МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Информационное и математическое обеспечение транспортных систем»

Т. В. АЛЫМОВА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2017

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Информационное и математическое обеспечение транспортных систем»

Т. В. АЛЫМОВА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Одобрено методической комиссией заочного факультета в качестве учебно-методического пособия

Гомель 2017

УДК 519.21/22(075.8)
ББК 22.171
А56

Рецензент – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины *В. Н. Семенчук*

Алымова, Т. В.

А56 Основы теории вероятностей и математической статистики : учеб.-метод. пособие / Т. В. Алымова : М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2017. – 74 с.
ISBN 978-985-554-681-9

Содержит основные разделы теории вероятностей, предусмотренные учебной программой по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Приведены задания для контрольных работ с примерами их выполнения, а также справочный материал для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов заочного факультета. Может быть использовано при выполнении курсовых и дипломных проектов студентами, аспирантами и научными работниками, занимающимися вероятностными методами.

УДК 519.21/22(075.8)
ББК 22.171

ISBN 978-985-554-681-9

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – математическая дисциплина, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Условимся, что мы будем понимать под «случайным явлением». При научном исследовании различных физических и технических задач часто приходится встречаться с особого типа явлениями, которые принято называть случайными. Случайным называется явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки наблюдений с целью выявления статистических закономерностей, называется **математической статистикой**.

Объектами изучения теории вероятностей и математической статистики являются случайные события, величины и функции, которые характеризуют рассматриваемое случайное явление.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая, в свою очередь, используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

1.1 Пространство элементарных событий. Операции над событиями

1.1.1 Пространство элементарных событий

Вероятностными (случайными) экспериментами (в дальнейшем будем обозначать их символом «Е») называются испытания, которые могут быть многократно воспроизведены при соблюдении одних и тех же фиксированных условий, результат которых не удается заранее однозначно предсказать. Приведем несколько примеров вероятностных экспериментов:

Е: подбрасывание двух монет;

Е: подбрасывание игральной кости;

Е: подсчет числа покупателей в магазине в течение рабочего дня;

Е: изучение отклонения заработной платы работников от среднего значения заработной платы на предприятии и т. д.

Случайными называются явления, исход которых при одинаковом комплексе условий заранее нельзя предсказать.

Однако при многократном воспроизведении указанных экспериментов можно заметить некоторые закономерности. Изучение таких закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов, и разработка математических моделей случайных экспериментов являются предметом **теории вероятностей**.

Опытом, или *экспериментом*, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее случайное явление.

Возможный результат опыта называют *событием.*

Для каждого случайного эксперимента можно указать множество, в котором представлена информация о всех возможных взаимоисключающих исходах этого эксперимента.

Это множество называется *пространством элементарных исходов* (или *событий*). Обозначается буквой Ω (омега).

Элементарным исходом (событием) ω называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента Е.

Пространство элементарных исходов, состоящее из конечного или счетного числа элементов, называется *дискретным.*

Пространство элементарных исходов, состоящее из несчетного числа элементарных исходов, называется *непрерывным*.

В общем случае пространство элементарных исходов Ω может быть любой природы: как конечным, так и бесконечным, как дискретным, так и непрерывным.

Пример 1. Е: Подбрасывание двух монет. Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}.

Пример 2. Е: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 3. Е: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб. Ω = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, …}.

В эксперименте с подбрасыванием игрального кубика (пример 2) элементарными исходами будут выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 на верхней грани игральной кости.

То есть ω_1 = «1», ω_2 = «2», ω_3 = «3», ω_4 = «4», ω_5 = «5», ω_6 = «6» – элементарные события.

Случайным называется такое событие, которое является подмножеством пространства элементарных событий. Случайные события будем обозначать заглавными латинскими буквами (A, B, C, ...).

Элементарные исходы, которые принадлежат множеству A (то есть $\omega_i \in A$), называются *благоприятными* событию A.

Таким образом, любое событие, связанное с данным испытанием, можно описать в виде совокупности благоприятных ему элементарных событий.

Рассмотрим случайные события в примере 1.

Е: Подбрасывание двух монет. Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}.

Событие A = {выпадение герба на двух монетах}, A = {ГГ};

событие B = {выпадение решки на двух монетах}, B = {РР};

событие C = {выпадение решки только на одной монете}, C = {ГР, РГ};

событие D ={выпадение герба хотя бы на одной монете, т. е. на одной, или на двух}, D = {ГГ, ГР, РГ}.

Рассмотрим случайные события в примере 2.

Е: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие A = {выпадение четного числа очков}, $A = \{2, 4, 6\}$;

событие B = {выпадение нечетного числа очков}, $B = \{1, 3, 5\}$;

событие C = {выпадение числа очков меньше 6}, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

событие D = {выпадение числа очков больше 2}, $D = \{3, 4, 5, 6\}$.

Невозможным называется событие, которое никогда не произойдет в данном случайном эксперименте, то есть совпадающее с пустым множеством $\varnothing$.

Достоверным называется событие, которому благоприятны все возможные элементарные исходы пространства элементарных исходов Ω и которое обязательно произойдет в результате вероятностного эксперимента Е.

В рассмотренном выше примере 2: Е: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Достоверное событие E = {выпадение или четного, или нечетного числа очков}, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; невозможное событие F = {выпадение числа очков больше 6}, $F = \{\varnothing\}$.

В рассмотренном выше примере 3: Е: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб. Ω = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, …}.

Достоверное событие A = {монету подбросят хотя бы один раз, т. е. или один раз, или два раза, или …}, A = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, …}.

Невозможное событие B = {герб выпадет 2 раза}, $B = \{\varnothing\}$.

1.1.2 Операции над событиями

Пусть имеется пространство элементарных событий произвольной природы. Будем рассматривать в качестве событий подмножества A, B, C, ... этого пространства.

События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно, то есть одновременное осуществление событий A и B есть событие невозможное.

Несколько событий называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других в этом испытании.

События A и B называются **совместными**, если они могут произойти одновременно.

Несколько событий называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других в этом испытании.

В рассмотренном выше примере 1: Е: Подбрасывание двух монет. Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}.

События A = {ГГ}, B = {РР}, C = {ГР, РГ} – несовместные. События A = {ГГ} и D = {ГГ, ГР, РГ} – совместные. События B = {РР} и D = {ГГ, ГР, РГ} – несовместные. События C = {ГР, РГ} и D = {ГГ, ГР, РГ} – совместные.

В рассмотренном выше примере 2: Е: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $B = \{1, 3, 5\}$ – несовместные. Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – совместные.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из них (будем использовать это далее).

В рассмотренном выше примере 1: Е: Подбрасывание двух монет. Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}.

Событие A = {ГГ}, событие B = {РР} и событие C = {ГР, РГ} – образуют полную группу событий.

В рассмотренном выше примере 2: Е: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $B = \{1, 3, 5\}$ – образуют полную группу событий.

Суммой (объединением) событий A и B (обозначается $A \cup B$ или $A + B$) называется третье событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B, то есть, когда происходит или A, или B, или оба события вместе. Благоприятными событию $A \cup B$ являются все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A или B.

Аналогично определяется **сумма любого числа событий** $A_1 \cup A_2 \cup \cup A_3 \cup \ldots$ Это событие состоит в осуществлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, … Благоприятными этому событию являются все элементарные исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A_1, A_2, A_3, …

Произведением (пересечением) событий A и B (обозначается $A \cap B$ или AB) называется третье событие, состоящее в одновременном осуществлении событий A и B. Событию $A \cap B$ благоприятны исходы, благоприятные и событию A, и событию B, то есть исходы, которые одновременно принадлежат двум событиям A и B.

Произведение любого числа событий $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ состоит в одновременном осуществлении событий A_1, A_2, $A_3, \ldots$ Благоприятными этому событию являются исходы, благоприятные всем рассматриваемым событиям $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Разностью событий A и B (обозначается $A \setminus B$, или $A - B$) называется третье событие, состоящее в осуществлении события A без осуществления события B. Событие $A \setminus B$ состоит из всех элементарных исходов, благоприятных событию A, за исключением исходов, благоприятных событию B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события A. Событию $\overline{A}$ благоприятны все возможные исходы пространства элементарных событий, кроме тех, которые благоприятны событию A. То есть $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $\overline{A} \cup A = \Omega$.

События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно, то есть одновременное осуществление событий A и B есть событие невозможное ($A \cap B = \varnothing$).

В рассмотренном выше **примере 1**: Е: Подбрасывание двух монет. Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}.

Событие A = {выпадение герба на двух монетах}, A = {ГГ}; событие B = {выпадение решки на двух монетах}, B = {РР}; событие C = {выпадение решки только на одной монете}, C = {ГР, РГ}; событие D = {выпадение герба хотя бы на одной монете}, D = {ГГ, ГР, РГ}.

Сумма событий $A \cup B$ = {ГГ, РР}; $A \cup C$ = {ГГ, ГР, РГ}; $A \cup D = D$.

Произведение событий $A \cap B = \{\varnothing\}$; $A \cap D$ = {ГГ}.

Разность событий $A \setminus B$ = {ГГ}; $B \setminus A$ = {РР}, $A \setminus D = \{\varnothing\}$; $D \setminus A$ = {ГР, РГ}.

Противоположное событие $\overline{A}$ = {ГР, РГ, РР}, $\overline{B}$ = {ГГ, ГР, РГ}, $\overline{D}$ = {РР}.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называют случайным экспериментом?
2 Что называют событием?
3 Какое событие называют достоверным?
4 Какое событие называют невозможным?
5 Какое событие называют случайным?
6 Какие события называют совместными?
7 Какие события называют несовместными?
8 Какие события называют противоположными?
9 Что называют полной группой событий?
10 Что называют элементарным исходом?
11 Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?
12 Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании трех монет?

1.2 Вероятность

1.2.1 Относительная частота случайного события. Понятие вероятности случайного события. Аксиомы теории вероятностей

Пусть вероятностный эксперимент Е воспроизведен при одинаковых условиях n раз. При этом некоторое случайное событие A произошло m раз ($m \le n$). Число m называется *частотой* появления случайного события A, а отношение

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

называется *относительной частотой* (*частостью*) случайного события A.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

1 Относительная частота случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей: $0 \le W(A) \le 1$.

2 Относительная частота достоверного события равна единице: $W(\Omega)=1$.

3 Относительная частота невозможного события равна нулю $W(\varnothing)=0$.

4 Относительная частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий: $W(A+B) = W(A) + W(B)$.

Следует отметить, что относительная частота наступления некоторого случайного события не является постоянной величиной, однако она обладает устойчивостью, стремлением к некоторому постоянному числу, и колебания ее относительно этого постоянного числа тем меньше, чем больше проведено экспериментов.

Пример 4. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна относительная частота рождения мальчиков?

Р е ш е н и е. Поскольку в данном случае $n = 1000$, $m = 515$, то

$$W = \frac{m}{n} = \frac{515}{1000} = 0{,}515.$$

Для того чтобы сравнивать между собой события по степени их возможности, необходимо связать с каждым из них некоторое число, которое тем больше, чем более возможно наступление события. Это число называется **вероятностью** события.

Вероятность случайного события A – это числовая функция $P(A)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, характеризующая меру объективной (не зависящей от воли исследователя) возможности наступления события A .

Замечательным экспериментальным фактом является то, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события A приближается к вероятности события A и стабилизируется около этого значения.

При **статистическом определении вероятности** в качестве вероятности события используется относительная частота этого события в большой серии испытаний.

Например, если обычную монету подбрасывать $n = 30$ раз, наблюдая при этом 12 выпадений герба, то $m = 12$, а $W = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0{,}4$.

При $n = 400$ подбрасываний возможно 205 появлений герба, при этом относительная частота появления герба составит 0,5125.

Вероятность события A вычисляется без проведения опытов, а относительная частота только после проведения опытов.

Сформулируем **положение теории вероятностей**. Пусть дано *дискретное* пространство элементарных событий Ω с элементами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$

Полагаем, что каждому из элементарных событий ω_i поставлена в соответствие некоторая неотрицательная числовая характеристика $p_i = P(\omega_i)$, называемая **вероятностью** этого события, причем

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1.$$

По определению, вероятность $P(A)$ любого события A равна сумме вероятностей всех составляющих его элементарных событий:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \cdot$$

Рассмотрим аксиомы, которым должны удовлетворять вероятности любых событий:

А1 (аксиома неотрицательности). Вероятность любого события A есть неотрицательное число:

$$P(A) \geq 0, \text{ для любого события } A.$$

А2 (аксиома нормированности). Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

А3 (аксиома аддитивности). Вероятность суммы счетного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Основные следствия из аксиом теории вероятностей:

1 Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

2 Вероятность любого случайного события есть число, заключенное в отрезке от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

3 Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, можно определить следующим образом: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

1.2.2 Классический метод определения вероятности

Если пространство элементарных событий некоторого эксперимента состоит из конечного числа элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, причём все исходы являются равновозможными, то есть

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ \ldots \ = P(\omega_n),$$

то для определения вероятности любого события A, связанного с данным экспериментом, можно воспользоваться так называемым **классическим методом определения вероятности**, согласно которому вероятность любого события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m – число элементарных исходов, благоприятных событию A;

n – общее число исходов пространства элементарных событий Ω.

Ограничения классического способа:

а) множество всех элементарных исходов пространства Ω должно быть конечным;

б) все элементарные исходы вероятностного эксперимента Е должны быть равновозможными, то есть $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, для любых i, j.

Например, классический метод нельзя применить для вычисления вероятности того, что монета выпадет при втором подбрасывании для примера 3.

Е: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб.

Ω = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, …}. В данном случае пространство Ω бесконечно.

Пример 5. При наборе телефонного номера абонент набирает 2 последние цифры наугад, помня лишь, что они одинаковые и нечетные. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно с первой попытки.

Р е ш е н и е. Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного набора двух одинаковых цифр из пяти.

В условии указано, что цифры нечетные и одинаковые, поэтому выбирать будем дважды одну и ту же цифру из 1, 3, 5, 7, 9.

Пространство элементарных исходов рассматриваемого эксперимента: $\Omega = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9)\}$.

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 5 элементов: $n = 5$.

Событие A = {номер будет набран правильно с первой попытки}.

Поскольку цифры набираются случайным образом, все элементарные исходы равновозможны, то для вычисления вероятности интересующего нас события можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей. Число исходов, благоприятных событию A, равно 1, так как при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

Отсюда: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2.$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называют вероятностью события?
2 Чему равна вероятность достоверного события?
3 Чему равна вероятность невозможного события?
4 В каких пределах заключена вероятность случайного события?
5 Какое определение вероятности называют классическим?

1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.3.1 Теоремы сложения вероятностей

В общем случае теорема сложения вероятностей для двух событий A и B определяется по формуле

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (2)$$

Если события A и B – несовместны, то есть $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cap B) = 0$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (3)$$

Теорема сложения вероятностей для трех событий A, B, C может быть записана следующим образом:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Если события A, B, C – попарно несовместны, то

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Согласно аксиоме 3 для счетного числа несовместных событий A_1, A_2, A_3, A_4, …

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$$

Пример 6. Из трех карточек с цифрами 1, 4, 5 произвольным образом выбирают две и укладывают на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равновероятны, найти вероятность того, что:

1) полученное таким образом число будет или четное, или меньше 50;
2) полученное таким образом число будет или четное, или нечетное.

Р е ш е н и е. Пространство элементарных исходов данного эксперимента может быть представлено следующим образом: Ω = {14, 15, 41, 45, 51, 54}, (n = 6).

1 Определим событие A = {полученное случайным образом число будет или четное, или меньше 50}.

Определим события B = {полученное случайным образом число будет четное}; C = {полученное случайным образом число будет меньше 50}, которые совместны.

Таким образом, для определения вероятности события A можем воспользоваться теоремой сложения вероятностей для двух совместных событий

$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Все элементарные исходы данного пространства Ω равновероятны.

Таким образом, для определения вероятностей событий B и C можем воспользоваться классическим методом определения вероятности.

Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям:

$B = \{\mathbf{14}, 54\}$, $(m = 2)$, тогда $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{6}$;

$C = \{\mathbf{14}, 15, 41, 45\}$, $(m = 4)$, $P(C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{6}$;

$B \cap C$ = {полученное случайным образом число будет четное и меньше 50};

$B \cap C = \{\mathbf{14}\}$, $(m = 1)$, $P(B \cap C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6}$.

Тогда вероятность события A:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$

2 Определим событие D = {полученное случайным образом число будет или четное, или нечетное}.

Определим события B = {полученное случайным образом число будет четное}; E = {полученное случайным образом число будет нечетное}, которые несовместны.

Таким образом, для определения вероятности события D можем воспользоваться теоремой сложения вероятностей для двух несовместных событий

$P(D) = P(B \cup E) = P(B) + P(E)$.

Все элементарные исходы данного пространства Ω равновероятны.

Таким образом, для определения вероятностей событий B и E можем воспользоваться классическим методом определения вероятности.

Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям:

$B = \{14, 54\}$, $(m = 2)$, тогда $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{6}$;

$E = \{15, 41, 45, 51\}$, $(m = 4)$, $P(E) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{6}$.

Тогда вероятность события D:

$$P(D) = P(B \cup E) = P(B) + P(E) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1.$$

О т в е т: вероятность того, что:
1) полученное число будет или четное, или меньше 50, равна 0,833;
2) полученное таким образом число будет или четное, или нечетное, равна 1.

1.3.2 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим вероятностный эксперимент E. Пусть в пространстве Ω определены некоторые случайные события A, B, C, … и их вероятности. Предположим, что в ходе нашего эксперимента E событие A уже произошло. В данном эксперименте появление события A может каким-то образом изменить вероятности появления событий, связанных (зависимых) с ним.

Событие B называется зависимым от события A, если появление (или непоявление) события A изменяет вероятность появления события B.

Событие B называется *независимым* от события A, если появление (или непоявление) события A не изменяет вероятность появления события B.

Рассмотрим два произвольных события A и B, причем $P(B) \neq 0$.

Условной вероятностью события A при условии B (обозначается $P(A \mid B)$) называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло.

По определению

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B). \qquad (4)$$

Вычисление условных вероятностей – это, по существу, переход в новое, урезанное заданным условием B пространство элементарных событий. Вероятности элементарных событий $P(\omega_i)$ ($\omega_i \in B$) пропорциональны исходным. Для соблюдения условия нормировки в новом пространстве элементарных событий они делятся на $P(B)$.

Аналогично

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) \qquad (5)$$

в случае, если $P(A) \neq 0$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже произошло

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \qquad (6)$$

Для произвольного числа n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

то есть вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

Пример 7. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 20. Какова вероятность того, что он сдаст зачет, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трех, содержащихся в билете?

Р е ш е н и е. Обозначим события:

A = {студент сдаст зачет};

B = {студент ответит на три вопроса из трех, содержащихся в билете};

C = {студент ответит на два вопроса из трех, содержащихся в билете}.

Вспомогательные события:

B_1 = {студент ответит на первый вопрос, содержащийся в билете};

B_2 = {студент ответит на второй вопрос, содержащийся в билете};

B_3 = {студент ответит на третий вопрос, содержащийся в билете}.

События B и C несовместны. Событие A произойдет, если произойдет одно из событий B или C.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Событие B: $B = B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

Вероятность события B определим по формуле

$P(B) = P(B_1)\, P(B_2 \mid B_1)\, P(B_3 \mid B_2 \cap B_1)$,

где $P(B_1) = \dfrac{20}{30}$ (всего 30 вопросов, из которых 20 студент знает);

$P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{20-1}{30-1} = \dfrac{19}{29}$ (всего осталось 29 вопросов, из них 19 студент знает);

$P(B_3 \mid B_2 \cap B_1) = \dfrac{19-1}{29-1} = \dfrac{18}{28}$ всего осталось 28 вопросов, из них 18 студент знает).

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(B) = P(B_1)\, P(B_2| B_1)\, P(B_3| B_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = \frac{6840}{24360} = 0{,}281.$$

Вероятность события C определим, используя теорему сложения вероятностей несовместных событий,

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3),$$

где C_1 = {студент ответит на первый и второй вопросы, а на третий не ответит};

C_2 = {студент ответит на первый и третий вопросы, а на второй не ответит};

C_3 = {студент ответит на второй и третий вопросы, а на первый не ответит}.

Событие C_1 : $C_1 = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3$. Событие C_2 : $C_2 = \overline{B}_1 \cap B_2 \cap B_3$. Событие C_3 : $C_3 = B_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3$.

$$P(C_1) = P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, P(\overline{B}_3 |B_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{(20-1)}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28} = 0{,}156.$$

$$P(C_2) = P(B_1)\, P(\overline{B}_2 |B_1)\, P(B_3| \overline{B}_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{(20-1)}{28} = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{19}{28} = 0{,}156.$$

$$P(C_3) = P(\overline{B}_1)\, P(B_2| \overline{B}_1)\, P(B_3|B_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{(20-1)}{28} = \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} = 0{,}156.$$

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = 0{,}156 + 0{,}156 + 0{,}156 = 0{,}468.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0{,}281 + 0{,}468 = 0{,}749.$

Ответ: вероятность того, что студент сдаст зачет, равна 0,749.

1.3.3 Независимые события

Два события A и B называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \qquad (7)$$

Для пояснения естественности такого определения вернемся к теореме умножения вероятностей (6) и установим, в каких ситуациях из нее следует формула (7). Очевидно, что это может быть тогда, когда условная вероятность $P(A|B)$ равна соответствующей безусловной вероятности события A: $P(A|B) = P(A)$, то есть когда вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет (аналогично $P(B|A) = P(B)$).

В основе независимости событий лежит их физическая независимость, состоящая в том, что множества факторов, влияющих на исход эксперимента и обусловливающих появление этих событий, не пересекаются или почти не пересекаются.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из этих событий не зависит от появления любого числа остальных событий.

Теорема умножения вероятностей для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеет вид

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Пример 8. При изготовлении изделие проходит три основные независимые операции. Вероятность того, что изделие успешно пройдет первую операцию, равна 0,9, вторую – 0,95, третью – 0,8.

Найти вероятность того, что:
1) изделие окажется стандартным;
2) изделие окажется нестандартным.

Решение. Обозначим события:

A_i = {i-ю операцию изделие прошло без брака}, $i = 1, 2, 3$;

B = {изделие окажется стандартным};

$\overline{B}$ = {изделие окажется нестандартным}.

Согласно условию: вероятность события A_1 равна $P(A_1) = 0{,}9$, вероятность события A_2 равна $P(A_2) = 0{,}95$, вероятность события A_3 равна $P(A_3) = 0{,}8$.

Тогда вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$;

$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Определим все варианты данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности, применяя теорему умножения вероятностей независимых событий:

События	Вероятности
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	$0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}684$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$0{,}9 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}036$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$	$0{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}076$
$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}2 = 0{,}171$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}004$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}9 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}009$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}2 = 0{,}019$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}001$
Ω	*Итого* 1

1 По теореме умножения вероятностей независимых событий

$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}684.$

2 Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$P(\overline{B}) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) +$

$+ P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}036 + 0{,}076 +$

$+ 0{,}171 + 0{,}004 + 0{,}009 + 0{,}019 + 0{,}001 = 0{,}316.$

События B = {изделие окажется стандартным} и $\overline{B}$ = {изделие окажется нестандартным} являются противоположными, то есть $P(B) + P(\overline{B}) = 1$,

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}684 = 0{,}316.$

Ответ: вероятность того, что:
1) изделие окажется стандартным, равна 0,684;
2) изделие окажется нестандартным, равна 0,316.

1.4 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Частным случаем применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. При решении многих практических задач можно встретиться с ситуацией, когда прямое вычисление вероятности события A трудно или невозможно, в то время как вполне доступно определение вероятности этого события при некоторых различных условиях H_i.

Сформулируем условия применения формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Пусть производится испытание, об условиях которого можно сделать n взаимно исключающих предположений: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ $(H_i \cap H_j = \varnothing$, при $i \neq j)$, таких, что

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Поскольку заранее неизвестно, какое из событий H_i произойдет, эти события называют **гипотезами**. Предполагается, что вероятности гипотез известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Так как события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несовместны и образуют полную группу событий, то $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

Тогда любое рассматриваемое событие A может произойти только одновременно с осуществлением одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. То есть $A = A \cap H_1 \cup A \cap H_2 \cup \ldots \cup A \cap H_n$. Поскольку события $A \cap H_1$, $A \cap H_2$, …, $A \cap H_n$ – несовместны, $P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n)$.

Применив теорему умножения вероятностей, можно записать: $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$.

Таким образом, приходим к **формуле полной вероятности**, позволяющей определить «полную» вероятность события A через известные условные вероятности события A при гипотезах H_i:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \quad (8)$$

Если известно, что в результате опыта произошло событие A, то новые, апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез можно определить по **формуле Байеса**

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)H(A \mid H_j)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}. \quad (9)$$

Вероятности гипотез $P(H_i)$, которыми мы должны располагать до проведения эксперимента, называются *априорными вероятностями*.

Таким образом, формула Байеса – это формула пересчета вероятностей гипотез на основании результатов эксперимента. Легко видеть, что сумма апостериорных вероятностей гипотез равна единице.

Пример 9. Ревизионной комиссии в конце первого квартала предстоит проверка финансово-хозяйственной деятельности фирмы. Специалистами

управления случайным образом производится выбор документа за определенный месяц. Вероятность выявления ошибки в случайно выбранном документе в январе $p_1 = 0{,}1$, в феврале – $p_2 = 0{,}2$, в марте – $p_3 = 0{,}15$.

1 Определить вероятность того, что ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе.

2 Ревизионной комиссией не выявлена ошибка в случайно выбранном документе. Определить вероятность того, что комиссия выбрала документ, составленный в январе.

Р е ш е н и е. Определим событие $A = \{$ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе$\}$.

Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в проверке документов, можно выдвинуть три несовместные гипотезы: $H_1 = \{$документ составлен в январе$\}$; $H_2 = \{$документ составлен в феврале$\}$; $H_3 = \{$документ составлен в марте$\}$.

Эти гипотезы равновозможны. Причём $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$.

Учитывая свойство вероятностей гипотез $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$, определим: $P(H_1) = \frac{1}{3}$; $P(H_2) = \frac{1}{3}$; $P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Условные вероятности события $A = \{$ревизионной комиссией не выявлена ошибка в случайно выбранном документе$\}$ при осуществлении этих гипотез:

$$P(A \mid H_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;\ P(A \mid H_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;\ P(A \mid H_3) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 = 0{,}85.$$

Для определения вероятности того, что комиссия выбрала документ, составленный в январе, при условии, что ревизионной комиссией не выявлена ошибка в случайно выбранном документе, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}9}{0{,}85} = 0{,}353.$$

Ответ: вероятность того, что:

1) ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе, равна 0,85;

2) комиссия выбрала документ, составленный в январе, при условии, что ревизионной комиссией не выявлена ошибка в этом документе, равна 0,353.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух совместных событий.
2 Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух несовместных событий.
3 Что называется условной вероятностью?
4 Сформулируйте теоремы умножения вероятностей для двух зависимых событий и для двух независимых событий.
5 Следствием каких теорем являются формулы полной вероятности и Байеса?
6 Какие события называют гипотезами?
7 Запишите формулу полной вероятности и формулу Байеса.

1.5 Последовательности независимых испытаний. Формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона

Конечное число испытаний называется независимым, если их исходы представляют собой события, независимые в совокупности. Иными словами, вероятность наступления некоторого события в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний.

Испытаниями Бернулли называются повторные независимые испытания, в каждом из которых нас интересуют только два исхода (будем называть их «успех» и «неудача»), вероятности которых постоянны в каждом испытании.

Например, при многократном подбрасывании монеты (за успех принимаем выпадение герба, за неудачу – выпадение решки).

Вероятность успеха $p = 1/2$, вероятность неудачи $q = 1 - p = 1/2$.

При многократном подбрасывании игральной кости (за успех принимаем выпадение на верхней грани «1», за неудачу – выпадение любого другого числа («2» или «3», или «4», или «5», или «6»)) вероятность успеха $p = 1/6$, вероятность неудачи $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$.

Если производится n независимых испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p может произойти событие A, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих n испытаниях событие A произойдет ровно m раз, определяется по формуле Бернулли.

1 Обычно при решении задач формула Бернулли применяется, если число экспериментов невелико ($n << 50$) .

Формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом из испытаний;
C_n^m – число сочетаний из n элементов по m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \text{где } k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k.$$

Примечание. Сочетаниями (или неупорядоченными выборками без возвращения) из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m.

2 Очевидно, что при больших значениях n пользоваться формулой Бернулли затруднительно, так как придется вычислять значения факториалов больших чисел и возводить в большую степень числа, близкие к нулю $(0 < p < 1)$. В этом случае можно использовать асимптотические формулы Лапласа, дающие тем лучшее приближенное значение $P_n(m)$ и $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, чем больше n.

Локальная формула Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний ровно m раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{11}$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

В приложении А приведена таблица значений функции $\varphi(x)$, соответствующих положительным значениям аргумента.

Функция $\varphi(x)$ является четной функцией, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$, для всех $x \ge 4$ принимается $\varphi(x) = 0$.

Интегральная формула Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{12}$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

В приложении Б приведена таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$.

Функция Ф (x) нечетна, то есть Ф $(-x) = -$Ф (x). При $x > 5$ можно принять Ф $(x) = 0{,}5$.

3 Пусть число экспериментов Бернулли велико ($n \to \infty$), а вероятность наступления события A в каждом испытании очень мала ($p \to 0,\ p < 0{,}1$), тогда вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний ровно m раз, приближенно равна

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (13)$$

где $a = np = \text{const}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

Ниже приведена таблица 1, с помощью которой можно определить формулу при решении задачи.

Таблица 1 – **Условия применения формул при испытаниях Бернулли**

Число испытаний, n	$n << 50$	$n > 50$	$n \to \infty$
Вероятность наступления события A, p (A)	$0 < p < 1$	$0 < p < 1$	$p \to 0,\ p < 0{,}1$
Формула	Бернулли	Лапласа	Пуассона

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в серии из n испытаний, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p, определяется из двойного неравенства (m_0 – целое)

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Пример 10. Предприятие для изучения потребительских предпочтений на товар в случайном порядке рассылает анкеты по n адресам (почтовый опрос). Вероятность того, что заполненные потребителями анкеты «возвратятся» на предприятие, составляет p.

Определить:

1) какова вероятность того, что из n отправленных анкет «возвратятся» не более k анкет;

2) найдите наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие, и соответствующую этому значению вероятность.

Рассмотрим решение задачи для трех постановок:

Задача	n	p	k
1	10	0,4	3
2	100	0,4	40
3	200	0,05	2

Определим случайный эксперимент Е: предприятие для изучения потребительских предпочтений на товар в случайном порядке рассылает анкеты по n адресам.

Задача 1

Р е ш е н и е. Условие задачи можно рассматривать как серию из n = =10 независимых испытаний, состоящих в рассылке анкет, в каждом из которых с вероятностью p = 0,4 может осуществиться событие A = {отправленная анкета «возвратится» на предприятие}.

Вероятность того, что отправленная анкета «не возвратится» на предприятие, равна q = 1 – 0,4 = 0,6.

1 Определим событие B = {из 10 отправленных анкет менее четырех «возвратятся» на предприятие}.

Так как число испытаний невелико, то для вычисления вероятности события B = {из 10 отправленных анкет менее четырех «возвратятся» на предприятие} можно воспользоваться точной формулой Бернулли и теоремой сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3);$$

$$P_{10}(0) = C_{10}^0 p^0 q^{10} = \frac{10!}{0! \cdot 10!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^{10} = 0{,}006047;$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 p^1 q^9 = \frac{10!}{1! \cdot 9!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^9 = 0{,}040311;$$

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 = 0{,}120932;$$

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 p^3 q^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}214991.$$

$P(B) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) = 0{,}006047 + 0{,}040311 + 0{,}120932 +$ $+ 0{,}214991 = 0{,}38228$.

2 Определим наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие, по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$
$$10 \cdot 0{,}4 - 0{,}6 \le m_0 \le 10 \cdot 0{,}4 + 0{,}4,$$
$$3{,}4 \le m_0 \le 4{,}4.$$

Наивероятнейшее число $m_0 = 4$.

C = {из 10 отправленных анкет ровно 4 «возвратятся» на предприятие}.

Для определения вероятности события C воспользуемся формулой Бернулли

$$P(C) = P_{10}(4) = C_{10}^4 p^4 q^6 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}2508.$$

О т в е т: 1) вероятность того, что из 10 отправленных анкет менее четырех «возвратятся» на предприятие, равна 0,382;

2) наиболее вероятное число отправленных анкет, которые «возвратятся» на предприятие, составит 4, соответствующая этому числу вероятность равна 0,251.

Задача 2

Р е ш е н и е. 1 Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 100$ независимых испытаний, состоящих в рассылке анкет, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}4$ может осуществиться событие $A = \{$отправленная анкета «возвратится» на предприятие$\}$.

Вероятность того, что посланная анкета «не возвратится» на предприятие, равна $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Так как число испытаний достаточно велико, для вычисления вероятностей события $B = \{$из 100 отправленных анкет менее 40 «возвратятся» на предприятие$\}$ можно воспользоваться приближённой интегральной формулой Муавра-Лапласа при $n = 100$; $p = 0{,}4$; $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $k_1 = 0$; $k_2 = 40$:

$$P(B) = P_{100}(0 \le m \le 40) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}} \approx -8{,}165;\quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}} = 0.$$

По таблицам значений функции $\Phi(x)$ находим:

$\Phi(-8{,}165) = -0{,}5$; $\Phi(0) = 0$.

Таким образом, $P(B) = P_{100}(0 \le m \le 40) = 0 - (-0{,}5) = 0{,}5$.

2 Определим наиболее вероятное число анкет, которые «возвратятся» на предприятие по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$
$$100\cdot 0{,}4 - 0{,}6 \le m_0 \le 100\cdot 0{,}4 + 0{,}4,$$
$$39{,}4 \le m_0 \le 40{,}4.$$

Наивероятнейшее число $m_0 = 40$.

Так как число испытаний достаточно велико, то для вычисления вероятности события $C = \{$из 100 разосланных анкет ровно 40 «возвратятся» на предприятие$\}$ можно воспользоваться приближённой локальной формулой Муавра-Лапласа при $n = 100$; $p = 0{,}4$; $q = 0{,}6$; $m = 40$:

$$P(C) = P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x);\quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}} = 0.$$

По таблицам значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-x^2/2}$ находим:

$\varphi(0) = 0{,}3989$.

$$P(B) = P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\cdot 0{,}3989 = 0{,}0814.$$

Ответ: 1) вероятность того, что из 100 отправленных анкет не более 40 «возвратятся» на предприятие, равна 0,5;

2) наиболее вероятное число отправленных анкет, которые «возвратятся» на предприятие, составит 40, соответствующая этому числу вероятность равна 0,0814.

Задача 3

Р е ш е н и е. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 200$ независимых испытаний, состоящих в рассылке анкет, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}05$ может осуществиться событие $A = \{$отправленная анкета «возвратится» на предприятие$\}$. Вероятность того, что посланная анкета «не возвратится» на предприятие, равна $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

В данном случае для вычисления вероятностей воспользуемся приближенной формулой Пуассона с параметром $a = np$, так как число испытаний $n = 200$ достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании $p = 0{,}05$ очень мала ($p < 0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие A появляется крайне редко:

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a};\ (m = 0, 1, 2, ...).$$

Таблица значений функции $P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ приведена в приложении В.

Вычислим параметр $a = np = 200\cdot 0{,}05 = 10$.

1 Определим событие $B = \{$не более двух анкет «возвратятся» на предприятие, то есть или 0, или 1, или 2$\}$.

Вероятность события B

$$P(B) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} \approx 61e^{-10} = 0{,}0028.$$

2 Определим наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие, по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p;$$
$$200\cdot 0{,}05 - 0{,}95 \le m_0 \le 200\cdot 0{,}05 + 0{,}05;$$
$$9{,}05 \le m_0 \le 10{,}05.$$

Наивероятнейшее число $m_0 = 10$.

Определим событие $C = \{10$ анкет «возвратятся» на предприятие$\}$.

Вероятность события C

$$P(C) = P_{200}(10) \approx \frac{10^{10} e^{-10}}{10!} \approx 0{,}12511.$$

Ответ: 1) вероятность того, что из 200 отправленных анкет не более двух «возвратятся» на предприятие, равна 0,002769;

2) наиболее вероятное число отправленных анкет, которые «возвратятся» на предприятие, составит 10, соответствующая этому числу вероятность равна 0,12511.

Вопросы для самоконтроля

1 Какие испытания называются независимыми? Приведите примеры.
2 Какие испытания называются испытаниями Бернулли? Приведите примеры.
3 Что определяется по формуле Бернулли?
4 При каких условиях применяется формула Пуассона?
5 При каких условиях применяются формулы Муавра-Лапласа?
6 Что определяется по локальной формуле Муавра-Лапласа?
7 Что определяется по интегральной формуле Муавра-Лапласа?
8 Как определить наивероятнейшее число наступлений события A в серии из n испытаний?

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Дискретные и непрерывные случайные величины

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Случайной называется величина, которая при повторении некоторого эксперимента в одинаковых условиях может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое из них.

Случайные величины принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, … либо буквами греческого алфавита: ξ, η, θ, …, а их значения – строчными буквами латинского алфавита: x, y, z.

Дискретной называется случайная величина X, которая в результате эксперимента E может принимать конечное или счетное число значений.

Примеры дискретных случайных величин: число студентов в группе, успешно сдавших экзамен по математике; число звонков, поступивших в справочную службу вокзала в течение часа и т. д.

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый (конечный или бесконечный) промежуток числовой оси, называются **непрерывными**. Множество возможных значений непрерывных случайных величин является несчетным множеством.

Примеры непрерывных случайных величин: время безотказной работы оборудования после очередного ремонта; время простоя клиента магазина в очереди; масса израсходованного автомобилем бензина на одном и том же расстоянии; отклонение размера изделия от номинала.

2.2 Закон распределения случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями x_1, x_2, x_3, … этой величины и их вероятностями p_1, p_2, p_3, …

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул).

Очевидно, что для полного описания исследуемого вероятностного эксперимента (то есть для исчерпывающего задания характеризующей его случайной величины) недостаточно задать только пространство элементарных событий Ω. К этому необходимо добавить также:

а) для *дискретной* случайной величины (ДСВ) – правило, сопоставляющее каждому возможному значению случайной величины x_i вероятность того, что случайная величина X примет в результате эксперимента это значение:

$$x_i \to P(X = x_i)\,;$$

б) для *непрерывной* случайной величины (НСВ) – правило, позволяющее поставить в соответствие любой измеримой области ΔX возможных значений случайной величины X вероятность попадания значения случайной величины в эту область:

$$\Delta X \to P(x \in \Delta X)\,.$$

Дадим общее определение: **законом распределения** случайной величины X называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями этой случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения случайной величины X может быть задан таблично, графически и аналитически (таблица 2).

Таблица 2 – **Способы задания законов распределения случайных величин**

Табличный	Графический		Аналитический		
Ряд распределения	Столбцовая диаграмма	Многоугольник распределения	Непосредственная формула $P(X = x_i)$	Функция распределения $F(x)$	Функция плотности распределения $f(x)$
ДСВ	ДСВ	ДСВ	ДСВ, НСВ	ДСВ, НСВ	НСВ

2.2.1 Ряд распределения

Пусть X – дискретная случайная величина, а x_1, x_2, x_3, … – ее значения. Совокупность всех элементарных событий, на которых X принимает фиксированное значение x_i, образует событие $X = x_i$.

Простейшим способом задания закона распределения дискретной случайной величины является **ряд распределения**.

Это таблица, в первой строке которой указаны возможные значения случайной величины $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а во второй – соответствующие им вероятности $p_1, p_2, p_3, \ldots$, где $p_i = P(X = x_i)$ – вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина X примет значение x_i:

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	p_1	p_2	p_3

Так как события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, … – несовместны, и их объединение представляет собой все пространство элементарных событий, то сумма вероятностей p_i равна 1:

$$\sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1\,. \qquad (14)$$

Графическое изображение ряда распределения может быть представлено одним из двух способов: в виде столбцовой диаграммы и в виде многоугольника распределения (рисунок 1).

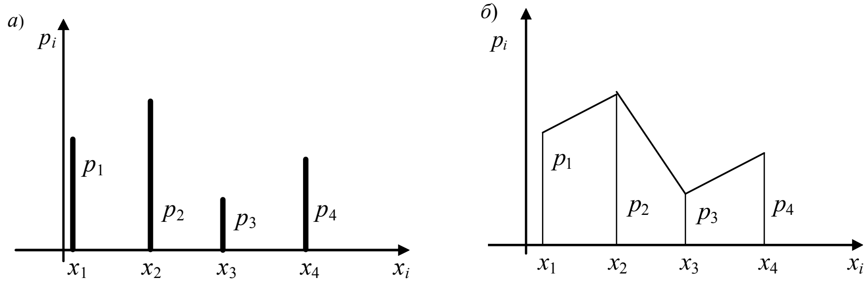


Рисунок 1 – Графические способы задания законов распределения случайных величин: *а* – дискретной, *б* – непрерывной

Столбцовая диаграмма строится следующим образом: для каждого возможного значения случайной величины восстанавливается перпендикуляр к оси абсцисс, на котором откладывается вероятность данного значения.

При построении **многоугольника распределения** по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, по оси ординат – соответствующие им вероятности, и полученные соседние точки соединяются отрезками.

2.2.2 Функция распределения

Универсальным способом задания закона распределения, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины *X* называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Основные свойства функции распределения $F(x)$:

1 Так как по определению $F(x)$ равна вероятности события, все возможные значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2 Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, то есть $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента.

3 Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[б;\ в)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(б \le X < в) = F(в) - F(б).$$

4 Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0,\ \text{при}\ x \le a;\ \ F(x) = 1,\ \text{при}\ x > b.$$

Функция распределения дискретных случайных величин может быть определена по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \qquad (15)$$

Если известен ряд распределения дискретной случайной величины, легко вычислить и построить ее функцию распределения.

В общем случае функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям x_1, x_2, … случайной величины X и равны вероятностям p_1, p_2, … этих значений.

Пример 11. Вычислить и построить функцию распределения для дискретной случайной величины, закон распределения которой имеет вид:

x_i	0,1	1,2	2,3	4,5
p_i	0,1	0,2	0,6	0,1

Р е ш е н и е. Определим значения функции $F(x) = P(X < x)$ для всех возможных значений x:

при $x \in (-\infty;\ 0{,}1]$ нет ни одного значения случайной величины X, меньше данных значений x: $F(x) = 0$;

при $x \in (0{,}1;\ 1{,}2]$ только одно возможное значение $(X = 0{,}1)$ меньше рассматриваемых значений x. То есть при $x \in (0{,}1;\ 1{,}2]$ $F(x) = P(X = 0{,}1) = 0{,}1$;

при $x \in (1{,}2;\ 2{,}3]$ два значения ($X = 0{,}1$ и $X = 1{,}2$) меньше данных значений x, следовательно, $F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

при $x \in (2{,}3;\ 4{,}5]$ три значения ($X = 0{,}1$, $X = 1{,}2$ и $X = 2{,}3$) меньше данных значений x, следовательно, $F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) + P(X = 2{,}3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}9$;

при $x \in (4{,}5;\ \infty)$ все возможные значения случайной величины X будут меньше данных значений x, и $F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) + P(X = 2{,}3) + P(X = 4{,}5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}1 = 1$.

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty;\ 0{,}1]; \\ 0{,}1 & \text{при } x \in (0{,}1;\ 1{,}2]; \\ 0{,}3 & \text{при } x \in (1{,}2;\ 2{,}3]; \\ 0{,}9 & \text{при } x \in (2{,}3;\ 4{,}5]; \\ 1 & \text{при } x \in (4{,}5;\ \infty). \end{cases}$$

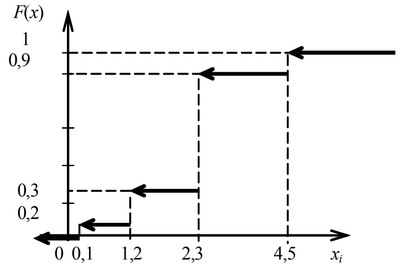


Рисунок 2 – Функция распределения

Функция распределения непрерывных случайных величин. Теперь можно дать более точное определение непрерывных случайных величин: случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ при всех значениях x непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ всюду, за исключением, может быть, отдельных точек.

Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что *вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*.

Так как вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, третье свойство функции распределения для непрерывной случайной величины будет иметь вид

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a). \qquad (16)$$

2.2.3 Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке:

$$f(x) = F'(x).$$

По своему смыслу значения функции $f(x)$ пропорциональны вероятности того, что исследуемая случайная величина примет значение где-то в непосредственной близости от точки x.

Функция плотности распределения $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм задания закона распределения, но она применима только для непрерывных случайных величин. Функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ еще называют **дифференциальной функцией распределения**, тогда как функцию распределения $F(x)$ называют, соответственно, **интегральной функцией распределения**.

График функции плотности распределения $f(x)$ называется **кривой распределения**.

Рассмотрим свойства, которыми обладает функция плотности распределения непрерывной случайной величины.

Свойство 1. Плотность распределения вероятностей – неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0$$

(*геометрически:* кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс).

Свойство 2. Вероятность попадания значения случайной величины на участок от α до β определяется по формуле

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx;$$

(*геометрически:* эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$).

Свойство 3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(*геометрически*: площадь фигуры, ограниченной графиком функции плотности распределения и осью абсцисс, равна единице).

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1.$$

Свойство 4. Функция распределения $F(x)$ может быть найдена по известной функции плотности распределения следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

2.3 Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Кроме того, в теории вероятностей широко используются некоторые «типичные значения», которые характеризуют случайную величину суммарно. Эти числа, описывающие некоторые характерные черты распределения, называются **числовыми характеристиками**.

Важнейшей числовой характеристикой положения случайной величины является математическое ожидание.

1 **Математическое ожидание** характеризует среднее значение случайной величины. Термин «математическое ожидание» связан с начальным периодом развития теории вероятностей, когда она развивалась на примерах и задачах азартных игр и игрока интересовал средний выигрыш, то есть среднее значение ожидаемого выигрыша.

Для дискретных и непрерывных случайных величин математическое ожидание вычисляется, соответственно, по формулам (17) и (18) (при условии, что ряд в формуле (17) и интеграл в формуле (18) сходятся абсолютно).

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{17}$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx. \tag{18}$$

В механической интерпретации математическое ожидание характеризует центр тяжести системы.

Свойства математического ожидания:

а) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M[C] = C;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[CX] = CM[X];$$

в) математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий.

Например, для трех случайных величин X_1, X_2, X_3

$$M[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = M[X_1] \pm M[X_2] \pm M[X_3];$$

г) если $P(a \leq X < b) = 1$, то $M[X] \in [a; b]$, то есть математическое ожидание произвольной случайной величины X принадлежит интервалу между минимальным и максимальным возможными значениями случайной величины X;

д) математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Например, для трех независимых случайных величин X_1, X_2, X_3

$$M[X_1 X_2 X_3] = M[X_1]\, M[X_2]\, M[X_3].$$

2 **Модой** дискретной случайной величины X (обозначается x_{mod}) называется ее наиболее вероятное значение, то есть то значение, для которого вероятность p_i достигает максимума. Моду дискретной случайной величины можно определить графически по столбцовой диаграмме, как абсциссу столбца, имеющего наибольшую высоту.

Модой непрерывной случайной величины X (обозначается x_{mod}) называется то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. В частности, если распределение имеет два максимума, то распределение называется двумодальным.

Примечание – Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $(a;b)$. Если можно указать такую δ – окрестность точки x_1, принадлежащую промежутку $(a;b)$, что для всех $x \in O(x_1, \delta)$, $x \neq x_1$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x)$, то $y_1 = f(x_1)$ называют локальным максимумом функции $y = f(x)$. *Максимум функции имеет локальный характер* (это наибольшее значение функции в достаточно малой окрестности соответствующей точки).

3 **Медианой** случайной величины X называется такое ее значение x_{med}, для которого $P(X < x_{\text{med}}) = P(X \geq x_{\text{med}}) = 0{,}5$, то есть одинаково вероятно, примет ли случайная величина значение, большее или меньшее медианы.

Для непрерывной случайной величины *геометрически:* медиана – это координата той точки на оси абсцисс, для которой площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, находящихся слева и справа от неё, одинаковы и равны 0,5. Учитывая определение функции распределения, $F(x_{\text{med}}) = 0{,}5$.

Эта характеристика применяется, как правило, только для непрерывных случайных величин. Для дискретных случайных величин множество значений x, удовлетворяющих свойству медианы $F(x_{\text{med}}) = 0{,}5$, может быть либо бесконечно, либо является пустым.

Очевидно, что характеристики положения (математическое ожидание, мода и медиана) имеют такую же размерность, как и сама случайная величина.

4 **Дисперсия** является мерой рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Для дискретных и непрерывных случайных величин дисперсию можно вычислить, соответственно, по формулам

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2; \qquad (19)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2. \qquad (20)$$

В *механической интерпретации* дисперсия представляет собой момент инерции распределения масс относительно центра масс (математического ожидания). Если говорить о форме кривой плотности распределения, то дисперсия характеризует степень ее «размазанности» по оси Ox. Чем больше величина $D[X]$, тем более «размазанным» выглядит соответствующее распределение.

Свойства дисперсии:

а) дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D[C] = 0;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D[CX] = C^2 D[X];$$

в) дисперсия алгебраической суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Например, для трех случайных величин X_1, X_2 и X_3

$$D[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = D[X_1] + D[X_2] + D[X_3];$$

г) дисперсия алгебраической суммы случайной величины X и постоянной величины C равна дисперсии случайной величины X:

$$D[C \pm X] = D[X].$$

5 Для того чтобы получить характеристику разброса значений случайной величины относительно математического ожидания, имеющую такую же размерность, как и сама случайная величина, используют корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком. Полученная величина называется средним квадратическим отклонением (или стандартным отклонением) и обозначается $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$. Чем больше разброс значений случайной величины X вокруг $M[X]$, тем больше $\sigma[X]$ и $D[X]$.

Как следует из определения, размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины. Так, если случайная величина имеет размерность «*вагон*», то математическое ожидание, мода и медиана имеют размерность «*вагон*», дисперсия имеет размерность «*вагон*^{2}», а среднее квадратическое отклонение имеет размерность «*вагон*».

Часто используются две безразмерные числовые характеристики, описывающие скошенность и островершинность графика функции плотности распределения вероятностей.

6 **Коэффициент асимметрии** (обозначается $A[X]$) характеризует скошенность распределения случайной величины относительно математическо-

го ожидания. Для симметричных относительно математического ожидания распределений $A[X]=0$. Если в распределении случайной величины преобладают положительные отклонения, то $A[X] > 0$, если отрицательные, то $A[X] < 0$.

На рисунке 3, *а* изображены графики функций плотности распределения вероятностей с положительным и отрицательным значениями $A[X]$, а также график симметричного распределения. Значение коэффициента асимметрии для дискретных и непрерывных случайных величин вычисляется, соответственно, по формулам

$$A[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^3 p_i}{(\text{у}[X])^3}; \qquad A[X]=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^3 f(x)dx}{(\sigma[X])^3}. \qquad (21)$$

7 **Коэффициент эксцесса** (обозначается $E[X]$) характеризует островершинность графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$. Своеобразным началом отсчета при измерении степени островершинности служит нормальное распределение, для которого $Ex[X]=0$.

Как правило, распределения с более высокой и более острой вершиной кривой плотности распределения (или многоугольника распределения) имеют положительное значение коэффициента эксцесса, а с более низкой и пологой – отрицательное значение.

На рисунке 3, *б* приведены графики функции плотности нормального распределения, а также распределений, имеющих положительное и отрицательное значения коэффициента эксцесса.

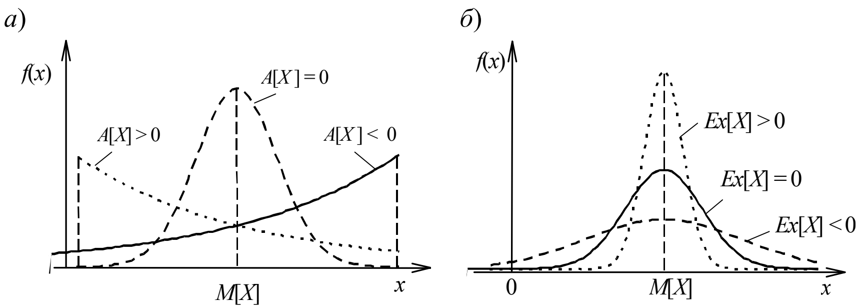


Рисунок 3 – Графики функции плотности нормального распределения:
а – при различных $A[X]$; *б* – при различных $Ex[X]$

Для вычисления значений коэффициента эксцесса дискретных и непрерывных случайных величин используются следующие формулы:

$$Ex[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^4 p_i}{(\text{у}[X])^4}-3; \quad Ex[X]=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^4 f(x)dx}{(\sigma[X])^4}-3. \qquad (22)$$

Пример 12. Для определённой в условии задачи дискретной случайной величины:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) вычислить и построить функцию распределения случайной величины;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, моду, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

В цехе работают три автоматических станка, изготавливающих однотипные детали. Вероятности изготовления детали высшего сорта для каждого из трех станков соответственно равны: 0,7; 0,6; 0,8. С каждого станка наудачу выбрано по одной детали. Случайная величина X – число деталей высшего сорта из трех наудачу выбранных.

Р е ш е н и е. 1 Возможные значения данной случайной величины X: 0, 1, 2, 3. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 3$ независимых испытаний.

В данном случае для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины X можно воспользоваться теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий.

Обозначим события: A_i = {с i-го станка выбрана деталь высшего сорта}, $i = 1, 2, 3$.

Согласно условию вероятность события A_1 $P(A_1) = 0{,}7$, вероятность события A_2 $P(A_2) = 0{,}6$, вероятность события A_3 $P(A_3) = 0{,}8$.

Тогда вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}7=0{,}3$, $P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}6=0{,}4$,

$P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}8=0{,}2$.

Определим все возможные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

События	Вероятности	События	Вероятности
1) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$	$0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$	5) $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$
2) $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}224$	6) $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}056$
3) $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$	$0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}144$	7) $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}036$
4) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}084$	8) $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$
		Ω	1

$P(X=0)=P(\omega_8)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}024;$

$P(X=1)=P(\omega_5)+P(\omega_6)+P(\omega_7)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+$
$+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}096+0{,}056+$
$+0{,}036=0{,}188;$

$P(X=2)=P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)+$
$+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}224+0{,}144+$
$+0{,}084=0{,}452;$

$P(X=3)=P(\omega_1)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}336.$

Проверим, что $\sum_{i=1}^{4} p_i=\sum_{j=0}^{3} P(x=j)=1$.

Ряд распределения данной случайной величины X:

x_i	0	1	2	3	Итого
p_i	0,024	0,188	0,452	0,336	1

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 4, *а*.

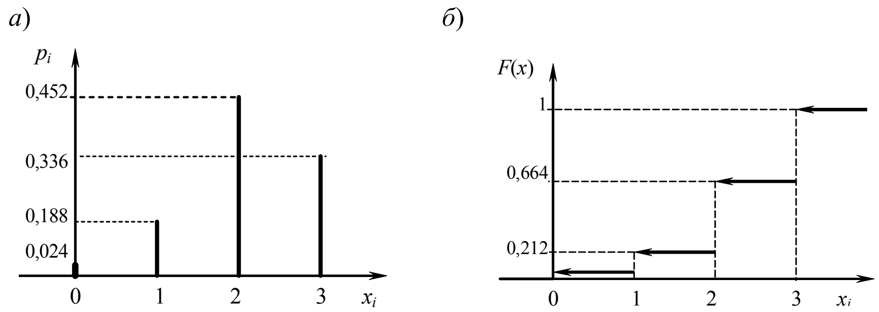


Рисунок 4 – Графики: *а* – столбцовой диаграммы; *б* – функции распределения

2 Вычислим функцию распределения данной случайной величины.

$F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)$:

при $x\in(-\infty;\,0]$ $F(x)=0$;

при $x\in(0;\,1]$ $F(x)=P(X=0)=0{,}024$;

при $x\in(1;\,2]$ $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}024+0{,}188=0{,}212$;

при $x\in(2;\,3]$ $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}024+0{,}188+0{,}452=$ $=0{,}664$;

при $x\in(3;\,+\infty)$ $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}024+$ $+0{,}188+0{,}452+0{,}336=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-\infty,0];\\ 0{,}024 & \text{при } x\in(0,1];\\ 0{,}212 & \text{при } x\in(1,2];\\ 0{,}664 & \text{при } x\in(2,3];\\ 1 & \text{при } x\in(3,+\infty).\end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 4, *б*.

3 Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Составим таблицу:

x_i	0	1	2	3	Итого
p_i	0,024	0,188	0,452	0,336	1
$x_i\cdot p_i$	0	0,188	0,904	1,008	2,1
$x_i^2\cdot p_i$	0	0,188	1,808	3,024	5,02

Математическое ожидание случайной величины X составит

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=2{,}1 \text{ [деталей]}.$$

Среднее число деталей высшего сорта из наудачу выбранных трех равно 2,1.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет моду $x_{\text{mod}}=2$ [деталей] (для $x_i=2$ вероятность принимает максимальное значение $p_i=0{,}452$), то есть наиболее вероятное число деталей высшего сорта из наудачу выбранных трех равно двум.

Дисперсия случайной величины X составит

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(M[X])^2=5{,}02-2{,}1^2=0{,}61\,[\text{деталей}^2].$$

Среднее квадратическое отклонение числа деталей высшего сорта из наудачу выбранных трех равно $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}61}=0{,}781$ [деталей].

Пример 13. Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) построить график функции плотности распределения вероятностей;
2) вычислить и построить функцию распределения случайной величины;
3) вычислить числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение;

4) найти вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку [a; b]:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0;\\ 4x^3 & 0\le x\le 1;\\ 0 & 1<x<\infty.\end{cases} \qquad a=0,\ b=0{,}5.$$

Р е ш е н и е. 1 График функции $f(x)$ изображён на рисунке 5, *а*.

2 Вычислим функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,,$$

при $x\in(-\infty;\,0]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0\,;$

при $x\in(0;\,1]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}4t^3dt=\left.\frac{4t^4}{4}\right|_0^x=x^4-0=x^4\,;$

при $x\in(1;+\infty)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}4t^3dt+\int_{1}^{x}0dt=\left.t^4\right|_0^1=1\,.$

Итак, $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} & -\infty<x\le 0;\\ x^4 & \text{при} & 0<x\le 1;\\ 1 & \text{при} & 1<x<\infty.\end{cases}$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 5, *б*.

а) *б*)

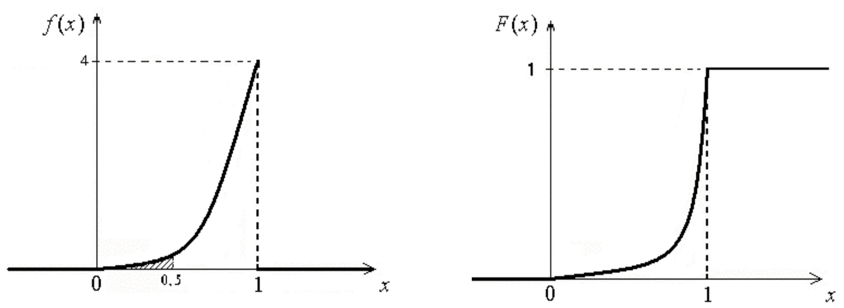


Рисунок 5 – Графики распределения:
а – плотности $f(x)$; *б* – функции $F(x)$

3 Вычислим числовые характеристики данной случайной величины. Математическое ожидание

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0dx=\left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1=0{,}8-0=0{,}8.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M[X])^2,$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-\left(0{,}8\right)^2=4\cdot\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1-0{,}8^2=0{,}0266.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}0266}\approx 0{,}163\,.$

Мода данной случайной величины, как следует из графика функции $f(x)$, равна 1.

Для определения медианы воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}} f(x)dx=\int_{x_{\text{med}}}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{x_{\text{med}}}4x^3dx=\left.x^4\right|_0^{x_{\text{med}}}=(x_{\text{med}})^4=0{,}5\,,$$

$$x_{\text{med}}=\sqrt[4]{0{,}5}\approx\pm 0{,}841\,.$$

По условию плотность распределения случайной величины не равна нулю в интервале [0; 1], поэтому $x_{\text{med}}=0{,}841$.

Медиану также можно определить из соотношения $F(x_{\text{med}})=0{,}5$.

Решая уравнение $(x_{\text{med}})^4=0{,}5$, получим $x_{\text{med}}=\sqrt[4]{0{,}5}\approx\pm 0{,}841$.

По условию плотность распределения случайной величины не равна нулю на отрезке [0; 1], поэтому $x_{\text{med}}=0{,}841$.

4 Для вычисления вероятности того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее отрезку [0; 0,5], можно воспользоваться, например, соотношением

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,,$$

$$P(0\le X\le 0{,}5)=\int_{0}^{0{,}5}4x^3dx=\left.x^4\right|_0^{0{,}5}=0{,}0625-0=0{,}0625.$$

На рисунке 5, *а* штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0 \le X \le 0{,}5) = 0{,}0625$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется случайной величиной?
2 Какие величины называются дискретными? Какие величины называются непрерывными?
3 Что называется законом распределения случайной величины?
4 Какими способами может быть задан закон распределения дискретной и непрерывной случайных величин?
5 Что характеризует функция распределения $F(x)$ случайной величины?
6 Что характеризует функция плотности распределения случайной величины?
7 Для каких величин определена функция плотности распределения?
8 Как связаны между собой функции $F(x)$ и $f(x)$?
9 Как определить вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в некоторый интервал с помощью функции плотности распределения?
10 Как определяется математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин?
11 Что такое среднее квадратическое отклонение?

2.4 Некоторые наиболее важные для практики законы распределения случайных величин

Наиболее часто используемые на практике законы распределения случайных величин:
дискретные законы:
– биномиальное распределение;
– распределение Пуассона;
– геометрическое распределение;
непрерывные законы:
– равномерное (прямоугольное) распределение;
– показательное (экспоненциальное) распределение;
– нормальное распределение (распределение Гаусса).

2.4.1 Законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение. Говорят, что дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону, если возможные значения этой случайной величины 0, 1, 2, …, n, а вероятность каждого из значений определяется по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad (23)$$

где $0 \le p \le 1$; $q = 1 - p$.

Постоянные $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$, входящие в формулу (23), называются параметрами биномиального распределения.

На практике биномиальное распределение возникает при следующих условиях: пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может осуществиться с вероятностью p. Тогда случайная величина X, определяющая число появлений события A в серии из n испытаний, распределена по биномиальному закону. Биномиальное распределение широко используется при выборочном методе контроля продукции, т. к. определяет вероятность извлечения из партии продукции заданного количества бракованных изделий при известной доле брака.

Закон называется «биномиальным», потому что правую часть равенства (24) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^0 q^n. \qquad (24)$$

Ряд распределения случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

x_i	0	1	…	k	…	$n-1$	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = np;\ D[X] = npq;\ \sigma[X] = \sqrt{npq}\,. \qquad (25)$$

$Mod\,[X]$ случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, является целое число k^*, удовлетворяющее системе неравенств:

$$np - q \le k^* \le np + p.$$

Пример 14. По каналу связи передается 5 сообщений. Каждое сообщение с вероятностью 0,1 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ряд распределения этой случайной величины, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить со значениями, которые получаются при использовании формул (25). Найти вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения.

Р е ш е н и е. Условие задачи соответствует проведению $n = 5$ независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}1$ может осуществиться событие A = {искажение передаваемого сообщения}. Случайная величина X, обозначающая число искаженных сообщений, распределена по биномиальному закону.

Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятности возможных значений случайной величины определяются по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=C_5^0 p^0 q^5 = 1\cdot 1\cdot 0{,}9^5 = 0{,}59049;$$
$$P(X=1)=C_5^1 p^1 q^4 = 5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^4 = 0{,}32805;$$
$$P(X=2)=C_5^2 p^2 q^3 = 10\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^3 = 0{,}0729;$$
$$P(X=3)=C_5^3 p^3 q^2 = 10\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081;$$
$$P(X=4)=C_5^4 p^4 q^1 = 5\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^1 = 0{,}00045;$$
$$P(X=5)=C_5^5 p^5 q^0 = 1\cdot 0{,}1^5\cdot 1 = 0{,}00001.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	Итого
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001	1

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

0,59049 + 0,32805 + 0,0729 + 0,0081 + 0,00045 + 0,00001 = 1.

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

x_i	0	1	2	3	4	5	Итого
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001	1
$x_i\cdot p_i$	0	0,32805	0,1458	0,0243	0,0018	0,00005	0,5
$x_i^2\cdot p_i$	0	0,32805	0,2916	0,0729	0,0072	0,00025	0,7

$$M[X]=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 0{,}5 \text{ [сообщений]};$$
$$D[X]=\sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0{,}7-0{,}5^2 = 0{,}45 \text{ [сообщений }^2\text{]};$$
$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}45}=0{,}671 \text{ [сообщений]};$$
$x_{\text{mod}}=0$ [сообщений].

Вычислим числовые характеристики этой случайной величины по формулам (25):

$M[X]=np=5\cdot 0{,}1=0{,}5;$

$D[X]=npq=5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}45;$

$\sigma[X]=\sqrt{npq}=\sqrt{0{,}45}=0{,}671.$

Определим моду: $5\cdot 0{,}1-0{,}9\le k^*\le 5\cdot 0{,}1+0{,}1;$

$$-0{,}4\le k^*\le 0{,}6;\ x_{\text{mod}}=0.$$

Как и следовало ожидать, получены точно такие же значения.

Вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения,

$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}59049+0{,}32805=0{,}91854.$

Геометрическое распределение. На практике геометрическое распределение возникает при следующих условиях: пусть производится серия независимых опытов, в каждом из которых может произойти событие A с одной и той же вероятностью p. Опыты продолжаются до первого появления события A.

Тогда случайная величина X, определяющая *число неудач, предшествующих успеху*, распределена по геометрическому закону.

Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, …, n, …, а вероятность каждого из этих значений определяется по формуле

$$P(X=m)=q^m p,\quad m=0,1,2,\dots,n,\dots, \qquad (26)$$

где $0\le p\le 1$; $q=1-p$.

Геометрическое распределение зависит от параметра $\boldsymbol{p}$.

Ряд распределения случайной величины X, имеющей геометрический закон:

x_i	0	1	2	…	m	…	n	…
p_i	p	$q^1 p$	$q^2 p$	…	$q^m p$	…	$q^n p$	…

Для случайной величины, распределенной по геометрическому закону,

$$M[X]=\frac{1-p}{p};\ D[X]=\frac{1-p}{p^2};\ \sigma[X]=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}};\ x_{\text{mod}}=0.$$

Примечание – Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называемое знаменателем геометрической прогрессии q,

$$a_2=a_1q,\ a_3=a_2q=a_1q^2,\ \dots,\ a_{n+1}=a_1q^n.$$

Сумма бесконечно убывающей ($q<1$) геометрической прогрессии $S=\dfrac{a}{1-q}$.

Условие $\sum_i P(X=x_i)=\sum_i p_i=1$ выполняется, так как, принимая во внимание условие сходимости геометрического ряда $\sum_{m=0}^{\infty} q^m a$, ($|q|<1$) и формулу $S=\dfrac{a}{1-q}$ для его суммы, получаем $\sum_{m=0}^{\infty} q^m p=\dfrac{p}{1-q}=\dfrac{p}{p}=1.$

Пример 15. Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, то дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, то контролер проверяет следующее изделие и т. д. Записать закон распределения случайной величины X – ***числа стандартных изделий***, проверенных до выявления брака.

Р е ш е н и е. Условие задачи соответствует проведению независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}06$ может осуществиться событие A = {обнаружено нестандартное изделие}. В этом случае ***неудача*** – обнаружение стандартного изделия, ***успех*** – обнаружение нестандартного изделия. Случайная величина X – число стандартных изделий, проверенных до выявления брака, распределена по геометрическому закону. Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3, …, m, …

По условию $p = 0{,}06$; $q = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Вероятности значений определяются по формуле (26):

$P(X=0) = q^0 p = 0{,}94^0 \cdot 0{,}06 = 0{,}06$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено сразу же при проверке первого изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно 0);

$P(X=1) = q^1 p = 0{,}94^1 \cdot 0{,}06 = 0{,}0564$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено при проверке второго изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно 1);

$P(X=2) = q^2 p = 0{,}94^2 \cdot 0{,}06 = 0{,}053016$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено при проверке третьего изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно двум) и т. д.

Закон распределения можно записать в виде $P(X = m) = 0{,}94^m \cdot 0{,}06$ или в виде ряда распределения случайной величины X:

x_i	0	1	2	…	m	…	n	…
p_i	0,06	0,0564	0,053016	…	$0{,}94^m \cdot 0{,}06$	…	$0{,}94^n \cdot 0{,}06$	…

Распределение Пуассона. Говорят, что дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если ее возможные значения: 0, 1, 2, …, m, … (счетное множество значений), а соответствующие им вероятности задаются формулой

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \; m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $a = np = \text{const}$.

Таблица значений вероятностей для различных значений m и a приведена в приложении В.

Таким образом, ряд распределения случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, имеет вид:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$(a^2 e^{-a})/2!$	…	$(a^k e^{-a})/k!$	…

Закон распределения Пуассона зависит от одного параметра a.

Доказано, что для случайной величины, распределенной по закону Пуассона,

$$M[X] = a; \; D[X] = a; \; \sigma[X] = \sqrt{a}.$$

Если a целое число, то случайная величина X, распределенная по закону Пуассона, имеет две моды: a и $a - 1$. Если a дробное число, то мода равна целой части a.

Рассмотрим условия, при которых возникает распределение Пуассона.

1 Распределение Пуассона с параметром $a = np$ можно приближенно применять вместо биномиального распределения, когда ***число испытаний n достаточно велико***, а ***вероятность появления события*** в каждом испытании ***p очень мала*** ($p < 0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие A появляется крайне редко. Отсюда происходит второе название для закона Пуассона – «закон редких событий».

2 По закону Пуассона распределена случайная величина, описывающая число событий простейшего потока, произошедших в течение промежутка времени t.

Простейший поток событий. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока λ называется среднее число событий, происходящих за единицу времени. Если $\lambda = \text{const}$, то поток называется *стационарным*. Это свойство означает, что вероятность наступления того или иного числа событий в течение отрезка времени длиной t не зависит от расположения на оси времени этого отрезка, а зависит только от его длины.

Поток называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый участок Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то отрезок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок, то есть предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем. Эта независимость физически сводится к тому, что события появляются на оси времени в силу случайных причин, индивидуальных для каждого из них.

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется *простейшим*.

Доказано, что для простейшего потока число событий, попадающих на каждый отрезок времени длиной t, распределено по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t$, где λ – интенсивность потока.

Пример 16. По данным длительной проверки качества запчастей определенного вида брак составляет 1 %.

Найти вероятность того, что в партии из 400 запчастей:

1) 5 запчастей окажутся бракованными;

2) не более 4 запчастей окажутся бракованными;

3) более 4 запчастей окажутся бракованными.

Р е ш е н и е. Случайная величина X, определяющая число бракованных запчастей в партии из 400 запчастей, может принимать значения 0, 1, 2, …, 400.

Определим событие B = {в партии из 400 запчастей 5 запчастей окажутся бракованными}.

Так как число испытаний велико, а вероятность наступления события A = {запчасть определенного вида окажется бракованной} очень мала ($p = 0{,}01 < 0{,}1$), то в этом случае можно воспользоваться приближенной формулой Пуассона, где $a = np = 400 \cdot 0{,}01 = 4$.

$$P(B) = P(X = 5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1563.$$

Определим событие C = {в партии из 400 запчастей не более 4 запчастей окажутся бракованными, то есть или 0, или 1, или 2, или 3, или 4}.

Воспользуемся приближенной формулой Пуассона и теоремой сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} +$$

$$+ \frac{4^1}{1!} e^{-4} + \frac{4^2}{2!} e^{-4} + \frac{4^3}{3!} e^{-4} + \frac{4^4}{4!} e^{-4} \approx 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 +$$

$+ 0{,}1954 = 0{,}6289$.

Определим событие D ={в партии из 400 запчастей более 4 запчастей окажутся бракованными, то есть или 5, или 6, или 7, или 8, …}.

События C и D – противоположные, то есть $C \cup D = \Omega$, $\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) = 1$, $P(D) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}6289 = 0{,}3711$.

О т в е т: вероятность того, что:

1) 5 запчастей окажутся бракованными, равна 0,1563;

2) не более 4 запчастей окажутся бракованными, равна 0,6289;

3) более 4 запчастей окажутся бракованными, равна 0,3711.

Пример 17. К абоненту АТС в среднем поступает 1,5 вызова в час. Поток вызовов можно считать простейшим.

Для этого промежутка времени найти вероятность того, что:

1) в течение часа поступит хотя бы один вызов;

2) в течение трех часов произойдет не менее четырех вызовов.

Р е ш е н и е. 1 Случайная величина X_1, определяющая число вызовов, поступивших в течение часа, может принимать значения 0, 1, 2, 3, … и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t=1{,}5$ (так как интенсивность потока $\lambda=1{,}5$; $t=1$ [час]).

Обозначим событие: A= {в течение часа поступит хотя бы один вызов}.

$$P(A)=P(X_1\geq 1)=1-P(X_1=0)=1-(a^0 e^{-a})/0!=1-e^{-1{,}5}=1-0{,}22313=0{,}77687.$$

2 Для определения вероятности события B = {в течение трех часов поступит не менее четырех вызовов} введем в рассмотрение случайную величину X_2, определяющую число вызовов, поступивших в течение трех часов.

Эта случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $a=\lambda t=1{,}5\cdot 3=4{,}5$ (так как интенсивность потока $\lambda=1{,}5$; $t=3$ [час]).

$$P(B)=P(X_2\geq 4)=1-P(X_2<4)=1-(P(X_2=0)+P(X_2=1)+P(X_2=2)+P(X_2=3))=$$

$$=1-\left(\frac{4{,}5^0}{0!}e^{-4{,}5}+\frac{4{,}5^1}{1!}e^{-4{,}5}+\frac{4{,}5^2}{2!}e^{-4{,}5}+\frac{4{,}5^3}{3!}e^{-4{,}5}\right)=1-0{,}3423\approx 0{,}6577.$$

О т в е т: вероятность того, что:

1) в течение часа поступит хотя бы один вызов, равна 0,77687;

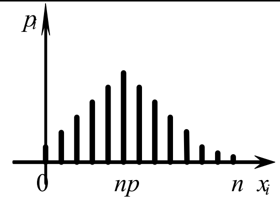
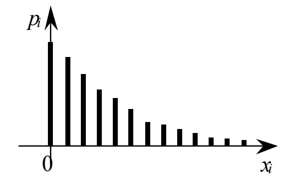
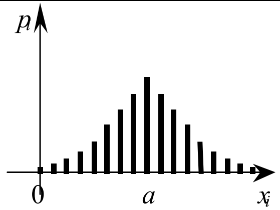
2) в течение трех часов произойдет не менее четырех вызовов, равна 0,6577.

В таблице 3 представим некоторые виды дискретных законов распределения.

Таблица 3 – **Некоторые виды дискретных законов распределения**

Закон распределения		
биномиальный	геометрический	Пуассона
Возможные значения		
X: 0, 1, 2, …, n	X: 0, 1, 2, …, m, …	X: 0, 1, 2, …, m, …
Формула для вычисления вероятности		
$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$	$P(X=m)=q^m p$	$P(X=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$

Окончание таблицы 3

Закон распределения		
биномиальный	геометрический	Пуассона
Столбцовая диаграмма		
		
Основные числовые характеристики дискретных случайных величин		
Математическое ожидание $M[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$. Дисперсия $D[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$.		
$M[X]=np$, $D[X]=npq$, $\sigma[X]=\sqrt{npq}$. Мода – целое число, удовлетворяющее неравенству $np-q \le m_0 \le np+p$	$M[X]=\dfrac{1-p}{p}$, $D[X]=\dfrac{1-p}{p^2}$, $\sigma[X]=\sqrt{\dfrac{1-p}{p^2}}$, $\mathrm{mod}[X]=0$	$M[X]=a$, $D[X]=a$, $\sigma[X]=\sqrt{a}$. Если a целое число, то $\mathrm{mod}[X]=a$ и $\mathrm{mod}[X]=a-1$
Примеры случайных величин, распределенных по закону		
1 X – число появлений герба при четырех подбрасываниях монеты. X: 0, 1, 2, 3, 4. 2 X – число бракованных деталей из наудачу выбранных трех (при условии, что вероятность брака для каждой детали одинаковая). X: 0, 1, 2, 3	1 Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры 6. X – число «неудачных» подбрасываний. X: 0, 1, 2 …. 2 Охотник стреляет в цель до первого попадания. X – число «неудачных» выстрелов. X: 0, 1, 2, 3, …, n, …	1 X – число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи в течение часа. X: 0, 1, 2, …, m, …. 2 Поток железнодорожных составов, прибывающих на станцию в течение часа. X: 0, 1, 2, …, m, …

2.4.2 Законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерный закон распределения. Непрерывная случайная величина, которая принимает значения, только принадлежащие отрезку $[a; b]$ с постоянной плотностью распределения, называется **распределенной по равномерному закону**.

Функция плотности распределения вероятностей определяется соотношением

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b; \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рисунке 6.

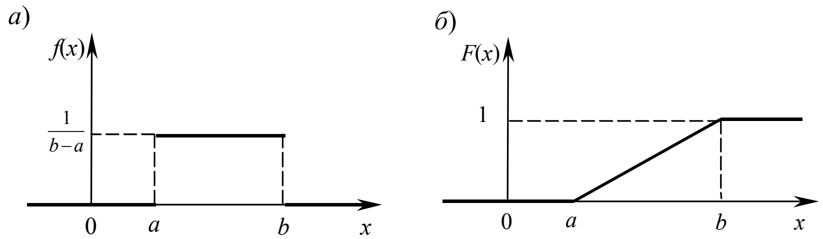


Рисунок 6 – Графики равномерного распределения:
а – функции $f(x)$; *б* – функции $F(x)$

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по равномерному закону на участке $[a; b]$, как следует из механической интерпретации (центр массы), равно абсциссе середины участка: $M[X]=(a+b)/2$. Этот же результат можно получить и вычисляя интеграл:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсию случайной величины X также можно найти, исходя из механической интерпретации (момент инерции распределения относительно центра массы): $D[X]=(b-a)^2/12$.

Тот же результат можно получить, вычисляя интеграл:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M[X])^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной случайной величины

$$\sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Моды равномерное распределение не имеет; его медиана из соображений симметрии равна $(a+b)/2$. Из тех же соображений симметрии коэффициент асимметрии $A[X]=0$. Коэффициент эксцесса случайной величины X равен $Ex[X]=-1{,}2$. Как и следовало ожидать, он отрицателен.

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по равномерному закону, примет значение, принадлежащее отрезку $[\alpha;\beta]$, равна

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Примером случайной величины, которая имеет равномерный закон распределения, является время ожидания регулярных событий, например, время ожидания поезда в метрополитене, время ожидания автобуса определенного маршрута на остановке.

Рассмотрим несколько примеров случайных величин, имеющих равномерное распределение. При проведении измерений некоторой величины с помощью прибора с крупными делениями ошибки округления распределены по равномерному закону. Очевидно, что равномерное распределение имеют и ошибки, возникающие от округления данных при расчетах.

Пример 18. Поезда метрополитена идут с интервалом в 5 минут. Пассажир приходит на платформу поезда в произвольный момент времени. Найти вероятность того, что он будет ожидать прихода поезда не более одной минуты. Найти среднее время ожидания поезда пассажиром, вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания поезда пассажиром.

Р е ш е н и е. Рассмотрим случайную величину X – время ожидания пассажиром поезда.

Все возможные значения данной случайной величины принадлежат отрезку [0; 5], и, согласно условию, все эти значения равновозможны. Следовательно, случайная величина распределена по равномерному закону с параметрами $a=0$ и $b=5$.

Функция плотности распределения вероятностей данной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\in(-\infty;0);\\ \dfrac{1}{5} & \text{при} \quad x\in[0;5];\\ 0 & \text{при} \quad x\in(5;\infty).\end{cases}$$

График плотности распределения представлен на рисунке 7.

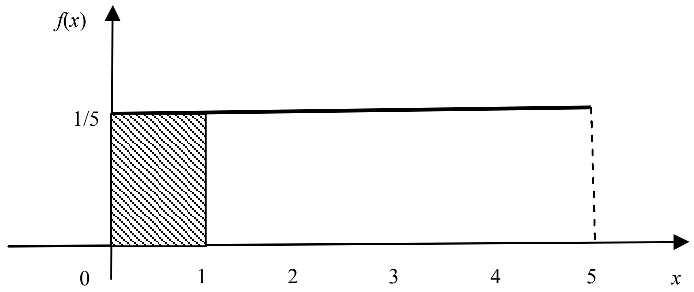


Рисунок 7 – График плотности распределения вероятностей случайной величины X – времени ожидания пассажиром поезда

Найдем вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд не более одной минуты:

$$P(0\le X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{5}dx=\frac{x}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}-0=0{,}2.$$

На рисунке 7 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0\le X\le 1)=0{,}2$.

Среднее время ожидания прихода поезда пассажиром

$M[X]=(a+b)/2=(0+5)/2=2{,}5$ [мин].

Дисперсия времени ожидания прихода поезда пассажиром

$$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(5-0)^2}{12}=2{,}083\ [\text{мин}^2].$$

Среднее квадратическое отклонение времени ожидания прихода поезда пассажиром

$$\sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{5-0}{2\sqrt{3}}=1{,}443\ [\text{мин}].$$

Показательное (экспоненциальное) распределение. Непрерывная случайная величина, которая принимает только неотрицательные значения с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$$

называется распределенной по показательному закону с параметром λ ($\lambda > 0$).

Функция распределения показательно распределенной случайной величины X

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ при значениях параметра λ, равных 1 и 2, приведены на рисунке 8.

а) *б*)

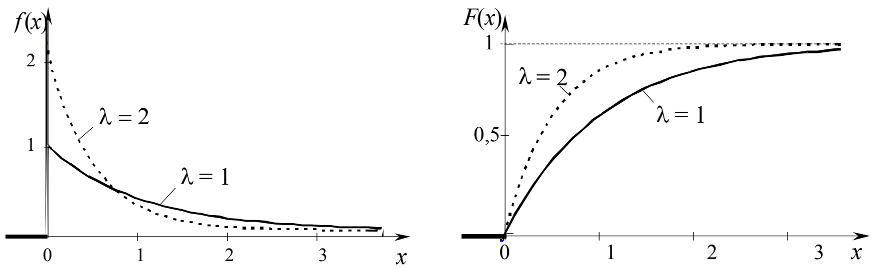


Рисунок 8 – Графики показательного распределения:
а – функции $f(x)$; *б* – функции $F(x)$

Несложно доказать, что для случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2 = \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{1}{\lambda}, \quad x_{\text{mod}} = 0, \quad x_{\text{med}} = \frac{1}{\lambda}\ln 2.$$

Коэффициент асимметрии $A[X] = 2$.

Коэффициент эксцесса случайной величины, распределенной по показательному закону, положителен и равен 6: $Ex[X] = 6$.

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по показательному закону, примет значение, принадлежащее отрезку $[\alpha;\beta]$, равна

$$P(\alpha \le X \le \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

В природе и технике существует множество явлений, которые могут быть, по крайней мере, приближенно описаны показательным законом распределения.

Так, в общем случае, результаты измерений временных показателей хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением.

В качестве примеров можно привести измерение продолжительности телефонных переговоров, продолжительность пользования Интернетом, а также различные виды «задач обслуживания» (например, измерение времени безотказной работы оборудования, времени ремонта и т. п.).

Пример 19. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$.

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что случайная величина X примет значения меньше двух. Построить график плотности распределения случайной величины X.

Р е ш е н и е. Согласно условию $\lambda = 3$.

Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X] = 1/\lambda$, определяем $M[X] = 1/3 = 0{,}333$.

Дисперсия $D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9} = 0{,}111$.

Функция плотности распределения данной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 3e^{-3x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

График функции плотности распределения представлен на рисунке 9.

Определим вероятность того, что величина примет значения меньше двух:

$$P(0 \le X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_0^2 = -e^{-6} + 1 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975.$$

На рисунке 9 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0 \le X \le 2) = 0{,}9975$.

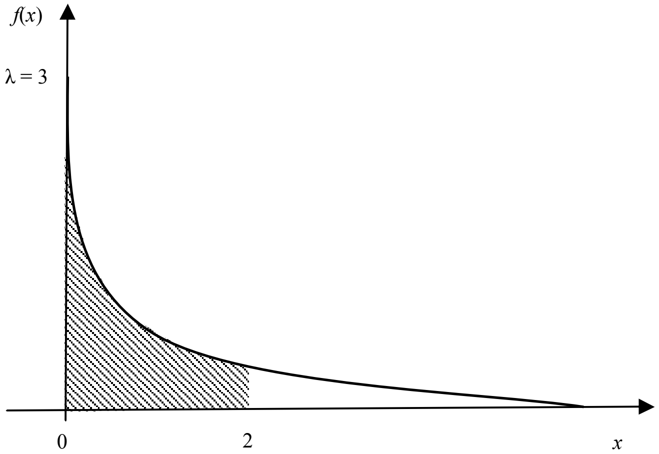


Рисунок 9 – График функции плотности распределения показательного закона

Нормальный закон распределения. Нормальное распределение (иногда называемое законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике и занимает среди других законов распределения особое положение.

Это объясняется целым рядом причин:

1 Многие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

2 Нормальное распределение хорошо подходит в качестве аппроксимации других распределений (например, биномиального).

3 Нормальное распределение обладает рядом математических свойств, во многом обеспечивших его широкое применение в теории вероятностей и математической статистике.

Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$ и m – параметры распределения.

Основные свойства нормального распределения:

1 Нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами: m и σ. Вероятностный смысл этих параметров таков: m – *математическое ожидание*, σ – *среднее квадратическое отклонение* рассматриваемой случайной величины. То есть для нормального распределения

$$M[X]=m;\ D[X]=\sigma^2;\ \sigma[X]=\sigma.$$

2 Кривая нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно прямой $x=m$, и при $x\to-\infty$ и $x\to\infty$ эта кривая асимптотически приближается к оси абсцисс.

Общий вид графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ для произвольных значений параметров m и σ изображен на рисунке 10.

3 Как видно из графика функции $f(x)$, для нормально распределенной случайной величины вероятность получения значений, значительно удаленных от среднего значения m, быстро уменьшается с ростом величины отклонения.

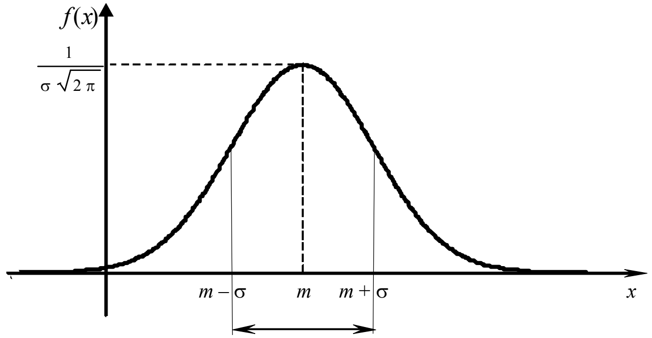


Рисунок 10 – График функции $f(x)$ нормально распределенной случайной величины

4 *Медиана* и *мода* случайной величины, распределенной по нормальному закону, совпадают и равны математическому ожиданию m, $x_{\text{mod}} = x_{\text{med}} = M[X] = m$.

5 *Коэффициенты асимметрии и эксцесса* нормально распределенной случайной величины равны нулю: $A[X]=0$; $Ex[X]=0$.

Тот факт, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и σ, символически записывается $X \sim N(m;\ \sigma)$. Этой случайной величине соответствует следующая функция распределения вероятностей:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 11.

На рисунках 12, *а* и 12, *б* изображены графики функции $f(x)$, соответствующие различным значениям параметров m и σ.

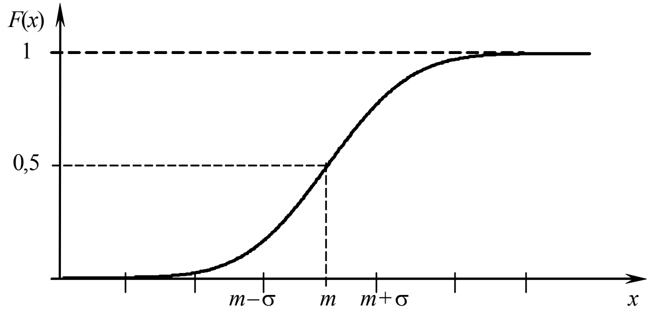


Рисунок 11 – График функции распределения $F(x)$ нормально распределенной случайной величины

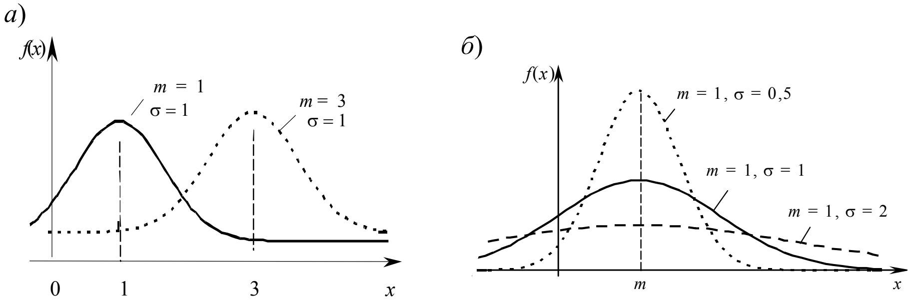


Рисунок 12 – Графики функции $f(x)$ нормально распределенной случайной величины:
а – для разных значений математического ожидания;
б – для разных значений среднего квадратического отклонения

Нормированное (стандартизованное) нормальное распределение

Нормированным (или *стандартизованным*) нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$.

Функция плотности распределения вероятностей стандартного распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

В приложении А приведены значения этой функции для неотрицательных значений аргумента, график функции $\varphi(x)$ изображен на рисунке 13.

Вычислим для нормально распределенной случайной величины X вероятность попадания на участок от α до β:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

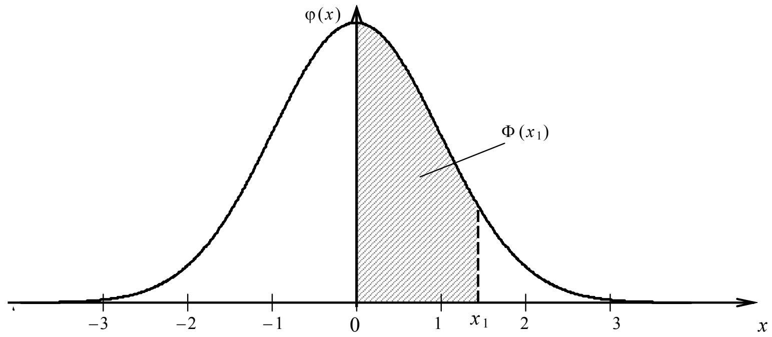


Рисунок 13 – График функции $\varphi(x)$

Как известно, неопределенный интеграл $\int e^{-t^2/2} dt$ не выражается через элементарные функции. Его можно выразить через специальную функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt , \tag{28}$$

называемую **функцией Лапласа** (или «**интегралом вероятностей**»), для которой составлены таблицы значений. В геометрической интерпретации $\Phi(x)$ равна площади фигуры под кривой $\varphi(x)$, опирающейся на отрезок $[0; x_1]$. На рисунке 13 эта фигура выделена штриховкой.

В приложении Б приведены значения функции Лапласа для положительных значений x. Функция $\Phi(x)$ – нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; при $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

С помощью функции Лапласа вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на участок от α до β выражается формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \tag{29}$$

Формула для расчета вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания на величину Δ имеет вид

$$P(|X - m| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) \cdot \tag{30}$$

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда складывается большое число независимых (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

причем эти величины сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы.

Тогда, каковы бы ни были законы распределения отдельных величин X_i, закон распределения их суммы X будет близок к нормальному, причем тем ближе, чем больше число слагаемых n.

На практике наиболее часто встречаются именно такие случайные величины.

Результаты измерения длины, массы, времени, ошибки измерения и многие другие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

Пример 20. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $M[X]=m$, $\sigma[X]=\sigma$.

Найти вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на: *а*) σ, *б*) 2σ, *в*) 3σ.

Р е ш е н и е. Для вычисления искомых вероятностей воспользуемся формулой (29):

а) вычислим вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на σ.

$$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = \Phi\left(\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}34134 -$$

$$-(-0{,}34124) = 0{,}68268.$$

Произведем расчет, используя формулу (30):

$$P(|X-m| < \Delta = \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0{,}68268,$$

где $\Delta = \sigma$ – величина отклонения случайной величины X от ее математического ожидания.

График функции плотности распределения нормального распределения $f(x)$ изображен на рисунке 14.

На рисунке 14 под графиком кривой нормального распределения указаны площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, которые равны вероятностям попадания значения случайной величины на указанные отрезки.

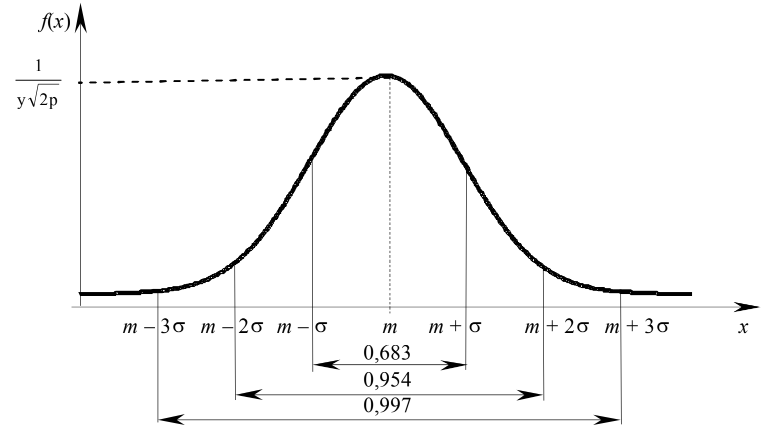


Рисунок 14 – Вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на: *а*) σ, *б*) 2σ; *в*) 3σ

График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 15.

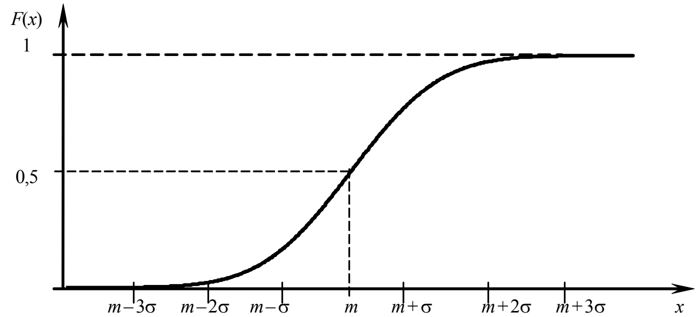


Рисунок 15 – График функции распределения $F(x)$ нормально распределенной случайной величины

б) вычислим вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на 2σ.

$$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma = \Phi\left(\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= 0{,}47725 - (-0{,}47725) = 0{,}9645.$$

в) вычисим вероятность того, что случайная величина X будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на 3σ.

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = \Phi\left(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= 0{,}49865 - (-0{,}49865) = 0{,}9972.$$

Пример 21. Случайное отклонение изменения курса акций некоторой компании относительно их текущего курса является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5 у. е. Систематические отклонения изменения курса акций от номинальной стоимости отсутствуют. Какова вероятность того, что в определенный день курс акции отклонится от номинала не более чем на 2 у. е.? Какова вероятность того, что в определенный день курс акции отклонится от номинала более чем на 2 у. е.?

Р е ш е н и е. Рассмотрим случайную величину X – случайные отклонения изменения курса акций некоторой компании относительно их текущего курса. Согласно условию, $M[X]=0$ [у. е.], $\sigma[X]=5$ [у. е.].

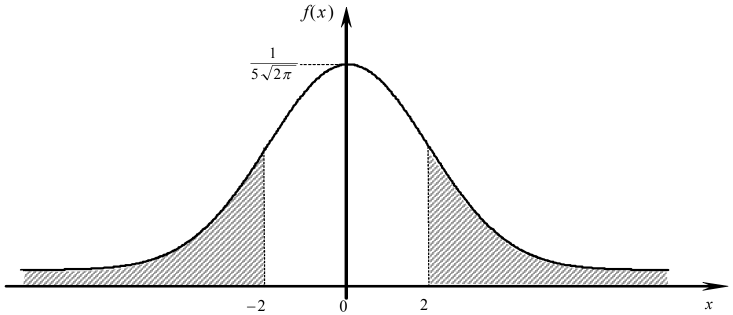


Рисунок 16 – График плотности распределения вероятностей нормального закона

Найдем вероятность события A ={в определенный день курс акции отклонится от номинала не более чем на 2 у. е.}:

$$P(A) = P(|X| \le 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{5}\right) = 2\Phi(0{,}4) = 2\cdot 0{,}15542 = 0{,}31084 \approx 0{,}311.$$

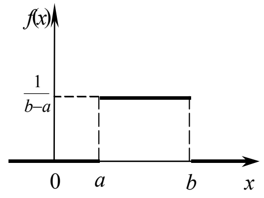
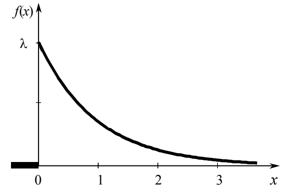
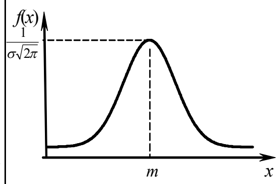
Найдем вероятность события B = {в определенный день курс акции отклонится от номинала более чем на 2 у. е.}:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}31084 \approx 0{,}689.$$

На рисунке 16 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности события B.

В таблице 4 представим некоторые виды непрерывных законов распределения.

Таблица 4 – **Некоторые виды непрерывных законов распределения**

Закон распределения		
равномерный	экспоненциальный (показательный)	нормальный
Параметры распределения		
a, b	λ	m, σ
Функция плотности распределения вероятностей		
$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$
График плотности распределения вероятностей		
		
Основные числовые характеристики непрерывных случайных величин		
Математическое ожидание непрерывной случайной величины $$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx.$$ Дисперсия непрерывной случайной величины $$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(M[X])^2.$$ Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$		
$M[X]=\frac{b+a}{2}$, $D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$, $\text{у}[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$, $x_{\text{med}}=\frac{a+b}{2}$, x_{mod} – нет	$M[X]=\frac{1}{\text{л}}$, $D[X]=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{1}{\lambda}$, $x_{\text{mod}}=0$, $x_{\text{med}}=\frac{1}{\lambda}\ln 2$	$M[X]=m$ $D[X]=\sigma^2$, $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sigma$, $x_{\text{mod}}=m$, $x_{\text{med}}=m$

Окончание таблицы 4

Закон распределения		
равномерный	экспоненциальный (показательный)	нормальный
Формула для вычисления вероятности попадания случайной величины X в интервал $[\alpha;\beta]$ $P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$		
$P(\alpha \le X < \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$	$P(\alpha \le X < \beta) =$ $= e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$	$P(\alpha \le X < \beta) =$ $= \Phi\left(\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)$
Случайные величины X, распределенные по закону		
1 Время ожидания поезда в метрополитене. 2 Время ожидания троллейбуса определенного маршрута на остановке	1 Продолжительность пользования Интернетом. 2 Период работы оборудования до отказа	1 Рост человека в определенном регионе. 2 Диаметр изготовленной детали

Вопросы для самоконтроля

1 Какими параметрами определяется биномиальный закон распределения?

2 Какими параметрами определяется геометрический закон распределения?

3 Какими параметрами определяется закон Пуассона?

4 Приведите примеры случайных величин, распределенных по равномерному закону.

5 Какими параметрами определяется показательный закон распределения?

6 Какими параметрами определяется нормальный закон?

7 Как определяется вероятность попадания значения случайной величины, распределенной нормально, в некоторый интервал?

8 Чему равны мода, медиана, математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Из трех карточек с буквами «С», «Т», «О» произвольным образом выбирают три и укладывают на стол в порядке их появления. Найти вероятность того, что:

1) карточки будут расположены в порядке «СТО»;

2) первой появится буква «С».

Решение. 1 Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного появления букв «С», «Т», «О».

Пространство элементарных исходов рассматриваемого эксперимента: $\Omega = \{$ СТО, СОТ, ТСО, ТОС, ОСТ, ОТС$\}$.

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 6 элементов: $n = 6$.

Событие $A = \{$карточки будут расположены в порядке «СТО»$\}$.

Элементарные исходы, благоприятствующие событию A: $A = \{$СТО$\}$.

Поскольку карточки выбираются случайным образом и все элементарные исходы равновозможны, то для вычисления вероятности интересующего нас события можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

Число исходов, благоприятных событию A, равно 1, $m = 1$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6} = 0{,}167.$$

2 Событие $B = \{$первой появится буква «С»$\}$.

Элементарные исходы, благоприятствующие событию B: $B = \{$СТО, СОТ$\}$.

Число исходов, благоприятных событию B, равно 2, $m = 2$.

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = 0{,}333.$$

Ответ: вероятность того, что:

1) карточки будут расположены в порядке «СТО», равна 0,167;

2) первой появится буква «С», равна 0,333.

Задача 2. Два клиента зашли в магазин. Вероятность того, что первый клиент пожелает сделать покупку, равна 0,7, для второго клиента эта вероятность равна 0,5.

Найти вероятность того, что захотят сделать покупку:

1) оба клиента;
2) только один клиент;
3) хотя бы один клиент.

Р е ш е н и е. Обозначим события:

A_i = {i-й клиент пожелает сделать покупку}, i = 1, 2;

B = {оба клиента пожелают сделать покупку};

C = {только один клиент из двух пожелает сделать покупку};

D = {хотя бы один клиент из двух пожелает сделать покупку}.

Согласно условию, вероятность события A_1: $P(A_1) = 0{,}7$; вероятность события A_2: $P(A_2) = 0{,}5$.

Тогда вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Определим все элементарные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

События	Вероятности	События	Вероятности
A_1A_2	$0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$	$\overline{A}_1A_2$	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
$A_1\overline{A}_2$	$0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$	$\overline{A}_1\overline{A}_2$	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
		Ω	1

Событие B можно представить в виде $B = A_1 A_2$.

Полагая, что события A_i (i = 1, 2) независимы, и применяя теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(B) = P(\omega_1) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35.$$

Событие C можно представить в виде $C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(C) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}50.$$

Событие D можно представить в виде $D = A_1A_2 + A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$ или в виде $D = \Omega - \overline{D}$.

$\overline{D}$ – событие, противоположное событию D: $\overline{D}$ = {оба клиента не пожелают сделать покупку}.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(D) = P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}85,$$ или $P(D) = 1 - P(\overline{D})$,

$$P(\overline{D}) = P(\omega_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

О т в е т: вероятность того, что:
1) захотят сделать покупку оба клиента, равна 0,35;
2) покупку пожелает сделать только один клиент из двух, равна 0,50;
3) покупку пожелает сделать хотя бы один клиент, равна 0,85.

Задача 3. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. X – число вопросов на экзамене из трех задаваемых, на которые студент сможет дать ответ.

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

x_i	0	1	2	3
p_i	1/64	9/64	27/64	27/64

Р е ш е н и е. Составим таблицу для данной случайной величины X:

x_i	0	1	2	3	Итого
p_i	1/64	9/64	27/64	27/64	1
$x_i \cdot p_i$	0	9/64	54/64	81/64	144/64
$x_i^2 \cdot p_i$	0	9/64	108/64	243/64	360/64

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 17.

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет две моды: $x_{\text{mod}} = 2$, $x_{\text{mod}} = 3$, то есть наиболее вероятное число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2 или 3.

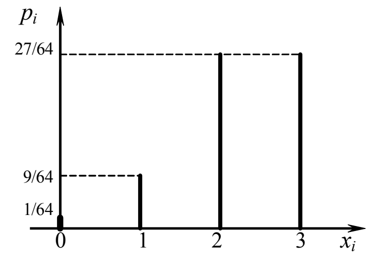


Рисунок 17 – Столбцовая диаграмма

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{27}{64} + 3 \cdot \frac{27}{64} = \frac{144}{64} = 2{,}25 \text{ [вопросов]},$$

то есть среднее число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2,25.

Дисперсия

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(M[X])^2=0\cdot\frac{1}{64}+1\cdot\frac{9}{64}+4\cdot\frac{27}{64}+9\cdot\frac{27}{64}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{360}{64}-$$

$-2{,}25^2=0{,}5625$ [вопросов^2].

Среднее квадратическое отклонение

$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}5625}=0{,}75$ [вопросов], то есть среднее квадратическое отклонение числа вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 0,75.

О т в е т: математическое ожидание числа вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2,25; дисперсия равна 0,5625; среднее квадратическое отклонение равно 0,75; наиболее вероятное число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2 или 3.

Задача 4. Время пользования интернетом в вечернее время распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 0,9 часа. Найти вероятность того, что пользователь будет находиться в интернете менее 1 часа. Найти среднее квадратическое отклонение времени пользования интернетом.

Р е ш е н и е. Согласно условию математическое ожидание случайной величины X, обозначающей время пользования интернетом, равно 0,9 часа. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X]=1/\lambda$, определяем значение параметра $\lambda=1/M[X]=1/0{,}9=1{,}111$. Функция плотности распределения данной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ 1{,}111e^{-1{,}111x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Определим вероятность того, что пользователь будет находиться в интернете менее 1 часа:

$$P(0\le X<1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1{,}111e^{-1{,}111x}dx=-e^{-1{,}111x}\Big|_0^1=-e^{-1{,}111}+1=1-0{,}3292=$$

$=0{,}6708$.

Для случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$D[X]=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{1{,}111^2}=0{,}9001;\quad \sigma[X]=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1{,}111}=0{,}900.$$

На рисунке 18 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0\le X<1)=0{,}6708$.

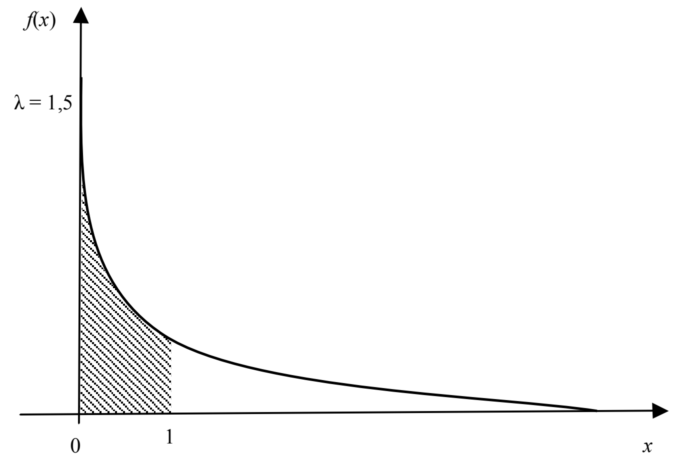


Рисунок 18 – График плотности распределения вероятностей показательного закона

Контрольная работа для ЗФ по теории вероятностей и математической статистике

Задача 1. Из урны, содержащей 30 шаров (пронумерованных числами от 1 до 30), случайным образом вынимается один шар. Найти вероятность того, что номер вынутого шара будет: 1) кратным 6; 2) не менее 10.

О т в е т: 1) 0,2; 2) 0,7.

Задача 2. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 2 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди десяти заготовок, взятых для контроля, окажется только одна нестандартная заготовка.

О т в е т : 0,196.

Задача 3. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

x_i	10	20	25	35
p_i	0,6	0,2	0,1	0,1

О т в е т: $M[X] = 16$; $D[X] = 69$; $\sigma[X] = 8{,}307$; $x_{\text{mod}} = 10$.

Задача 4. Вероятность того, что мост в течение года потребует ремонта, равна 0,2. В городе 6 мостов. Случайная величина, характеризующая число мостов, нуждающихся в ремонте, имеет биномиальный закон распределения. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребуют 3 моста.

О т в е т : 0,082.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(*справочное*)

Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

X	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
∞	0									

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(*справочное*)

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0,0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0,0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	0,1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	0,1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	0,1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	0,2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,49865									
3,1	0,49903									
3,2	0,49931									
3,3	0,49952									
3,4	0,49966									
3,6	0,499841									
3,8	0,499928									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,4999997									
∞	0,5									

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(*справочное*)

Таблица значений формулы Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

m	a					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,90484	0,81873	0,740818	0,67032	0,60653	0,5488
1	0,09048	0,16375	0,222245	0,26813	0,30327	0,3293
2	0,00452	0,01637	0,033337	0,05363	0,07582	0,0988
3	0,00015	0,00109	0,003334	0,00715	0,01264	0,0198
4	3,8E–06	5,5E–05	0,00025	0,00072	0,00158	0,003
5	7,5E–08	2,2E–06	1,5E–05	5,7E–05	0,00016	0,0004
6	1,3E–09	7,3E–08	7,5E–07	3,8E–06	1,3E–05	4E–05
7	1,8E–11	2,1E–09	3,21E–08	2,2E–07	9,4E–07	3E–06
8	2,2E–13	5,2E–11	1,21E–09	1,1E–08	5,9E–08	2E–07
9	2,5E–15	1,2E–12	4,02E–11	4,8E–10	3,3E–09	2E–08
10	2,5E–17	2,3E–14	1,21E–12	1,9E–11	1,6E–10	9E–10

m	a					
	0,7	0,8	0,9	1	2	3
0	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788	0,1353	0,04979
1	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788	0,2707	0,14936
2	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394	0,2707	0,22404
3	0,02839	0,03834	0,0494	0,06131	0,1804	0,22404
4	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533	0,0902	0,16803
5	0,0007	0,00123	0,002	0,00307	0,0361	0,10082
6	8,1E–05	0,00016	0,0003	0,00051	0,012	0,05041
7	8,1E–06	1,9E–05	3,9E–05	7,3E–05	0,0034	0,0216
8	7,1E–07	1,9E–06	4,3E–06	9,1E–06	0,0009	0,0081
9	5,5E–08	1,7E–07	4,3E–07	1E–06	0,0002	0,0027
10	3,9E–09	1,3E–08	3,9E–08	1E–07	4E–05	0,00081

Окончание приложения В

m	a						
	4	5	6	7	8	9	10
0	0,0183	0,0067	0,00248	0,00091	0,0003	0,00012	4,54E–05
1	0,0733	0,0337	0,01487	0,00638	0,0027	0,00111	0,000454
2	0,1465	0,0842	0,04462	0,02234	0,0107	0,005	0,00227
3	0,1954	0,1404	0,08924	0,05213	0,0286	0,01499	0,007567
4	0,1954	0,1755	0,13385	0,09123	0,0573	0,03374	0,018917
5	0,1563	0,1755	0,16062	0,12772	0,0916	0,06073	0,037833
6	0,1042	0,1462	0,16062	0,149	0,1221	0,09109	0,063055
7	0,0595	0,1044	0,13768	0,149	0,1396	0,11712	0,090079
8	0,0298	0,0653	0,10326	0,13038	0,1396	0,13176	0,112599
9	0,0132	0,0363	0,06884	0,1014	0,1241	0,13176	0,12511
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,07098	0,0993	0,11858	0,12511
11	0,0019	0,0082	0,02253	0,04517	0,0722	0,09702	0,113736
12	0,0006	0,0034	0,01126	0,02635	0,0481	0,07277	0,09478
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,01419	0,0296	0,05038	0,072908
14	6E-05	0,0005	0,00223	0,00709	0,0169	0,03238	0,052077
15	2E-05	0,0002	0,00089	0,00331	0,009	0,01943	0,034718

Примечание – $6\text{E}-05 = 6 \cdot 10^{-5} = \dfrac{6}{10^5} = 0{,}00006.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

2 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 275 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.

4 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.

5 **Малинковский, Ю. В.** Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. / Ю. В. Малинковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – Ч. 1. Теория вероятностей : учеб. пособие. – 355 с.

6 **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей : в 2 ч. / Е. Л. Сазонова ; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2000. – Ч. 1. Теория вероятностей : пособие для студентов ФБО. – 95 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

АЛЫМОВА Тамара Викторовна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л. С. Репикова*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *Т. А. Пугач*

Подписано в печать 17.11.2017 г. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$
Бумага офсетная. Гарнитура Times Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,04. Тираж 200 экз.
Зак. 4351. Изд. № 141

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель