УДК 528.063

А. Ю. БУДО, аспирант, Полоцкий государственный университет; Н. С. СЫРОВА, ассистент, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НЕОБОБЩЁННЫМ И ОБОБЩЁННЫМ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

Рассмотрены необобщенный и обобщенный методы уравнивания геодезических сетей и выявлены критерии их использования в строительстве. В результате чего был сделан вывод, что при обработке спутниковых измерений, зависимых по своей природе, применяют обобщенный многокритериальный метод.

Необобщённый многокритериальный способ уравнивания геодезических сетей применяют в расчётно-исследовательских работах с 1999 г. При его использовании анализируют две целевые функции: основную многостепенную и дополнительную целевую, обеспечивающую минимум или ошибки положения определяемого пункта в наиболее слабом месте, или при минимизации точности определения площадей, или в других случаях. Из обобщённых методов уравнивания хорошо известен алгоритм с 1970 г обобщённого метода наименьших квадратов (МНК).

Необобщённый многокритериальный метод. В процессе многокритериальной оптимизации используют векторный, а не один скалярный показатель эффективности решения. В геодезической практике этот новый подход уже применяют на производстве не взамен прежним технологиям, а в дополнение к ним. Предшественником многокритериального способа является алгоритм уравнивания L_p-оценок, в котором применяется лишь одна степень n (при $n = 1$ получается метод наименьших модулей, при $n = 2$ – МНК, возможно применение не только целых, но и дробных степеней).

Недостаток метода L_p-оценок заключается в постоянстве показателя степени n для всех разнородных измерений. В результате дальнейших исследований появился многостепенной метод, который позволяет, например, в полигонометрии для углов применять одну степень, а для сторон – другую. Целевая функция многостепенной оптимизации в необобщённом случае

$$\Phi_1(X) = \left(L(X)^{\frac{n}{2}} \right)^T P_n \left| L(X) \right|^{\frac{n}{2}}, \tag{1}$$

где $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения связи.

Если степени n определены не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте, то получим многокритериальную оптимизацию, т. к. в поиске решения участвуют два критерия: выраженный в (1) и

$$\Phi_2(X, n) = \min(\max M). \tag{2}$$

Чтобы воспользоваться этим выражением на практике, необходимо учитывать особенности оценки точности результатов уравнивания при различных n.

Вместо численных методов предлагаем применять другой, аналитический подход к решению задачи по многокритериальной оптимизации линеаризованным методом Ньютона [2]:

$$X^{(j+1)} = X^j - (A^T C A)^{-1} A^T \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n_i - 1} \right) C L(X^j), \tag{3}$$

где j – номер приближения; A – матрица коэффициентов линейных параметрических уравнений поправок, а

$$C = \operatorname{diag}\{ n_i (n_i - 1) P_{n_i} \left| L_i(X) \right|^{n_i - 2} \}; \tag{4}$$

аналитическое выражение

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C. \tag{5}$$

Точность функции уравненных и измеренных величин оценивается с помощью обратной весовой матрицы, которую можно вычислить по формуле

$$Q = F P_n^{-1} F^T. \tag{6}$$

Корреляционная матрица измерений по результатам уравнивания геодезических сетей

$$K_u = A F P_n^{-1}. \tag{7}$$

Основные формулы **обобщённого многокритериального способа:**

$$(P_n)_{N \times N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^{n_1}} & & & \\ & \frac{1}{m_2^{n_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{m_n^{n_N}} \end{pmatrix}_{N \times N} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{m_i^{n_i}} \right); \tag{8}$$

$$H = Z + A^T C_2 A; \tag{9}$$

$$G = A^T C_3 l, \tag{10}$$

где

$$C_1 = K_n^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{n_i \left| n_i - 2 \right|}{2} \right) \left\{ \left| L_i(X)^{\frac{n_i - 4}{2}} \right| \left[\left| L_i(X)^{\frac{n_i}{2}} \right| \right] \right\}; \tag{11}$$

$$C_2 = K_n^{-1} \operatorname{diag}(S_i n_i) \left\{ \left| L_i(X) \right|^{\frac{n_i - 2}{2}} \left[\operatorname{diag}\left(S_i \frac{n_i}{2} \right) \left| L_i(X) \right|^{\frac{n_i - 2}{2}} \right]^T \right\}; \tag{12}$$

$$C_3 = K_n^{-1} \operatorname{diag}(S_i n_i) \left\{ \left| L_i(X) \right|^{\frac{n_i - 2}{2}} \left[\left| L_i(X) \right|^{\frac{n_i}{2}} \right]^T \right\}; \tag{13}$$

Расширенная псевдообратная матрица может быть получена по двум формулам [3]:

$$F = H^{-1} A^{T} C_2, \tag{14}$$

а в случае зависимых величин –

$$F = \mathrm{diag}\left(\frac{2}{n_j^2}\right) H^{-1} A^{T} C_2,\ 1 \le j \le N, \tag{15}$$

где коэффициент $\left(\frac{2}{n_j^2}\right)$ получен методом испытаний путём сравнения оценок точности для различных примеров.

Корреляционная матрица измерений по результатам уравнивания обобщённым способом геодезических сетей

$$K_u = AFK_n. \tag{16}$$

При многокритериальной оптимизации с применением формул (8)–(13) применим не только функцию (2), но и новую функцию

$$\Phi_2 = (X, n) = \sum_{i=1}^{N} \left| \min_{1 \le j \le N} (K_u)_j \right|_i . \tag{17}$$

Далее приведены C_5 для матрицы K, в которой используются абсолютные значения из минимальных коэффициентов корреляции по строкам корреляционной матрицы K_u, приведённой к виду матрицы K_r, с единицами на диагонали и коэффициентами корреляции вне её.

Выражение (16) разработано на основе известного равенства

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_x^2 + \\ + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{x,y} m_x m_y + \ldots , \tag{18}$$

откуда следует, что m_u будет минимальным при минимальных (даже отрицательных) коэффициентах корреляции r. Рассмотрим геодезический четырёхугольник (рисунок 1).

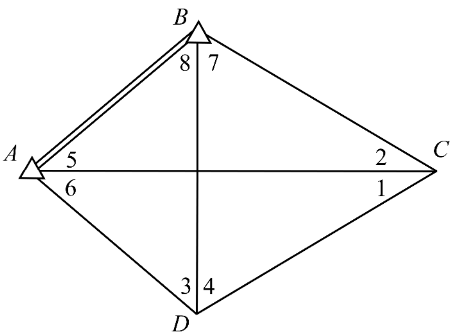

Рисунок 1 – Геодезический четырёхугольник:

Номер угла	Измеренные углы	Номер угла	Измеренные углы
1	50° 01′ 55″	5	37° 58′ 22″
2	41° 41′ 41″	6	75° 45′ 05″
3	26° 57′ 40″	7	61° 01′ 37″
4	27° 14′ 40″	8	39° 18′ 30″

В процессе вычислений выяснилось, что формулы (1)–(6) дают один и тот же результат, что и формулы (14)–(15), если заменить в последних K_n на P_n^{-1}.

Необобщённый метод уравнивания. С применением критериальной функции (2) получим: координаты после уравнивания: $\hat{x}_C$ = 1249,900 м; $\hat{y}_C$ = 1230,083 м; $\hat{x}_D$ = 99,959 м; $\hat{y}_D$ = 499,965 м; μ = 2,554; ошибка положения определяемых пунктов M_C = 0,0628 м; M_D = 0,061 м.

Необобщённый метод уравнивания. С применением критериальной функции (2) получим: координаты после уравнивания: $\hat{x}_C$ = 1249,900 м; $\hat{y}_C$ = 1230,083 м; $\hat{x}_D$ = 99,959 м; $\hat{y}_D$ = 499,965 м; μ = 2,554; ошибка положения определяемых пунктов M_C = 0,0628 м; M_D = 0,061 м.

$$K_u = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & -0{,}1 & -0{,}4 & -0{,}2 & -0{,}4 & -0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}3 & -0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}1 & -0{,}8 & -0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 & 1{,}3 & -0{,}9 & -0{,}8 & -0{,}5 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}1 & 0{,}7 & 1{,}0 & -0{,}5 & -0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}0 & -0{,}2 & -0{,}7 & -0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}8 & 0{,}0 \\ -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}8 & -1{,}2 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}3 & -0{,}9 & -1{,}4 & 0{,}0 & 0{,}4 & 1{,}2 \end{pmatrix};$$

$$n = \begin{pmatrix} 1{,}12 \\ 1{,}20 \\ 1{,}13 \\ 2{,}43 \\ 2{,}95 \\ 2{,}36 \\ 2{,}45 \\ 2{,}27 \end{pmatrix}; \qquad V_n = \begin{pmatrix} -0{,}18 \\ 0{,}00 \\ 0{,}06 \\ 19{,}89 \\ -10{,}94 \\ 20{,}23 \\ -12{,}71 \\ 13{,}65 \end{pmatrix}.$$

Для критериальной функции (17) имеем: координаты после уравнивания: $\hat{x}_C$ = 1249,902 м; $\hat{y}_C$ = = 1230,092 м; $\hat{x}_D$ = 99,971 м; $\hat{y}_D$ = 499,972 м; μ = = 3,700; ошибки положения определяемых пунктов M_C = 0,1244 м; M_D = 0,1714 м;

$$K_u = \begin{pmatrix} 1{,}0 & -0{,}2 & -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}0 & -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}6 \\ -0{,}2 & 1{,}0 & 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 0{,}4 & 1{,}0 & 0{,}1 & -0{,}6 & -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}8 & -0{,}6 & 0{,}0 & -0{,}4 \\ 0{,}0 & -0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}6 & 1{,}0 & -0{,}2 & -0{,}4 & -0{,}5 \\ -0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}5 & -0{,}2 & 1{,}0 & 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}0 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}7 & -0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}6 & -0{,}5 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix};$$

$$n = \begin{pmatrix} 2,39 \\ 2,40 \\ 1,90 \\ 2,12 \\ 1,30 \\ 1,80 \\ 2,50 \\ 2,50 \end{pmatrix}; \qquad V_n = \begin{pmatrix} -1,39 \\ -1,71 \\ 1,30 \\ 21,60 \\ -11,14 \\ 18,48 \\ -11,51 \\ 14,36 \end{pmatrix}.$$

Обобщённый метод уравнивания. Здесь используется формула $K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}$, где для нашего примера

$$K_r = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0,5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

При уравнивании с применением функции (2): координаты после уравнивания: $\hat{x}_C$ = 1249,890 м; $\hat{y}_C$ = 1230,078 м; $\hat{x}_D$ = 99,968 м; $\hat{y}_D$ = 499,959 м; μ = 3,081; ошибки положения определяемых пунктов M_C = 0,0052 м; M_D = 0,0057 м;

$$K_u = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & -0,1 & -0,4 & -0,2 & -0,4 & -0,6 & -0,8 \\ 0,0 & 1,0 & 0,1 & -0,4 & 0,0 & 0,3 & -0,6 & -0,4 \\ -0,2 & 0,0 & 1,0 & 0,1 & -0,8 & -0,9 & 0,1 & 0,7 \\ -0,2 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 1,3 & -0,9 & -0,8 & -0,5 \\ 0,0 & 0,0 & -0,1 & 0,7 & 1,0 & -0,5 & -0,6 & -0,4 \\ -0,1 & 0,0 & -0,2 & -0,7 & -0,8 & 1,0 & 0,8 & 0,0 \\ -0,2 & 0,0 & 0,0 & -0,8 & -1,2 & 1,0 & 1,0 & 0,2 \\ 0,5 & 0,0 & 0,3 & -0,9 & -1,4 & 0,0 & 0,4 & 1,2 \end{pmatrix};$$

$$n = \begin{pmatrix} 3,26 \\ 2,01 \\ 1,11 \\ 2,32 \\ 3,90 \\ 2,89 \\ 2,56 \\ 2,13 \end{pmatrix}; \qquad V_n = \begin{pmatrix} -0,24 \\ -1,50 \\ 0,50 \\ 20,60 \\ -9,35 \\ 19,14 \\ -14,86 \\ 12,71 \end{pmatrix}.$$

Применим целевую функцию (17): координаты после уравнивания: $\hat{x}_C$ = 1249,901 м; $\hat{y}_C$ = 1230,092 м; $\hat{x}_D$ = 99,969 м; $\hat{y}_D$ = 499,961 м; μ = 4,986; ошибка положения определяемых пунктов M_C = 0,0444 м; M_D = 0,0688 м;

$$K_u = \begin{pmatrix} 1,0 & -0,4 & -0,4 & -0,3 & 0,0 & -0,3 & -0,3 & 0,8 \\ -0,1 & 1,0 & 0,2 & -0,3 & 0,0 & 0,3 & -0,5 & -0,5 \\ -0,6 & 0,6 & 1,0 & 0,1 & -0,5 & -0,4 & -0,1 & 0,0 \\ -0,6 & -0,4 & 0,2 & 1,0 & 0,8 & -0,6 & 0,0 & -0,4 \\ -0,1 & 0,0 & -0,3 & 0,6 & 1,0 & -0,2 & -0,5 & -0,5 \\ -0,2 & 0,3 & -0,3 & -0,4 & -0,2 & 1,0 & 0,4 & -0,5 \\ -0,4 & -0,5 & 0,0 & 0,0 & -0,6 & 0,4 & 1,0 & 0,1 \\ 0,6 & -0,6 & 0,0 & -0,2 & -0,5 & -0,5 & 0,2 & 1,0 \end{pmatrix};$$

$$n = \begin{pmatrix} 2,20 \\ 1,90 \\ 1,30 \\ 1,78 \\ 3,00 \\ 2,00 \\ 2,20 \\ 1,45 \end{pmatrix}; \qquad V_n = \begin{pmatrix} -2,51 \\ -1,72 \\ 0,72 \\ 21,57 \\ -10,98 \\ 20,22 \\ -10,35 \\ 13,04 \end{pmatrix}.$$

Вывод. При уравнивании по МНК или при обработке по методу L_p-оценок, а также в многокритериальном случае как при некоррелированных, так и при коррелированных результатах измерений можно применять универсальные формулы (8)–(16).

Список литературы

1 Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В. И. Мицкевич [и др.] // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 77–79.

2 **Мицкевич, В. И.** Некоторые вопросы робастного уравнивания зависимых GPS-измерений / В. И. Мицкевич, А. Ю. Будо, Ю. П. Будо // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2007. – № 2 (55). – С. 9–11.

Получено 20.10.2010

A. Y. Budo, N. S. Syrova. Methods of obtaining a correlation matrix of measurements using the results of geodetic networks adjustment by a generalized and non-generalized multicriterion method.

As a rule, the non-generalized method is used in production activity; the generalized one is seldom applied, only for reversible results of measurements. The generalized multicriterion method is applied in handling satellite measurements, which are inherently reversible.