  для системы на рисунке 3

$i$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Значение частот динамического гашения	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
	25,81	15,81	11,54	9,12	7,55	6,45
Значение частот собственных колебаний	$\omega_{cob1}$	$\omega_{cob2}$	$\omega_{cob3}$	$\omega_{cob4}$	$\omega_{cob5}$	$\omega_{cob6}$
	8,94	8,45	7,78	7,7	6,38	5,77

Из сравнения амплитудно-частотных характеристик следует, что при увеличении  $i$  происходит смещение частот динамического гашения влево, то есть разность частот  $\omega_{cob} - \omega_{дин}$  уменьшается. При этом частота собственных колебаний также уменьшается, но гораздо медленнее.

$$|W(p)|_{p \rightarrow \infty} = \frac{m_2i + m_2i^2}{m_1 + m + m_2i} < 1; \text{ чем больше } i, \text{ тем больше будет}$$

$$\text{значение } |W(p)|_{p \rightarrow \infty}. \text{ При } i \rightarrow \infty |W(p)|_{p \rightarrow \infty} = \frac{m_2i + m_2i^2}{m_1 + m + m_2i} = 1.$$

Более детализированная информация о свойствах динамического гасителя колебаний представлена в работе [5].

**Построение математических моделей в различных системах координат.** Произведем ряд выкладок в развитие метода получения математических моделей систем с сочленениями, основанного на упрощениях некоторых более общих систем. При этом используются особенности, возникающие при наложении связей. Вернемся к исходной схеме, приведенной на рисунке 1. Выражения (4) и (5) для кинетической и потенциальной энергий можно преобразовать к виду

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \quad (8)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_0-z_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}k_2(y_2-z_3)^2 + \frac{1}{2}k_{01}(y-y_1)^2, \quad (9)$$

где  $J_0$  – момент инерции,  $m_0$  – масса промежуточного тела (может превращаться в  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных рычагом);  $m$  – масса объекта;  $k, k_0, k_1, k_2$  – упругие элементы, промежуточного тела, опирающегося на основание;  $z-z_3$  – кинематические возмущения. Координаты точек  $A_1$  и  $A_2$ , определяются следующим образом:

$$y_{A1} = y_1 \text{ и } y_{A2} = y. \quad (10)$$

Для получения сочленений между элементами необходимо выполнение условий

$$y_1 - y = 0, \quad y_{10} = 0, \quad (11)$$

где исходные значения  $y_{10} = y_0 - z_2$ .

Определим для исследований координаты  $y_0, \phi$  и запишем ряд соотношений:

$$y_0 = ay_1 + by_2; \quad \phi = c(y_2 - y_1);$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \quad (12)$$

При движении объекта защиты в системе координат  $y_0, y_2$  и  $y_1$  выражение для кинетической энергии можно привести к виду

$$T = \frac{1}{2}m_0(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}J_0c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2. \quad (13)$$

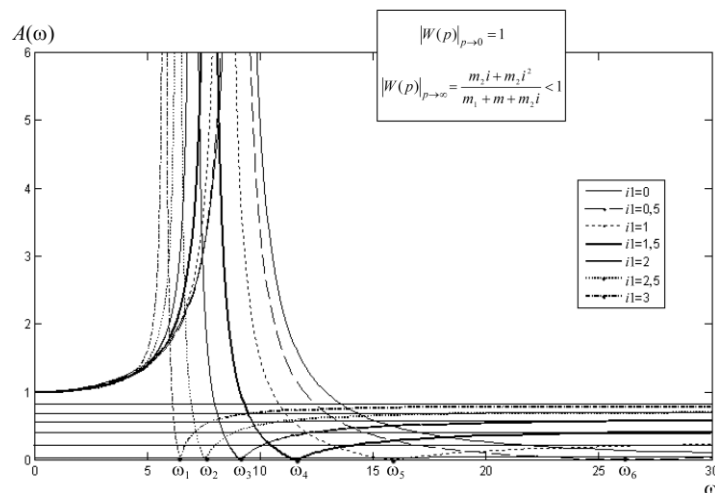


Рисунок 3 – Семейство амплитудно-частотных характеристик системы с передаточной функцией (8)

Соответственно потенциальная энергия в данном случае

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(ay_1+by_2-z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2-z_3)^2 + \frac{1}{2}k_{01}(y-z_1)^2. \quad (14)$$

В таблице 2 приведены значения коэффициентов уравнений в координатах,  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y$ , полученных обычным образом [2].

Таблица 2 – Значения коэффициентов уравнений движения системы (см. рисунок 1) в координатах  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m_0a^2 + J_0c^2)p^2 + k_1 + k_0a^2$	$(m_0ab - J_0c^2)p^2 + k_0ab$	0
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(m_0ab - J_0c^2)p^2 + k_0ab$	$(m_0b^2 + J_0c^2)p^2 + k_0b^2 + k_2$	0
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
0	0	$mp^2 + k + k_{01}$

Обобщенные силы по координатам  $y_0$ ,  $y_2$  и  $y_1$  имеют вид

$$Q_{y_1} = k_1z_1 + k_0az_2; Q_{y_2} = k_0bz_2 + k_2z_3; Q_y = kz + k_{01}z_1. \quad (15)$$

Полученные уравнения описывают движение в системе координат, отражающих вертикальные перемещения массоинерционных элементов ВЗС. Такую математическую модель можно назвать базовой. Особенность матрицы заключается в том, что  $a_{13} = a_{31} = 0$ ,  $a_{23} = a_{32} = 0$ ; это зависит от характера динамических взаимодействий, определяемых структурой (см. рисунок 1) и выбором системы обобщенных координат.

Перейдем к системе координат  $x = y - y_1$ ,  $y_0$  и  $\varphi$ ; запишем ряд соотношений  $y = x + y_1 = x + y_0 - l_1\varphi$  и получим выражение для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}m_0(\dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y}_0 - l_1\dot{\varphi})^2, \quad (16)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(x + y_0 - l_1\varphi - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_0 - l_1\varphi - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_0 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_0 + l_2\varphi - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_{01}x^2. \quad (17)$$

Значения коэффициентов уравнений в координатах  $\varphi$ ,  $y_0$  и  $x$  соответственно представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения коэффициентов уравнений в координатах  $\varphi$ ,  $y_0$  и  $x$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(ml^2 + J_0)p^2 + kl^2 + k_1l^2 + k_2l^2$	$(-ml_1)p^2 - kl_1 + k_1l_1 + k_2l_2$	$(-ml_1)p^2 - kl_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(-ml_1)p^2 - kl_1 + k_1l_1 + k_2l_2$	$(m_0 + m)p^2 + k + k_1 + k_0 + k_2$	$(m)p^2 + k$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(-ml_1)p^2 - kl_1$	$(m)p^2 + k$	$(m)p^2 + k + k_{01}$

Обобщенные силы по координатам  $\varphi$ ,  $y_0$  и  $x$  имеют вид

$$Q_\varphi = -kl_1z + k_1l_1z_1 + k_2l_2z_3; Q_{y_0} = kz + k_1z_1 + k_0z_2 - k_2z_3; Q_x = kz. \quad (18)$$

Математическая модель в системе координат  $\varphi$ ,  $y_0$  и  $x$  отличается от предыдущей модели (координаты  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y$ ) тем, что «нулевые» клетки в матрице коэффициентов отсутствуют. Что касается координаты  $x = y - y_1$ , то она может быть «обнулена» предположением, что  $k_{01} \rightarrow \infty$  и образуется сочленение, которое можно рассматривать как кинематическую пару. Физически это означает, что масса  $m$  присоединяется к элементу в т. А с массоинерционными параметрами  $m_0$ ,  $J_0$  и изменяет их (и общую массу, и момент инерции). Движение системы будет описываться в этом случае координатами  $y_0$  и  $\varphi$ . Необходимые данные для получения передаточных функций можно получить, исключая столбец и строку, содержащие  $x$  (фактически переменная устраняется, а порядок матрицы уменьшается на единицу).

Для дальнейших расчетов введем систему координат  $y_0$ ,  $y_1$  и  $x$ . Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергий в координатах  $y_0$ ,  $y_1$  и  $x$  преобразуются к виду

$$T = \frac{1}{2}m_0(\dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}J_0a_0^2(\dot{y}_0 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y}_1 + \dot{x})^2$$

или

$$T = \frac{1}{2}m_0(\dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y})^2, \quad (19)$$

где  $y = y_1 + x$ ;  $x = y + y_1$ . Тогда

$$\varphi = c(y_2 - y_1); y_0 = ay_1 + by_2; y_2 = \frac{y_0 - ay_1}{b}. \quad (20)$$

Запишем

$$\varphi = cy_2 - cy_1 = \frac{c \cdot (y_0 - ay_1)}{b} - cy_1 = \frac{cy_0 - cay_1 - bcy_1}{b} = \frac{c}{b}(y_0 - y_1)$$

и найдем

$$\varphi = a_0(y_0 - y_1),$$

где

$$a_0 = \frac{c}{b}; y_0 = ay_1 + by_2; y_2 = \frac{y_0 - ay_1}{b} = \frac{1}{2}y_0 - \frac{a}{b}y_1 = a_{10}y_0 - a_{01}y_1.$$

В этом случае выражение для потенциальной энергии в развернутой форме в координатах  $y_0$ ,  $y_1$  и  $x$  будет иметь вид

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y_1 + x - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_0 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_{10}y_0 - a_{01}y_1 - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_{01}x^2, \quad (21)$$

где  $a_{10} = \frac{1}{b}$  и  $a_{01} = \frac{a}{b}$ .

В таблице 4 представлены значения коэффициентов уравнений системы (см. рисунок 1) в координатах  $y_1$ ,  $y_0$  и  $x$ .

Таблица 4 – Значения коэффициентов уравнений в координатах  $y_1$ ,  $y_0$  и  $x$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m + J_0a_0^2)p^2 + k + k_1 + k_2a_{01}^2$	$(-J_0a_0^2)p^2 - k^2a_{01}a_{10}$	$(-m)p^2 + k$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(-J_0a_0^2)p^2 - k_2a_{01}a_{10}$	$(m + J_0a_0^2)p^2 + k + k_2a_{10}^2$	0
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(-m)p^2 + k$	0	$(m)p^2 + k + k_{01}$

Обобщенные силы по координатам  $x$ ,  $y_0$  и  $y_1$  принимают вид

$$Q_x = -kz; \quad Q_{y_0} = k_0z_2 + k_2a_{01}z_3; \quad Q_{y_1} = kz - k_2a_{01}z_3 + k_1z_1. \quad (22)$$

В системе координат  $y_1$ ,  $y_0$  и  $x$  возможно также введение сочленения и по координате  $x$ . Для получения передаточной функции системы, имеющей две степени свободы  $y_0$  и  $y_1$ , необходимо исключить соответствующие столбцы и строку. Отметим, что, если  $x = 0$ , то  $y_1 = y$  и движение системы при одном шарнире в точке  $A$  будет описываться координатами  $y_0$  и  $y_1$ . В данном случае рычаг имеет упругое опирание для своего центра вращения. Наибольший интерес представляет все же случай с двумя сочленениями.

**Введение двух сочленений.** Рассмотрим систему координат  $y_{10}$ ,  $y$  и  $x$ . Вводя ряд соотношений ( $y_{10} = y - z_2$ ), запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}m_0(\dot{y}_{10} + \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2}J_0a_0^2(\dot{y}_{10} + \dot{z}_2 - \dot{y} + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y})^2, \quad (23)$$

где  $a_0 = \frac{c}{b}$ ,

а также определим выражение для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2}k(y-z)^2 = \frac{1}{2}k(y^2 - 2yz + z^2); \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}k_1(y-x-z_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2}k_1(y^2 - 2yx + x^2 - 2z_1y + 2z_1x + z_1^2); \quad \Pi_3 = \frac{1}{2}k_0(y_{10})^2; \\ \Pi_4 &= \frac{1}{2}k_2(a_{10}y_{10} - a_{01}y + a_{01}x + z_0)^2 = \frac{1}{2}k_2(a_{10}^2y_{10}^2 - \\ &- 2a_{10}a_{01}y_{10}y + a_{01}^2y^2 + 2a_{01}^2x + 2a_{01}xz_0 + z_0^2 + 2a_{01}a_{10}xy_{10} - \\ &- 2a_{01}^2xy + 2a_{10}z_0y_{10} - 2a_{01}z_0y); \quad \Pi_5 = \frac{1}{2}k_0x^2; \quad z_0 = a_{10}z_2 - z_3. \end{aligned}$$

В таблице 5 приведены коэффициенты уравнений в координатах  $y_{10}$ ,  $y$  и  $x$ .

Таблица 5 – Значения коэффициентов уравнений в координатах  $y_{10}$ ,  $y$  и  $x$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m_0 + J_0a_0^2)p^2 + k_0 + k_2a_{10}^2$	$(-J_0a_0^2)p^2 - k_2a_{10}a_{01}$	$(J_0a^2)p^2 + k_2a_{10}a_{01}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(-J_0a_0^2)p^2 - k_2a_{10}a_{01}$	$(m + J_0a_0^2)p^2 + k + k_2a_{01}^2 + k_1$	$(-J_0a_0^2)p^2 - k_1 - k_2a_{01}^2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(J_0a_0^2)p^2 + k_2a_{10}a_{01}$	$(-J_0a_0^2)p^2 - k_1 - k_2a_{01}^2$	$(J_0a_0^2)p^2 + k_1 + k_2a_{01}^2 + k_0$

Обобщенные силы по координатам  $y_{10}$ ,  $y$  и  $x$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{y_{10}} &= -(m_0 + J_0a_0^2)\ddot{z}_2 - k_2a_{10}z_0; \\ Q_y &= (J_0a_0^2)\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2a_{01}z_0; \\ Q_x &= -(J_0a_0^2)\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2a_{01}z_0. \end{aligned} \quad (25)$$

При  $z_0 = a_{10}z_2 - z_3$  получим следующие выражения для обобщенных сил:

$$\begin{aligned} Q_{y_{10}} &= -(m_0 + J_0a_0^2)\ddot{z}_2 - k_2a_{10}z_0 = \\ &= -(m_0 + J_0a_0^2)p^2 - k_2a_{10}^2z_2 - k_2a_{10}z_3; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= -(J_0a_0^2)\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2a_{01}z_0 = \\ &= J_0a_0^2p^2 + kz + k_1z_1 + k_2a_{01}a_{01}z_2 - k_2a_{01}z_3; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -(J_0a_0^2)\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2a_{01}z_0 = \\ &= -J_0a_0^2p^2 - k_1z_1 - k_2a_{01}a_{01}z_2 + k_2a_{01}z_3. \end{aligned} \quad (28)$$

В данной системе координат имеется возможность выхода на два сочленения: по координате  $y_{10}$  и по координате  $x$ . Используя матрицу (см. таблицу 5) и исключая соответствующие строки и столбцы, получим уравнение движения для системы с двумя сочленениями

$$(m_0 + J_0a_0^2)p^2 + k + k_2a_{01}^2 + k_1 = J_0a_0^2\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2a_{01}z_0. \quad (29)$$

Для упрощения принимаем, что  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_3 = 0$ ; при этом  $z = z_2$ , тогда уравнение (29) преобразуется к виду

$$\bar{y}(m_0 + J_0a_0^2)p^2 + k = (J_0a_0^2p^2 + k)\bar{z}, \quad (30)$$

откуда передаточная функция системы принимает вид

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{J_0a_0^2 + k}{m + J_0a_0^2 + k}. \quad (31)$$

Сравнение (31) и (7) показывает, что структура передаточных функций является общей и предлагаемый подход позволяет построить необходимые математические модели.

Для получения полного совпадения результатов необходимо представить расчетную схему более детализированной. Для вывода (7) использовалась схема, показанная на рисунке 2. Особенность этой расчетной схемы заключается в учете массоинерционных свойств рычажных связей. Рассмотрим в связи с этим расчетную схему системы на рисунке 4, которая отражает массоинерционные свойства системы. На расчетной схеме (см. рисунок 4) показаны массы  $m_1$  и  $m_2$ ; учет особенностей их движения является существенным фактором для совпадения выражений (7) и (31).

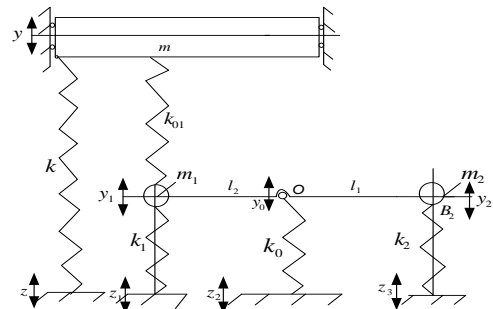


Рисунок 4 – Расчетная схема ВЗС на рисунке 1, но с рассмотренными массами  $m_1$  и  $m_2$

Выберем для дальнейших расчетов систему координат  $y$ ,  $y_{10}$  и  $x$ , полагая при этом, что  $y_{10} = y_0 + z$ ,  $x = y - y_1$ , где  $y_0 = ay_1 + by_2$ . Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2 + \frac{1}{2}k_0(y - y_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_0(y_0 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Произведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 - ay_1 = a_0y_0 - iy_1, \quad i = \frac{a}{b} = \frac{l_2}{l_1}; \quad a_0 = \frac{1}{b}; \\ y_2 &= a_0y_{10} + a_0z_2 - iy + ix_0 = y_{10} + x. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда получим (32), (33) в виде

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(a_0\dot{y}_{10} + a_0\dot{z}_2 - i\dot{y} + i\dot{x})^2, \quad (35)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y - x - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_0y_{10} - iy + ix + z_0)^2 + \frac{1}{2}k_{01}x^2 + \frac{1}{2}k_0(y_{10})^2, \quad (36)$$

где  $z_0 = a_0z_2 - z_3$ . Сделав ряд вспомогательных выкладок, аналогичных вышеприведенным при выводе уравнений движения, получим уравнения движения в виде

$$\ddot{y}(m_1 + m_2i^2 + m) + y(k + k_1 + k_2i^2) + \ddot{x}(-m_1 - m_2i^2) + x(-k_1 - k_2i^2) + \ddot{y}_{10}(-m_2ia_0) + y_{10}(-k_2a_0i) = m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i; \quad (37)$$

$$\ddot{y}(-m_1 - m_2i^2) + y(-k_1 - k_2i^2) + \ddot{x}(m_1 + m_2i^2) + x(k_1 + k_{01} + k_2i^2) + \ddot{y}_{10}(m_2ia_0) + y_{10}(k_2a_0i) = -m_2a_0i\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2z_0i; \quad (38)$$

$$\ddot{y}(-m_2ia_0) + y(-k_2i^2a_0) + \ddot{x}(m_2ia_0) + x(k_2ia_0) + \ddot{y}_{10}(m_2a_0^2) + y_{10}(k_2a_0^2 + k_0) = -m_2a_0^2\ddot{z}_2 - k_2a_0z_0. \quad (39)$$

В таблице 6 приведены коэффициенты уравнений (37)–(39). Обобщенные силы в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i; \\ Q_x &= -a_0im_2\ddot{z}_2 - k_1z_1 - k_2i z_0; \\ Q_{y_{10}} &= -m_2a_0^2\ddot{z}_2 - k_2a_0z_0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Исключая из матрицы столбцы и строки по координатам  $x$  и  $y_{10}$ , получим уравнение движения для системы с координатой  $y$

$$\ddot{y}(m_1 + m + m_2i^2) + y(k + k_1 + k_2i^2) = m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i. \quad (41)$$

Таблица 6 – Значения коэффициентов уравнений в координатах  $y$ ,  $x$  и  $y_{10}$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m_1 + m + m_2i^2)p^2 + k + k_1 + k_2i^2$	$(-m_1 - m_2i^2)p^2 - k_1 - k_2i^2$	$-m_2ia_0p^2 - k_2a_0i$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(-m_1 - m_2i^2)p^2 - k_1 - k_2i^2$	$(m_1 + m_2i^2)p^2 + k_1 + k_{01} + k_2i^2$	$m_2ia_0p^2 + k_2a_0i$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-m_2ia_0p^2 - k_2a_0i$	$m_2ia_0p^2 + k_2a_0i$	$m_2a_0^2p^2 + k_2a_0^2 + k_0$

Получено 04.06.2012

**S. V. Eliseev, A. P. Khomenko.** Change of dynamical properties of mechanical oscillation systems on base of introduction of couplings of links.

Questions of building of mathematical models of mechanical systems with couplings are considered. The method of models creature which is in realization certain actions succession on choice of points of possible coupling of two bodies and system of appropriate coordinates.

Для построения передаточной функции «смещение  $y$  по входу  $z_2$ » примем, что  $z = z_2$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_3 = z_2$ ,  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ . В этом случае при  $k_{01} \rightarrow \infty$ ,  $k_0 \rightarrow \infty$

$$W = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{m_2a_0ip^2 + k}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k}. \quad (42)$$

Отметим, что  $\frac{1}{b} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} = 1 + i$ ; в этом случае

$$W = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{m_2i(i+1)p^2 + k}{(m + m_1 + m_2i^2)p^2 + k}. \quad (43)$$

Выражения (7) и (43) полностью совпадают, что собственно и требовалось доказать.

**Заключение.** Таким образом, выбирая систему обобщенных координат соответствующим образом, можно построить математическую модель механической системы с сочленениями. В этом случае система с сочленениями обладает меньшим числом степеней свободы, чем у исходной системы. Сочленение возможно между двумя телами при соединении двух тел в кинематическую пару вращательного вида (V класса). Однако возможны и соединения твердого тела и с другим телом с потерей возможности относительного движения.

Предлагаемый метод получения математических моделей обладает возможностями реализации поисковых технологий в разработке новых способов и средств защиты объектов от вибрационных воздействий.

Особенности метода таковы, что при выборе систем координат исходной системы и числа сочленений, их форм и мест расположения, что позволяют получать семейства технических решений, из которых могут быть выделены схемы, представляющие интерес для решения конкретных задач динамики машин.

#### Список литературы

- 1 **Упырь, Р. Ю.** Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм сочленений элементарных звеньев : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Р. Ю. Упырь; ИрГУПС. – Иркутск, 2009. – 19 с.
- 2 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в задачах динамики колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 394 с.
- 3 **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
- 4 **Хоменко, А. П.** Сочленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы движения / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Вып. № 4 (28). – Иркутск : ИрГУПС, 2010. – С. 8–15.
- 5 **Трофимов, А. Н.** Об оценке свойств рычажных динамических гасителей колебаний / А. Н. Трофимов // Системы. Методы. Технологии. Вып. № 3(11). – Братск : БрГУ, 2011. – С. 45–60.