

УДК 378.141.2/.5:531

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, М. Г. КУЗНЕЦОВА, И. Е. КРАКОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПРОВЕДЕНИЕ XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ В ДИСТАНЦИОННОМ ФОРМАТЕ

Представлена информация о XVI Международной олимпиаде по теоретической механике, которая состоялась в Белорусском государственном университете транспорта в апреле 2020 г. Приведены условия и решения задач, сведения о результатах олимпиады.

Ключевые слова: теоретическая механика, олимпиада, условия задач, решения.

В апреле 2020 г. в Белорусском государственном университете транспорта состоялась очередная XVI Международная олимпиада по теоретической механике. Закрытие границ между государствами привело к невозможности проведения олимпиады в очном режиме, поэтому было принято решение о дистанционном ее проведении. Несмотря на сложившуюся ситуацию, посоревноваться в знаниях и умениях решать задачи по теоретической механике, зарегистрировалось 294 участника из 50 вузов: Азербайджана (2 университета), Армении (1), Беларуси (10), Китая (9), России (17), Туркменистана (8), Узбекистана (2) и Украины (1). В отличие от предыдущих лет проведения олимпиад [1–3], в этом году проводился только личный теоретический конкурс.

Дистанционная форма проведения олимпиады потребовала изменения условий конкурса. Число задач теоретического конкурса было уменьшено до шести: участникам предлагались по две задачи по статике, кинематике и динамике. Выдача условий и отправка решений осуществлялись по электронной почте через руководителей команд. За 15 минут до начала олимпиады им были высланы файлы с условиями на русском и английском языках (см. с. 246), которые затем передавались студентам. На решение задач теоретического конкурса отводилось 2,5 часа, в течение которых осуществлялась видео- и аудиозапись решения задач студентами. После отведенного на решение времени студенты должны были в течение 20 минут выполнить экспресс-отправку решений (по четыре листа на кадр), а затем, в течение еще двух часов, качественные снимки с решениями (по одному листу на кадр).

Проверка работ осуществлялась преподавателями кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» БелГУТа. Каждая задача оценивалась исходя из 10 баллов, причем оценка выставлялась с точностью до 0,5 балла. По результатам конкурса 10 % участников, набравших наибольшее число баллов, были награждены дипломами I степени, следующие 20 % – дипломами II степени и еще 30 % – дипломами III степени.

Наибольшие затруднения у участников вызвала вторая часть задачи С1. Лишь одному из них удалось корректно доказать, что проскальзывание ци-

линдров начинается в точке их соприкосновения. Наибольшее количество правильных решений оказалось при проверке задачи С2. В задаче К1 многие участники испытали затруднения с анализом относительного движения тел, при котором точка их соприкосновения перемещалась с разными относительными скоростями по отношению к этим телам. Особенность задачи К2 была связана с неопределенностью, возникающей при вертикальном положении стержня, поэтому типовой путь решения приводил к необходимости сложных математических операций. Задачи Д1 и Д2 требовали хорошего понимания явлений, происходящих при движении материальных систем при наличии трения и без него.

Наибольшее число баллов, 55 из возможных 60, набрал студент университета Цинхуа (Китай) Liu Zehua, значительно оторвавшийся от своих ближайших преследователей, в числе которых студенты Уфимского государственного нефтяного технического университета и Московского физико-технического института (Россия), Университетов Тонгдзи и Юго-Восточного (Китай), Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина (Украина).

Более подробную информацию о результатах прошедшего конкурса можно найти в приложении, а также на сайте БелГУТа <http://bsut.by>.

Дистанционная форма проведения олимпиады в 2020 году – наш первый такой опыт. С точки зрения организации дистанционная форма проведения позволила расширить круг участников, но были и некоторые технические сложности. Надеемся, что полученный опыт будет использован при организации аналогичных конкурсов в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Shimanovsky, A. O.** The holding of contests in engineering mechanics / A. O. Shimanovsky // *International Journal of Mechanical Engineering Education*. – 2013. – Vol. 41, No. 2. – P. 107–114.

2 **Шимановский, А. О.** XV Международная олимпиада по теоретической механике / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 232–257.

3 **Шимановский, А. О.** Опыт проведения олимпиад по теоретической механике в Белорусском государственном университете транспорта / А. О. Шимановский, М. Г. Кузнецова, И. Е. Кракова // *Теоретическая механика : сб. науч. метод. статей*. – М. : Изд-во Московского ун-та, 2020. – Вып. 31. – С. 173–183.

A. O. SHIMANOVSKY, M. G. KUZNIATSOVA, I. E. KRAKOVA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

XVI INTERNATIONAL ENGINEERING MECHANICS CONTEST IN DISTANCE FORM

There is presented the information about the 16th International Engineering Mechanics Contest which took place at the Belarusian State University of Transport in April 2020. The problem tasks and solutions and the Contest results information are demonstrated.

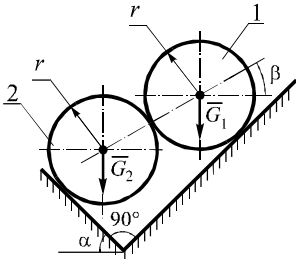
Keywords: engineering mechanics, contest, problem conditions, solutions.

Получено 30.09.2020

1 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Задача С1–2020

Два цилиндра 1 и 2 опираются друг на друга и две наклонные плоскости, как это показано на рисунке. Сила тяжести цилиндра 2 равна G_2 , углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



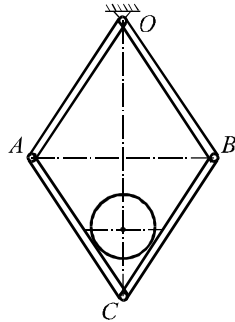
1. Определить, при каком значении силы G_1 система будет находиться в равновесии в случае, если все поверхности гладкие.

2. Найти диапазон значений силы G_1 , обеспечивающей равновесие системы в случае, если коэффициенты трения между цилиндрами, а также между цилиндрами и плоскостями одинаковы и равны f . Сопротивлением качению пренебречь.

Задача С2–2020

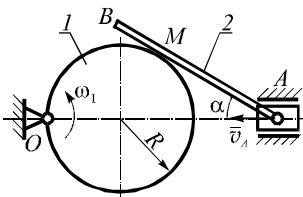
Четыре одинаковых однородных стержня веса G и длины l каждый соединены между собой шарнирно, образуя ромб. Своим верхним шарниром ромб крепится к неподвижной опоре. Внутри ромба помещен однородный цилиндр веса P , который находится в равновесии при угле между верхними стержнями, равном 2α .

Пренебрегая трением, найти диаметр цилиндра.



Задача К1–2020

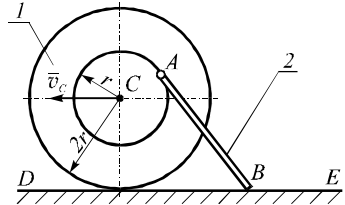
Кулачок 1 радиуса $R = 4\sqrt{3}$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с и приводит в движение опирающийся на него в точке M стержень 2. В точке A стержень соединен с ползунком, который перемещается по горизонтали с постоянной скоростью 3 см/с.



Для данного положения механизма, при котором $\alpha = 30^\circ$, определить скорость и ускорение точки контакта M в ее движении относительно стержня 2 и кулачка 1.

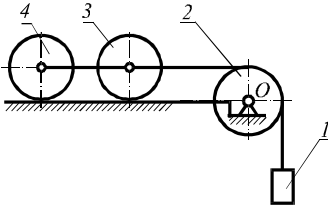
Задача К2–2020

Ступенчатое колесо 1 , имеющее радиусы r и $2r$, катится по направляющей DE без скольжения, так что его центр движется с постоянной скоростью v_c . В точке A к колесу шарнирно прикреплен стержень 2 длины $3r$, конец B которого скользит вдоль DE . Определить угловую скорость стержня 2 в момент, при котором точка A займет верхнее положение.



Задача Д1–2020

Груз 1 подвешен к невесомой нити, переброшенной через блок 2 , вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Он приводит в движение катки 3 и 4 , перемещающиеся по горизонтальной плоскости. Массы тел 2 , 3 и 4 одинаковы и равны m каждая. Блок 2 и каток 3 – сплошные однородные диски, масса катка 4 равномерно распределена по ободу. Коэффициент трения между катками и поверхностью $f < 1$.

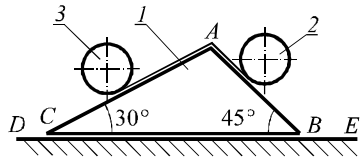


Пренебрегая сопротивлением качению, определить, при каких значениях массы груза 1 один из катков будет катиться с проскальзыванием, а второй – без него.

Задача Д2–2020

На шероховатую горизонтальную плоскость DE помещена треугольная призма 1 массы $2m$, которая может скользить по этой плоскости. На грани AB и AC призмы, поверхности которых гладкие, устанавливаются сплошные однородные цилиндры 2 и 3 массы m каждый. Катки связаны невесомой нерастяжимой нитью.

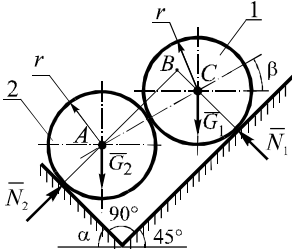
Определить, при каких значениях коэффициента трения между призмой 1 и плоскостью DE призма будет оставаться неподвижной при движении цилиндров.



2 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача С1–2020

1 Случай гладких поверхностей.



Запишем сумму моментов относительно точки пересечения линий действия сил \bar{N}_1 и \bar{N}_2

$$\sum M_{iB} = 0; G_2 AB \cos 45^\circ - G_1 BC \cos 45^\circ = 0.$$

Учитывая, что $AB = AC \cos 15^\circ$; $BC = AC \sin 15^\circ$, получаем

$$G_1 = G_2 \operatorname{ctg} 15^\circ = (2 + \sqrt{3})G_2.$$

2 Случай шероховатых поверхностей (силы трения на рисунке показаны для случая $G_{1\max}$).

Из уравнений равновесия

$$\sum M_{iC} = 0; F_{f1} \cdot r - F_{f12} \cdot r = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0; F_{f2} \cdot r - F_{f12} \cdot r = 0$$

получаем $F_{f1} = F_{f2} = F_{f12}$.

При равновесии должны выполняться условия $F_{f1} \leq fN_1$; $F_{f12} \leq fN_{12}$; $F_{f2} \leq fN_2$. Поэтому проскальзывание начнется в точке, где нормальная реакция наименьшая.

Составим уравнения моментов относительно точек пересечения линий действия сил трения каждого тела.

Для цилиндра 1 имеем

$$\sum M_{iE} = 0; -N_{12} \cdot r \operatorname{ctg} \gamma + N_1 \cdot r \operatorname{ctg} \gamma - G_1 \cdot \frac{r}{\sin \gamma} \cdot \cos(\gamma + \alpha) = 0.$$

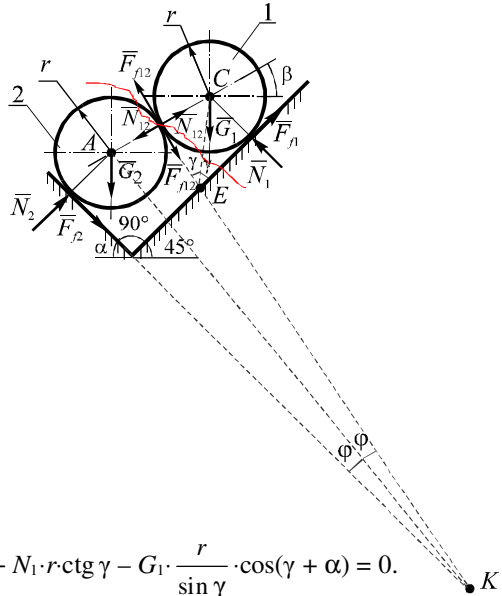
Из рисунка следует, что $\gamma = (\alpha + \beta) / 2 = 37,5^\circ$. Отсюда

$$N_{12} = N_1 - G_1 \frac{\cos(\gamma + \alpha)}{\sin \gamma \operatorname{ctg} \gamma} = N_1 - G_1 \frac{\cos(\gamma + \alpha)}{\cos \gamma}. \quad (1)$$

Следовательно, $N_{12} < N_1$.

Теперь рассмотрим цилиндр 2:

$$\sum M_{iK} = 0; -N_2 \cdot r \operatorname{ctg} \phi + N_{12} \cdot r \operatorname{ctg} \phi + G_2 \cdot \frac{r}{\sin \phi} \cdot \cos(\phi + \alpha) = 0.$$



Здесь $\varphi = (90^\circ - 2\gamma) / 2 = 7,5^\circ$. Следовательно,

$$N_{12} = N_2 - G_2 \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin \varphi \operatorname{ctg} \varphi} = N_2 - G_2 \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi}. \quad (2)$$

Таким образом, $N_{12} < N_2$, поэтому наименьшая нормальная реакция имеет место в точке контакта цилиндров. Значит, $F_{f12} = fN_{12}$; $F_{f1} < fN_1$; $F_{f2} < fN_2$.

Из (1) и (2) получаем

$$N_1 = N_{12} + G_1 \frac{\cos 82,5^\circ}{\cos 37,5^\circ}; \quad N_2 = N_{12} + G_2 \frac{\cos 52,5^\circ}{\cos 7,5^\circ}. \quad (3)$$

Отметим, что полученные соотношения не зависят от направлений сил трения и справедливы как в случае наибольшей, так и наименьшей силы G_1 .

Рассмотрим случай $G_1 = G_{1\max}$. Для системы в целом имеем

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_2 + F_{f1} - G_1 \cos 45^\circ - G_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_1 - F_{f2} - G_1 \cos 45^\circ - G_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Учитывая, что $F_{f1} = F_{f2} = F_{f12}$, и подставляя выражения (3), находим:

$$N_{12} + G_2 \frac{\cos 52,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} + F_{f12} - G_1 \cos 45^\circ - G_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$N_{12} + G_1 \frac{\cos 82,5^\circ}{\cos 37,5^\circ} - F_{f12} - G_1 \cos 45^\circ - G_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Решение полученной системы уравнений дает

$$\begin{aligned} N_{12} &= G_1 \cos 45^\circ + G_2 \cos 45^\circ - G_1 \frac{\cos 82,5^\circ}{2 \cos 37,5^\circ} - G_2 \frac{\cos 52,5^\circ}{2 \cos 7,5^\circ} = \\ &= \frac{G_1 (2 + \sqrt{6} - \sqrt{\sqrt{3}-1}) + G_2 (2 + \sqrt{6} - \sqrt{\sqrt{3}+1})}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}; \end{aligned}$$

$$F_{f12} = G_1 \frac{\cos 82,5^\circ}{2 \cos 37,5^\circ} - G_2 \frac{\cos 52,5^\circ}{2 \cos 7,5^\circ} = \frac{G_1 \sqrt{\sqrt{3}-1} - G_2 \sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

Учитывая, что $F_{f12} = fN_{12}$, получаем

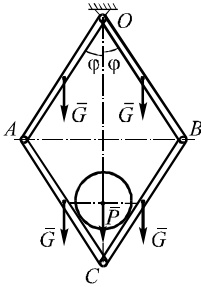
$$\frac{G_1 \sqrt{\sqrt{3}-1} - G_2 \sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = f \frac{G_1 (2 + \sqrt{6} - \sqrt{\sqrt{3}-1}) + G_2 (2 + \sqrt{6} - \sqrt{\sqrt{3}+1})}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})};$$

$$G_{1\max} = G_2 \frac{(2-f)\sqrt{\sqrt{3}+1} + 2f + \sqrt{6}f}{(2+f)\sqrt{\sqrt{3}-1} - 2f - \sqrt{6}f}.$$

Если же $G_1 = G_{1\min}$, то направления сил трения изменяются на противоположные. Поэтому искомое значение можно получить, изменяя знак перед коэффициентом трения на противоположный:

$$G_{1\min} = G_2 \frac{(2+f)\sqrt{\sqrt{3}+1} - 2f - \sqrt{6}f}{(2-f)\sqrt{\sqrt{3}-1} + 2f + \sqrt{6}f}.$$

Задача С2–2020



Выражение потенциальной энергии системы в функции угла φ имеет вид

$$E_p(\varphi) = -4Gl \cos \varphi - P \left(2l \cos \varphi - \frac{r}{\sin \varphi} \right).$$

При равновесии потенциальная энергия минимальна, поэтому при $\varphi = \alpha$

$$\frac{\partial E_p(\varphi)}{\partial \varphi} = 4Gl \sin \varphi + P \left(2l \sin \varphi - \frac{r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{Pr \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4Gl \sin \alpha + 2Pl \sin \alpha;$$

$$d = 2r = \frac{4(2G + P)l \sin^3 \alpha}{P \cos \alpha}.$$

Если $d > l \sin 2\alpha$, то цилиндр выходит за габариты ромба. Отсюда следует, что при $\operatorname{tg}^2 \alpha \geq \frac{P}{4G + 2P}$ равновесие в изображенном положении невозможно.

Задача К1–2020

Запишем выражения координат точки M в системе отсчета с началом в точке O_1 для произвольного положения:

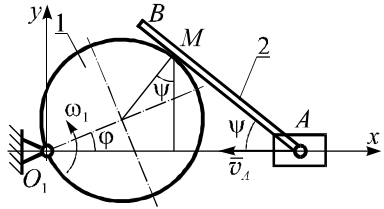
$$\begin{aligned} x_M &= R \cos \varphi + R \sin \psi = O_1A - AM \cos \psi = \\ &= O_1A_0 - v_A t - AM \cos \psi; \end{aligned}$$

$$y_M = R \sin \varphi + R \cos \psi = AM \sin \psi.$$

Тогда проекции вектора скорости точки M

$$v_{Mx} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + R \cos \psi \frac{d\psi}{dt} = -v_A - \frac{dAM}{dt} \cos \psi + AM \sin \psi \frac{d\psi}{dt};$$

$$v_{My} = R \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - R \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{dAM}{dt} \sin \psi + AM \cos \psi \frac{d\psi}{dt}.$$



Поскольку $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\psi}{dt} = \omega_2$ и $\frac{dAM}{dt} = v_{M_2}$, то имеем

$$\begin{aligned} -R \sin \varphi \cdot \omega_1 + R \cos \varphi \cdot \omega_2 &= -v_A - v_{M_2} \cos \psi + AM \sin \psi \cdot \omega_2, \\ R \cos \varphi \cdot \omega_1 - R \sin \varphi \cdot \omega_2 &= v_{M_2} \sin \psi + AM \cos \psi \cdot \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

В заданном положении $\varphi = 0$, $\psi = \alpha = 30^\circ$, $AM = R\sqrt{3}$, поэтому

$$\begin{aligned} R \cos 30^\circ \cdot \omega_2 &= -v_A - v_{M_2} \cos 30^\circ + R\sqrt{3} \sin 30^\circ \cdot \omega_2; \\ \omega_1 R - R \sin 30^\circ \omega_2 &= v_{M_2} \sin 30^\circ + R\sqrt{3} \cos 30^\circ \cdot \omega_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Из первого уравнения получаем

$$\omega_2 R \frac{\sqrt{3}}{2} = -v_A - v_{M_2} \frac{\sqrt{3}}{2} + R \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_2; \quad v_{M_2} = -v_A \frac{2}{\sqrt{3}} = -3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Тогда второе уравнение системы (2) примет вид

$$\omega_1 R - \omega_2 \frac{R}{2} = -2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \omega_2 R.$$

Отсюда
$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R + \sqrt{3}}{2R} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{8} \text{ рад/с.}$$

$$v_{M_1} = (\omega_1 + \omega_2)R = \left(2 + \frac{9}{8}\right) \cdot 4\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ см/с.}$$

Продифференцируем систему уравнений (1) по времени

$$\begin{aligned} -\omega_1 R \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} R \cos \psi - \omega_2 R \sin \psi \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{dv_{M_2}}{dt} \cos \psi + v_{M_2} \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \\ &+ \frac{dAM}{dt} \sin \psi \cdot \omega_2 + AM \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \cdot \omega_2 + AM \sin \psi \frac{d\omega_2}{dt}; \\ -\omega_1 R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\omega_2}{dt} R \sin \psi - \omega_2 R \cos \psi \frac{d\psi}{dt} &= \frac{dv_{M_2}}{dt} \sin \psi + v_{M_2} \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \\ &+ \frac{dAM}{dt} \cos \psi \cdot \omega_2 - AM \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \cdot \omega_2 + AM \cos \psi \frac{d\omega_2}{dt}. \end{aligned}$$

Для заданного положения получим

$$\begin{aligned} -\omega_1^2 R + \varepsilon_2 R \cos 30^\circ - \omega_2^2 R \sin 30^\circ &= \\ = -a_{M_2}^{\tau} \cos 30^\circ + 2v_{M_2} \omega_2 \sin 30^\circ + \omega_2^2 AM \cos 30^\circ + \varepsilon_2 AM \sin 30^\circ; \\ -\varepsilon_2 R \sin 30^\circ - \omega_2^2 R \cos 30^\circ &= \\ = a_{M_2}^{\tau} \sin 30^\circ + 2v_{M_2} \omega_2 \cos 30^\circ - \omega_2^2 AM \sin 30^\circ + \varepsilon_2 AM \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений относительно a_{M2}^τ и ε_2 .

$$-R\omega_1^2 + \varepsilon_2 R \frac{\sqrt{3}}{2} - \omega_2^2 R \frac{1}{2} = -a_{M2}^\tau \frac{\sqrt{3}}{2} + 2v_{M2}\omega_2 \cdot \frac{1}{2} + R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_2^2 + R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_2;$$

$$-\varepsilon_2 R \frac{1}{2} - \omega_2^2 R \frac{\sqrt{3}}{2} = a_{M2}^\tau \frac{1}{2} + 2v_{M2}\omega_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \omega_2^2 + R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \varepsilon_2.$$

Отсюда

$$a_{M2}^\tau = \frac{2\omega_2^2 R + \omega_1^2 R + v_{M2}\omega_2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot 4\sqrt{3} + 2^2 \cdot 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{9}{8}}{\sqrt{3}/2} = \frac{191}{4} \text{ см/с}^2;$$

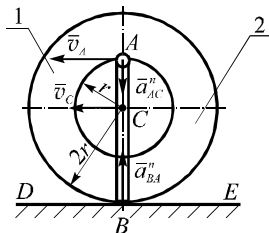
$$\varepsilon_2 = -\frac{a_{M2}^\tau \cdot \frac{1}{2} + v_{M2}\omega_2 \sqrt{3}}{2R} = -\frac{\frac{191}{4} \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \sqrt{3}}{2R} = -\frac{137}{16R} \text{ рад/с}^2.$$

Тогда ускорение точки M в ее движении относительно кулачка

$$a_{M1}^\tau = \varepsilon_2 R = -\frac{137}{16} \text{ см/с}^2; \quad a_{M1}^n = (\omega_1 + \omega_2)^2 R = \left(2 + \frac{9}{8}\right)^2 4\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

$$a_{M1} = \sqrt{\left(\frac{137}{16}\right)^2 + \left(\frac{625 \cdot \sqrt{3}}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{137^2 + 3 \cdot 625^2}}{16} = 68,2 \text{ см/с}^2.$$

Задача К2-2020



В момент, когда точка A занимает высшее положение, стержень расположен вертикально. При этом угловая скорость колеса $\omega_1 = v_C/2r$, а его угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$. Следовательно, ускорение точки A

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC}^\tau + \bar{a}_{AC}^n = \bar{a}_{AC}^n; \quad a_A = a_{AC}^n = \omega_1^2 r = \frac{v_C^2}{4r}.$$

Ускорения точек A и B связаны соотношением

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Учитывая, что точка B движется по прямой, при проецировании на вертикальную ось получаем:

$$0 = -a_A + a_{BA}^n; \quad a_{BA}^n = \omega_2^2 BA = \omega_2^2 \cdot 3r; \quad \omega_2^2 = \frac{a_A}{3r} = \frac{v_C^2}{3 \cdot 4r^2}.$$

Следовательно,

$$\omega_2 = \frac{v_C}{2r\sqrt{3}}.$$

Задача Д1–2020

Определим ускорение тела 1 при качении без проскальзывания, используя общее уравнение динамики:

$$G_1 \delta s - \Phi_1 \delta s - M_{\Phi_2} \frac{\delta s}{r} - M_{\Phi_3} \frac{\delta s}{r} - \Phi_3 \delta s - M_{\Phi_4} \frac{\delta s}{r} - \Phi_4 \delta s = 0.$$

Причем $\Phi_1 = m_1 a_1$; $\Phi_3 = \Phi_4 = m a_1$;

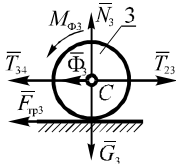
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{a_1}{r}; \quad M_{\Phi_2} = M_{\Phi_3} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{a_1}{r}; \quad M_{\Phi_4} = m r^2 \cdot \frac{a_1}{r}.$$

Подстановка в общее уравнение динамики дает

$$m_1 g - m_1 a_1 - \frac{m a_1}{2} - \frac{m a_1}{2} - m a_1 - m a_1 - m a_1 = 0.$$

Отсюда
$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + 4m}. \quad (1)$$

Условие качения без проскальзывания $F_{\text{тр}} \leq fN$. Нормальные реакции опорной поверхности $N_3 = N_4 = mg$. Для определения силы трения $F_{\text{тр}3}$ составим уравнение моментов относительно центра масс катка:



$$\sum M_{iC3} = 0; \quad M_{\Phi_3} - F_{\text{тр}3} r = 0.$$

Тогда
$$F_{\text{тр}3} = \frac{m r a_1}{2r} = \frac{m a_1}{2}.$$

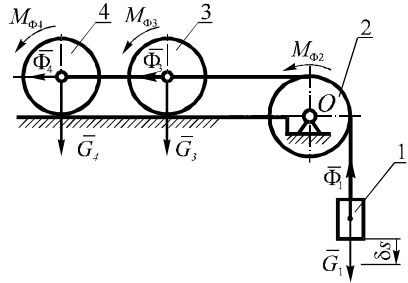
Аналогично определяем
$$F_{\text{тр}4} = m a_1.$$

Таким образом, проскальзывание третьего катка начнется при $a_1 > 2fg$, а четвертого при $a_1 > fg$. То есть каток 4 начнет проскальзывать при меньшей массе m_1 . Ее значение найдем из уравнения (1)

$$\frac{m_1 g}{m_1 + 4m} = fg; \quad m_1 = \frac{4mf}{1-f}.$$

При полном проскальзывании имеем:

$$\begin{cases} m_4 a_1 = T_{34} - fmg; \\ m_3 a_1 = T_{23} - T_{34} - fmg; \\ J_{20} \frac{a_1}{r} = (T_1 - T_{23}) r; \\ m_1 a_1 = G_1 - T_1 r. \end{cases}$$



Последовательная подстановка выражений сил в последнее уравнение системы дает

$$m_1 a_1 = m_1 g - \frac{m_1 a_1}{2} - m_3 a_1 - fmg - m_4 a_1 - fmg; \quad a_1 = \frac{m_1 g - 2fmg}{m_1 + 2,5m}.$$

Проскальзывание катка 3 начинается при выполнении условия $a_1 = 2fg$.

Тогда

$$\frac{m_1 g - 2fmg}{m_1 + 2,5m} = 2fg; \quad m_1 = \frac{7fm}{1-2f}.$$

Если $f \geq 0,5$, то значение массы $m_1 < 0$. Эта ситуация означает, что каток 3 никогда не будет проскальзывать.

Таким образом, окончательно получаем:

$$\text{при } f < 0,5 \quad \frac{4mf}{1-f} < m_1 < \frac{7fm}{1-2f};$$

$$\text{при } f \geq 0,5 \quad \frac{4mf}{1-f} < m_1 < \infty.$$

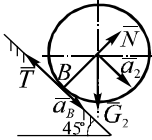
Задача Д2–2020

Динамические уравнения движения цилиндра 2:

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin 45^\circ - T; \quad J_2 \varepsilon_2 = TR.$$

Подставляя $J_2 = mR^2/2$; $\varepsilon_2 = (a_2 - a_B)/R$, получаем

$$ma_2 = mg \sin 45^\circ - T; \quad \frac{1}{2}mR(a_2 - a_B) = TR.$$

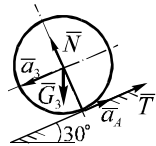


Теперь аналогично рассмотрим движение цилиндра 3, учитывая, что в случае гладкой поверхности сила натяжения не меняется:

$$m_3 a_3 = m_3 g \sin 30^\circ - T; \quad J_3 \varepsilon_3 = TR;$$

$$J_3 = mR^2/2; \quad \varepsilon_3 = (a_3 + a_A)/R = (a_3 + a_B)/R;$$

$$ma_3 = mg \sin 30^\circ - T; \quad \frac{1}{2}mR(a_3 + a_B) = TR.$$



Тогда, складывая выражения сил натяжения

$$T = \frac{1}{2}m(a_2 - a_B) \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{2}m(a_3 + a_B),$$

получаем

$$T = m(a_2 + a_3)/4.$$

Подставляя в динамические уравнения движения цилиндров, имеем

$$\begin{cases} ma_2 = mg \sin 45^\circ - ma_2/4 - ma_3/4; \\ ma_3 = mg \sin 30^\circ - ma_2/4 - ma_3/4. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 5a_2 + a_3 = 4g \sin 45^\circ; \\ 5a_3 + a_2 = 4g \sin 30^\circ; \end{cases}$$

$$a_3 = 4g \sin 45^\circ - 5a_2; \quad 20g \sin 45^\circ - 25a_2 + a_2 = g \sin 30^\circ;$$

$$a_2 = \frac{g}{24} (20 \sin 45^\circ - 4 \sin 30^\circ);$$

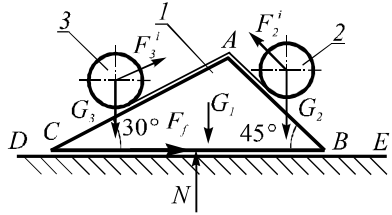
$$a_3 = 4g \sin 45^\circ - \frac{5g}{24} (20 \sin 45^\circ - 4 \sin 30^\circ) = \frac{g}{24} (20 \sin 30^\circ - 4 \sin 45^\circ).$$

Рассмотрим систему в целом, применяя принцип Даламбера.

Главные векторы сил инерции цилиндров определяются следующими выражениями:

$$F_2^i = m_2 a_2 = \frac{mg}{24} (20 \sin 45^\circ - 4 \sin 30^\circ);$$

$$F_3^i = \frac{mg}{24} (20 \sin 30^\circ - 4 \sin 45^\circ).$$



Проецируя силы на оси координат, получаем

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_3^i \cos 30^\circ - F_2^i \cos 45^\circ + F_f = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad F_3^i \sin 30^\circ + F_2^i \sin 45^\circ + N - G_1 - G_2 - G_3 = 0.$$

Соответственно сила трения и нормальная реакция поверхности:

$$F_f = F_2^i \cos 45^\circ - F_3^i \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{mg}{24} \left(20 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{mg}{24} \left(20 \cdot \frac{1}{2} - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{mg}{24} (10 - \sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{6});$$

$$N = G_1 + G_2 + G_3 - F_3^i \sin 30^\circ - F_2^i \sin 45^\circ =$$

$$= 4mg - \frac{mg}{24} \left(20 \cdot \frac{1}{2} - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{mg}{24} \left(20 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{mg}{24} (96 - 5 + \sqrt{2} - 10 + \sqrt{2}) = \frac{(81 + 2\sqrt{2})mg}{24}.$$

Поэтому искомое значение коэффициента трения

$$f \geq \frac{F_f}{N} = \frac{\frac{mg}{24} (10 - \sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{6})}{\frac{(81 + 2\sqrt{2})mg}{24}} = \frac{10 - \sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{6}}{81 + 2\sqrt{2}} = 0,028.$$

3 РЕЗУЛЬТАТЫ КОНКУРСА

Студенты, набравшие наибольшее количество баллов.

Студент	Вуз	Баллы по задачам						Всего
		1	2	3	4	5	6	
Liu Zehua	THU	7	10	7,5	10	10	10	55
Иванов Максим Дмитриевич	УГНТУ	6,5	10	6	7	8,5	10	48
Zhong Hanzhong	THU	9,5	10	8	4	7,5	9	48
Jiang Jian	TJU	4	9,5	4,5	10	8	9,5	46
Sun Chenyang	SEU	7	10	7,5	7	2,5	10	44
Лукин Илья Владимирович	ХНУ	5	9,5	–	9	10	10	44
Zhao Bingchen	THU	6,5	10	0	9	9	9	44
Уймин Андрей Иванович	МФТИ	8	9,5	8,5	1,5	7,5	8	43
Lai Yuchen	THU	7	9,5	3	1	9,5	10	40
Николаев Андрей Сергеевич	МФТИ	1	9,5	0	10	10	8,5	39
Кузнецов Вячеслав Александрович	МФТИ	2,5	10	–	10	9	7,5	39
Chen Mo	TJU	6,5	7	1,5	4	9	10	38
Chen Tianze	SEU	5	9	4,5	4	8,5	6	37
Дедков Евгений Андреевич	МФТИ	7,5	9,5	1,5	8,5	9	–	36
Wang Tiqing	NUAA	6,5	9,5	1,5	2,5	5	10	35
Xu Zhiyin	SEU	3	9	3,5	4,5	5	8	33
Zhong Xilin	NUAA	5	10	1,5	10	5	1	33
Овчаренко Григорий Вадимович	ХНУ	2,5	7	2	8	4	8,5	32
Дурсунов Касымберды Алтымухаммедович	ТСХИ	4	9,5	6	9	3	–	32
Shi Haoran	SEU	4	7	2	10	7	1,5	32
Jiang Qi	THU	6	10	8,5	0,5	4	2,5	32
Luo Qingyong	SYSU	4,5	9,5	3	10	1	3	31
Li Tuo	NWPU	3,5	9,5	6	2	4	6	31
Li Haolong	SDU	3	6	1	10	3,5	6,5	30
Cao Yutian	NWPU	4	9,5	0	4	8	4,5	30
Агаджанов Эзиз Гурбанмухаммедович	ТСХИ	3	10	3	2	3	8,5	30
Yan Bingfei	SYSU	4	10	6,5	0,5	1,5	7	30
Li Shu	AFEU	4,5	10	3	5	2,5	4,5	30
Яковлев Захар Александрович	ИТМО	7,5	2	0	0,5	9	9,5	29
Зограбян Давит Самвелович	МФТИ	6	9,5	–	9,5	–	3	28
Геворгян Давит Геворгович	МФТИ	6	9	3,5	7,5	1	1	28
Chen Dibo	SYSU	4,5	10	5,5	4	2,5	1,5	28
Zhang Yuchen	NUAA	5	9,5	0	5	5	3	28
Dong Chuang	SDU	4	9	5	1	1,5	7	28
Аннагульев Атамырат Шохрадович	ТГУ	3	5,5	1	6	4,5	6,5	27
Ni Junyu	SEU	5	5	0,5	6,5	3	6,5	27
Zhang Xiangteng	THU	3,5	10	–	2	8	2,5	26
Сафиуллин Рамиль Ильдарович	УГНТУ	3	10	2,5	1,5	–	8	25
Циоплиакис Николаос Илиас	ЮУрГУ	3	8,5	3	10	–	–	25
Солецкий Роман Николаевич	МФТИ	5	2	7	0,5	10	–	25
Никка Герман Дмитриевич	ИТМО	3,5	10	0,5	10	0,5	–	25
Zeng Zehao	HU	1,5	4	2	10	2,5	4,5	25
Леонов Алексей Юрьевич	ЮУрГУ	4,5	2,5	1	10	5	1	24
Cao Shumeng	SDU	3	4,5	4	3,5	1,5	7,5	24
Дидковский Дмитрий Алексеевич	Военмех	6	7	0,5	10	–	–	24

4 КОМАНДЫ-УЧАСТНИЦЫ И ИХ РУКОВОДИТЕЛИ

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности (АГУНП).

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова (ВОЕНМЕХ) – Илхменев Андрей Львович.

Барановичский государственный университет (БарГУ) – Федосов Николай Михайлович.

Белорусская государственная академия авиации (БГАА) – Гурвич Юрий Абрамович.

Белорусский государственный университет транспорта (БелГУТ) – Шимановский Александр Олегович.

Белорусский государственный университет (БГУ) – Мармыш Денис Евгеньевич.

Белорусский национальный технический университет (БНТУ) – Скляр Ольга Николаевна.

Белорусско-Российский университет (БРУ) – Трусов Игорь Валерьевич.

Брестский государственный технический университет (БрГТУ) – Веремейчик Андрей Иванович.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого (ГГТУ) – Кроль Дмитрий Григорьевич.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ГГУ) – Капшай Валерий Николаевич.

Государственный энергетический институт Туркменистана (ГЭИТ) – Акмырадов Шатлык Бегенджович.

Западно-Каспийский Университет (ЗКУ).

Институт инженерно-технических и транспортных коммуникаций Туркменистана (ИИТТКТ) – Ишангульев Атаберди Ишангульевич.

Институт телекоммуникаций и информатики Туркменистана (ИТИТ) – Багшыев Аннамухаммет Акмухаммедович.

Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ) – Марданов Ренат Фаритович.

Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ) – Муштари Айрат Ильдарович.

Международный университет нефти и газа (МУНГ) – Ишангульев Гуванч Атабердыевич.

Московский физико-технический институт (государственный университет) (МФТИ) – Сахаров Александр Вадимович.

Национальный исследовательский университет ИТМО (ИТМО) – Герчиков Леонид Григорьевич.

Национальный политехнический университет Армении (НПУА).

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева (НГТУ).

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (НГАСУ) – Юдин Владимир Алексеевич.

Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» – Кучерявый Сергей Иванович.

Самарский государственный университет путей сообщения, филиал г. Нижний Новгород (СамГУПС) – Манакин Евгений Анатольевич.

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) – Кутеева Галина Анатольевна.

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева (СибГУ) – Фалькова Екатерина Владимировна, Назарова Лариса Петровна, Фисенко Елена Николаевна, Климовский Дмитрий Андреевич.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта (ТашИИТ).

Ташкентский институт по проектированию, строительству и эксплуатации автомобильных дорог (ТИПСЭАД).

Томский государственный архитектурно-строительный университет (ТГАСУ) – Геттингер Максим Викторович.

Туркменский государственный архитектурно-строительный институт (ТГАСИ) – Ишангулиев Арслан Атабердыевич.

Туркменский государственный университет им. Махтумкули (ТГУ) – Машаев Мурад Ходжамкулиевич.

Туркменский сельскохозяйственный институт (ТСХИ) – Гарягдыев Мырат Нурмырадович.

Туркменский государственный педагогический институт имени Сейди (ТГПИ) – Мырадов Сердар Ханмырадович.

Университет гражданской защиты МЧС РБ (УГЗ МЧС) – Мартыненко Тарас Михайлович, Камлюк Андрей Николаевич.

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС) – Тарасян Владимир Сергеевич.

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ) – Рощева Татьяна Анатольевна.

Уфимский государственный нефтяной технический университет (УГНТУ) – Тихонов Александр Юрьевич.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (ХНУ) – Пославский Сергей Александрович.

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. Платова – Нефедов Виктор Викторович.

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (ЮУрГУ) – Слепова Светлана Владимировна, Прядко Юрий Григорьевич.

Air Force Engineering University (AFEU) – Zhang Guangjun, Yao Hong, Zhao Jingbo.

Hohai University (HU) – Lin Ji, Lei Dong.

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (NUAA) – Zhang Jian, Wang Kaifu.

Shandong University (SU) – Feng Weiming, Wang Shaowei.

Southeast University (SEU) – Gu Chengjun, Jiang Yijun, Wang Wenjie.

Sun Yat-sen University (SYSU) – Liu Zuoqiu, Huang Jianliang, Liu Yulan.

Tongji University (TJU) – Wang Huaning, Zheng Honghao.

Tsinghua University (THU) – Qiu Xinming.

Northwestern Polytechnical University (NWPU) – Wang Yan, Zhang Juan.