УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.548

КУЛАЖЕНКО
Юрий Иванович

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2015

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Официальные оппоненты:

Артамонов Вячеслав Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, кафедра высшей алгебры;

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Белорусский государственный университет», кафедра алгебры и защиты информации;

Кириченко Владимир Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, кафедра геометрии.

Оппонирующая организация – Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург).

Защита состоится «15» мая 2015 года в 16.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20, телефон ученого секретаря: 57-37-91.
E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале №1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Автореферат разослан «15» апреля 2015 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Ходанович Д.А.

ВВЕДЕНИЕ

Систематическое изучение полиадических операций, то есть n-арных алгебраических операций, арность которых $n \geq 2$, началось после опубликования статьи Вильгельма Дёрнте[1], содержащей результаты его исследований, выполненных, как отмечает сам автор, по инициативе Эмми Нетер. В этой статье впервые было введено понятие n-группы как множества с одной ассоциативной и однозначно обратимой на каждом месте n-арной операцией и получены первые результаты, показывающие, что между бинарными группами и n-группами при $n \geq 3$ имеются существенные различия. В. Дёрнте продемонстрировал отличие n-групп при $n \geq 3$ от групп на примере абелевых и полуабелевых n-групп, которые он определил соответственно тождествами

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = [x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}],$$

$$[x x_1 \ldots x_{n-2} y] = [y x_1 \ldots x_{n-2} x],$$

где σ – подстановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. При $n = 2$ оба тождества определяют класс всех абелевых групп, а для любого $n \geq 3$ класс всех полуабелевых n-групп оказался шире класса всех абелевых n-групп. Заметим, что в настоящее время n-группы В. Дёрнте называют также n-арными группами или полиадическими группами.

Идея изучения полиадических операций, похожих на групповые, высказывалась и до В. Дёрнте. В частности, Е. Каснер в работе[2] рассматривал в группе подмножества, замкнутые относительно группового умножения n элементов, где $n \geq 3$. Указанное групповое умножение n элементов является ничем иным, как n-арной операцией, производной от операции в группе. Ясно, что любая подгруппа группы замкнута относительно производной полиадической операции любой арности. Как оказалось, подгруппами группы не исчерпываются подмножества группы, замкнутые относительно производных полиадических операций. Например, в симметрической группе множество всех нечётных подстановок замкнуто относительно производной тернарной операции. В общем случае, если факторгруппа группы по её нормальной подгруппе является циклической и имеет порядок, равный $n - 1$, то смежный класс, порождающий эту факторгруппу, является n-арной группой с n-арной операцией, производной от операции в группе.

---

[1] Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

[2] Kasner, E. An extension of the Group concept / E. Kasner // Bull. Amer. Math. Soc. – 1904. – №. 10. – S. 290–291.

Ещё одним предшественником В. Дёрнте можно считать Х. Прюфера, изучавшего бесконечные абелевы группы с помощью введённых им груд[3], которые, как показал В. Дёрнте, являются идемпотентными полуабелевыми тернарными группами. Результаты В. Дёрнте и Х. Прюфера ввиду их оригинальности и нетривиальности А.К. Сушкевич включил в свою монографию[4], посвятив им заключительную главу VII.

До появления в 1940 году фундаментальной работы Э. Поста[5], которую многие считают монографией, статья В. Дёрнте оставалась единственной оригинальной публикацией, в которой n-арные группы выступали объектом самостоятельного изучения. С указанной работы Э. Поста началось оформление теории n-арных групп в самостоятельный раздел алгебры с собственной проблематикой, включающей задачи, не имеющие аналогов в теории групп.

Среди большого числа замечательных результатов, полученных Э. Постом, отметим прежде всего его n-арный аналог теоремы Силова, который устанавливает существование и сопряжённость в конечной n-арной группе силовских подгрупп в случае, когда индекс этих подгрупп в n-арной группе взаимно прост с $n-1$. Существуют примеры, показывающие, что невыполнимость этого условия не гарантирует существование в конечной n-арной группе силовских n-арных подгрупп. Это ещё раз подчёркивает существенное отличие n-арных групп при $n \geq 3$ от групп. Значительное место в работе Э. Поста отведено изучению n-арных аналогов симметрической группы и полной линейной группы. Указанные n-арные аналоги обладают рядом свойств, отсутствующих у их бинарных прототипов. Например, n-арная группа n-арных подстановок при $n \geq 3$ имеет более одного идемпотента, так как их число равно $(k!)^{n-2}$, где k – мощность множеств, на которых определяются n-арные подстановки. Кроме того, в этой n-арной группе в отличие от её бинарного прототипа нет единиц. Отсутствуют единицы и в n-арной группе n-арных матриц.

Значительным вкладом в теорию n-арных групп являются работы[6, 7] В.А. Артамонова, посвящённые свободным n-арным группам и шрайеровым многообразиям n-арных групп.

---

[3]Prüfer, H. Theorie der abelshen Gruppen. I. Grundeigenschaften / H. Prüfer // Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 165–187.

[4]Сушкевич, А.К. Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – Харьков, Киев: Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1937. – 176 с.

[5]Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P.208–350.

[6]Артамонов, В.А. Свободные n-арные группы / В.А. Артамонов // Мат. заметки. – 1970. – Т.8, №4. – С. 499–507.

[7]Артамонов, В.А. О шрайеровых многообразиях n-групп и n-полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1979. – Вып. 5. – С. 193–202.

Первой монографией по n-арным группам является изданная в 1992 году книга[8] С.А. Русакова, в которой большое внимание уделено аксиоматике n-арных групп, а также построена законченная силовская теория конечных n-арных групп. Ещё одна монография[9] С.А. Русакова посвящена приложениям n-арных групп в аффинной геометрии и к описанию обобщённых переходных систем. Отметим также монографию[10] Я. Ушана, в которой n-арные группы являются основным объектом изучения.

Список книг, посвящённых n-арным группам и их приложениям, пополнили монографии[11, 12, 13, 14] А.М. Гальмака, которые значительно расширили тематику исследований по n-арным группам. В частности, в монографии[14] изучаются свойства l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которую автор определил для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A. Если

$$k = n - 1,\ l = n,\ \sigma = (12 \ldots n - 1),\ A = \mathbf{S}_m,$$

то операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией Э. Поста, определенной на $(n - 1)$-й декартовой степени симметрической группы $\mathbf{S}_m$.

В своё время А.Г. Курош в книге[15] обратил внимание будущих исследователей на некоторые алгебраические системы, изучение которых, по его мнению, будет способствовать как прогрессу в самой алгебре, так и нахождению новых её приложений. В круг таких алгебраических систем он включил и n-арные группы, которым посвятил отдельный раздел.

Отдельный раздел, посвящённый n-арным группам, имеется также в книге[16] Р. Брака. В книге[17] Н. Бурбаки приведена теорема Поста о смежных классах, играющая исключительно важную роль в теории n-арных групп, так как она позволяет выразить полиадическую операцию n-арной группы через бинарную операцию группы, тем самым давая возможность во многих случаях при изучении n-арных групп плодотворно использовать результаты хорошо развитой теории групп. Именно с помощью своей теоремы о смежных классах

---

[8]Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

[9]Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.

[10]Ušan, J. n-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // Mathematika Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

[11]Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука. –1999. – 182 с.

[12]Гальмак, А.М. n-Арные группы: в 2 ч. Ч. 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.

[13]Гальмак, А.М. n-Арные группы: в 2 ч. Ч. 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.

[14]Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2009. – 265 с.

[15]Курош, А.Г. Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

[16]Bruck, R.H. A survey of binary systems / R.H. Bruck. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966. – 185 p.

[17]Бурбаки, Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

Э. Пост и получил многие результаты о n-арных группах, в том числе и упомянутый выше n-арный аналог теоремы Силова. Отметим также найденный Э. Постом критерий абелевости n-арной группы, согласно которому n-арная группа является абелевой тогда и только тогда, когда бинарная группа, фигурирующая в теореме Поста о смежных классах, является абелевой. Э. Пост получил и аналогичный критерий полуабелевости n-арной группы.

Информация по n-арным группам и близким к ним алгебраическим системам имеется в монографии[18] Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы, а также в обзорах В.А. Артамонова[19, 20] и К. Глазека[21].

Статья[22] С.А. Чунихина «К теории неассоциативных n-групп», опубликованная в 1945 году, положила начало изучению иных типов ассоциативности полиадической операции, отличных от ассоциативности, которую использовал В. Дёрнте в своём определении n-группы. Соответственно возможны и другие полиадические обобщения понятия группы, отличные от определения В. Дёрнте. Одно из таких обобщений принадлежит Ф.Н. Сохацкому[23], который ввёл понятие полиагруппы сорта (s, n), где s делит $n - 1$. n-Арные группы – это в точности полиагруппы сорта $(1, n)$. Многие результаты для n-арных групп (например, результаты по аксиоматике) обобщаются на случай полиагрупп.

На пути изучения различных типов ассоциативности полиадической операции, отличных от ассоциативности В. Дёрнте, возникли и стали изучаться также позиционные оперативы Л.М. Глускина[24] и алгебры Менгера, удовлетворяющие тождеству сверхассоциативности. Результаты публикаций по алгебрам Менгера систематизированы в монографии[25] В. Дудека и В.С. Трохименко.

Если в определении n-арной группы В. Дёрнте отказаться от требования ассоциативности n-арной операции, то получится определение n-арной квазигруппы. Активное изучение n-арных квазигрупп началось в 60-х годах прошлого столетия. Несмотря на большое число статей по n-арным квазигруппам

---

[18] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 246 с.

[19] Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1976. – С. 191–248.

[20] Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1989. – С. 45–124.

[21] Glazek, K. Bibliographi of n-groups (poliadic groups) and same group like n-ary systems / K. Glazek // Proc. of the sympos. n-ary structures. – Skopje, 1982. – P. 259–289.

[22] Чунихин, С.А. К теории неассоциативных n-групп / С.А. Чунихин // Доклады АН СССР. – 1945. – Т. 48, №1. – С.7–10.

[23] Сохацкий, Ф.Н. Об ассоциативности многоместных операций / Ф.Н. Сохацкий // Дискретная математика. – 1992. – №4. – С. 66–84.

[24] Глускин, Л.М. Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат.сборник. – 1965. – Т.68(110), №3. – С. 444–472.

[25] Дудек, В. Алгебры Менгера многоместных функций / В. Дудек, В.С. Трохименко. – Кишенёв: Гос. университет Молдовы, 2006. – 237 с.

на сегодняшний день имеется пока только одна посвящённая им монография[26] В.Д. Белоусова. В этой монографии есть глава, посвящённая n-арным группам. В ней изучаются также (i, j)-ассоциативные n-арные квазигруппы – одно из обобщений понятия n-арной группы.

Одновременно с изучением n-арных квазигрупп началось и изучение n-арных полугрупп, определение которых может быть получено также из определения n-арной группы В. Дёрнте, если в нём отказаться от требования однозначной обратимости n-арной операции на каждом месте. Из исследователей, занимавшихся изучением n-арных полугрупп, выделяется своими глубокими результатами Л.М. Глускин[27].

В последнее время заметный прогресс в изучении n-арных групп связан с активным проникновением в теорию n-арных групп формационных методов, важнейшие из которых изложены в монографиях Л.А. Шеметкова[28], Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы[18], А.Н. Скибы[29], М.В. Селькина[30], М.В. Селькина и С.Ф. Каморникова[31].

В сравнении с другими n-арными алгебраическими системами n-арные группы являются лучше изученными, хотя и уступают в этом отношении группам. Это объясняется как тем, что n-арные группы устроены более сложно, чем группы, так и наличием в теории n-арных групп понятий, которые либо не имеют прототипов в теории групп, либо эти прототипы являются в ней тривиальными. В связи с этим актуальна задача разработки новых методов исследования n-арных групп.

Отставание теории n-арных групп от теории групп особенно заметно в области приложений. На это обратил внимание А.И. Кострикин на Всесоюзной алгебраической конференции, проходившей в 1973 году в Свердловске, где он поставил вопрос о необходимости нахождения приложений теории n-арных групп в различных областях знания. Именно по этой причине С.А. Русаков и занялся исследованиями по применению n-арных групп в аффинной геометрии и к описанию обобщённых переходных систем. Оказалось, что при этом используются преимущественно полуабелевы n-арные группы. Стало понятно,

[26] Белоусов, В.Д. n-Арные квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.

[27] Глускин, Л.М. Полиадические полугруппы / Л.М. Глускин // Теория полугрупп и её приложения. Полиадические полугруппы.Полугруппы преобразований. – Саратов, 1983. – С. 10–19.

[18] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 246 с.

[28] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.

[29] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[30] Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 145 с.

[31] Селькин, М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / М.В. Селькин, С.Ф. Каморников. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

что для дальнейшего прогресса в области приложений *n*-арных групп необходимо более глубокое изучение полуабелевых *n*-арных групп и связанных с ними объектов, в частности, центров и полуцентров. Отметим, что исследованиям С.А. Русакова, посвящённым применению полиадических групп в геометрии, предшествовала статья[32] Д. Вакарелова, в которой для этих целей применялись только тернарные группы. Отметим также, что частным случаем обобщённых переходных систем, которые определил и изучал С.А. Русаков, являются автоматы с переменной структурой, изучавшиеся ранее Дж. Гржимала-Буссэ[33, 34].

Таким образом, до последнего времени оставалась открытой актуальная проблема развития общей теории *n*-арных групп в таких направлениях как полуабелевы *n*-арные группы, полиадические операции на декартовых степенях групп, *n*-арные аналоги подстановок множеств произвольной мощности, а также ее применение в алгебраических структурах, определяемых системами полиадических операций. На реализацию этой актуальной задачи и направлено данное диссертационное исследование.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами и темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем.

«Исследование инъективных свойств конечных групп и близких к ним типов универсальных алгебр», Белорусский государственный университет транспорта, выполнялась в 2000-2002 г. (№НИР 2409).

«Инварианты частично разрешимых конечных групп», Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. Тема утверждена Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 28.11.2005 г. №1339, выполнялась в 2006–2010 гг. (Государственная программа фундаментальных исследований «Математические модели», номер госрегистрации – 20061847).

«Разработка и применение методов локального анализа в вопросах классификации конечных групп по характеру вложения подгрупп», Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. Тема утверждена Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 09.06.2010 № 886, выполняется в 2011–2015 гг. (Государственная программа научных исследований «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы»), номер госрегистрации – 20112850)

Цель и задачи исследования

Целью исследования является создание новых методов изучения свойств полиадических операций и алгебраических структур, определяемых системами таких операций. Для этого необходимо было решить следующие задачи:

– разработать общие методы построения и описания полиадических операций на множествах функций;

– исследовать строение центров и полуцентров полиадических группоидов и полугрупп функций;

– изучить свойства полиадических групп и алгебр функций;

– доказать тождественность в классе всех n-арных групп понятий полуабелевости и аффинности;

– разработать методы распознавания полуабелевых n-арных групп в классе всех n-арных групп с помощью объектов аффинной геометрии;

– развить теорию самосовмещения элементов n-арной группы.

Объектами исследования являются полиадические операции и алгебраически структуры, определяемые этими операциями.

Предметом исследования являются центры и обобщенные центры полиадических группоидов и полугрупп функций, а также различные n-арные аналоги абелевых полугрупп и групп.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации разработаны новые методы исследования полиадических операций и их применение к исследованию алгебраических структур, определяемых системами таких операций, на основе которых установлены новые закономерности и свойства, включающие в себя:

1) создание общих методов построения и описания полиадических операций на множествах функций (доказательство отсутствия единиц в l-арном группоиде, определяемом нетождественной подстановкой σ произвольного множества, теорема 2.3.1 [25, с. 7]; нахождение всех делителей нуля в этом группоиде, теорема 2.4.1 [2, с. 80]; доказательство его ассоциативности в случае тождественной подстановки σ^{l-1}, теорема 2.5.1 [2, с. 86]; описание свойств полученной l-арной полугруппы для некоторых классических полугрупп, теоремы 2.5.5–2.5.8 [2, с. 99]);

2) исследование свойств центров и обобщенных центров полиадических групп и полугрупп функций (доказательство неабелевости l-арного группоида, определенного нетождественной подстановкой σ произвольного множества, если он содержит единицу и отличный от неё элемент, теорема 3.1.1 [2, с. 55]; нахождение достаточных условий пустоты центра этого l-арного группоида, теорема 3.1.2 [2, с. 60]; исследование различных l-арных аналогов абелевых полугрупп, теорема 3.5.2 [2, с. 101]);

3) изучение свойств полиадических групп и алгебр функций (описание свойств l-арной группы, определяемой подстановкой σ произвольного множества для некоторых классических групп, теоремы 4.4.1 – 4.4.3 [2, с. 125–127]; исследование свойств обертывающей и соответствующей групп для l-арной группы, построенной на декартовой степени смежного класса, порождающего циклическую факторгруппу порядка, делящего $l-1$, теорема 4.6.1 [2, с. 174]; описание свойств $(2, l)$-алгебры, определяемой подстановкой σ произвольного множества, теорема 4.7.2 [2, с. 163]);

4) установление тождественности понятий полуабелевости и аффинности в классе всех n-арных групп, теорема 5.1.7 [1, с. 27];

5) разработку методов распознавания полуабелевых n-арных групп в классе всех n-арных групп с помощью объектов аффинной геометрии, теорема 5.2.20 [1, с. 55]; распознавание полуабелевых n-арных групп в классе всех n-арных групп с помощью свойств объектов аффинной геометрии, построенных на этих n-арных группах, теоремы 5.3.7, 5.4.7 [1, с. 132, с. 145]);

6) развитие теории самосовмещения элементов n-арной группы (критерии самосовмещения элементов n-арных групп, теоремы 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7 [1, с. 184, с. 186, с. 196]; распознавание полуабелевых n-арных групп в классе всех n-арных групп через самосовмещение элементов этих групп, теоремы 6.2.3, 6.2.6, 6.2.7, 6.3.5, 6.3.6 [1, с. 200, с. 240, с. 245, с. 278, с. 283]).

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично. В совместной монографии [2] результаты разделов 2.3, 2.4 и 2.6 получены соискателем самостоятельно, остальные результаты получены в соавторстве. В статьях [22, 25, 26, 27] участие соискателя составляет 50%.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты исследований докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова (Москва); на алгебраическом семинаре в Киевском национальном университете им. Тараса Шевченко (Киев); на Международной конференции по алгебре и комбинаторике, посвященной 60-летию А.А. Махнева (Екатеринбург); на алгебраическом семинаре Института математики Молдавской Академии Наук (Кишинев); на семинаре «Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных» в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники (Минск); на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Л.А. Шеметкова (Гомель).

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– научных семинарах кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»;

– семинарах кафедры высшей математики Белорусского государственного университета транспорта;

– Международном конгрессе Конференции математики в Беларуси (Гродно, 29 сентября–2 октября 1992 г.);

– Конференции «Проблемы повышения функциональности и экономики, устойчивости работы транспортного комплекса и его кадрового обеспечения в условиях рынка» (Гомель, 2–5 октября 1993 г.);

– Международной математической конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского (Минск, 4–8 декабря 1993 г.);

– Международной 51-й научно-технической конференции БГПА, посвященной 75-летию БГПА (Минск, октябрь 1995 г.);

– Международной математической конференции «Проблемы алгебры и кибернетики», посвященной памяти академика С.А. Чунихина (Гомель, сентябрь 1995 г.)

– VII Белорусской математической конференции (Минск, 18–22 ноября 1996 г.);

– Международной алгебраической конференции, посвященной памяти профессора Л. М. Глускина (Славянск, 25–29 августа1997 г.);

– Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Вольфганга Гашюца (Гомель, 16–21 октября 2000 г.);

– Юбилейной научно-практической конференции УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (Гомель, 3–6 июля 2009 г.);

– Международной научно-практической интернет-конференции, посвященной 60-летию доктора физ.-мат. наук Н.Т. Воробьева (Витебск, 21–22 июня 2011 г.);

– Международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В.В. Кириченко (Николаев, 13–19 июня 2012 г.);

– Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию С.Н. Черникова (Киев, 2012 г.);

– Международной научной конференции (Минск, 4–9 ноября 2012 г.);

– X Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Волгоград, 10–16 сентября 2012 г.);

– 8-й Международной алгебраической конференции на Украине, посвященной 60-летию профессора В. Усенко (Луганск, 5–12 июля, 2011 г.);

– Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию МГУ им. А. А. Кулешова (Могилев, 20–22 февраля 2013 г.).

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в 2 монографиях, 25 статьях в журналах и 17 тезисах докладов. Общий объём опубликованных материалов – 46,7 авторских листа, в том числе в монографиях – 31,4; в статьях в научных журналах – 11,7; в тезисах и материалах докладов конференций – 3,6.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, заключения и библиографического списка в порядке цитирования в количестве 125 наименований использованных источников и 44 наименований публикаций соискателя. Объем диссертации – 231 страница.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность доктору физико-математических наук, профессору М.В. Селькину и доктору физико-математических наук А.М. Гальмаку за консультации и внимание, оказанное ими при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации используются определения и обозначения из работ[5,8,9].

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, заключения и библиографического списка.

В главе 1 «Исходные понятия и результаты» приводится аналитический обзор литературы по теме диссертации, формулируются основные задачи диссертационной работы, описываются объекты исследования и формулируются известные результаты, используемые в диссертации.

Глава 2 «Операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$» посвящена решению задачи обобщения конструкции Э. Поста, которую он использовал при построении m-арных операций на конечных упорядоченных наборах подстановок и конечных упорядоченных наборах матриц.

В разделе 2.1 приводятся примеры тернарных операций на бесконечных упорядоченных наборах элементов некоторых множеств и формулируется теорема 2.1.1, обобщающая построенные примеры.

В разделе 2.2 для произвольного множества J, любой подстановки σ из $\mathbf{S}_J$ и любого целого $l \geq 2$ на декартовой степени A^J произвольного группоида A определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$.

Определение 2.2.1 [2, с. 47]. Пусть A – группоид, $l \geq 2$, J – произвольное множество, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$. Определим на множестве A^J вначале бинарную операцию $\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)),\ j \in J,$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)).$$

Основной в этом разделе является следующая теорема.

Теорема 2.2.1 [2, с. 48]. *Пусть* A – *группоид,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$, $\sigma \in \mathbf{S}_J$. *Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma(j))(\ \ldots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)),\ \ j \in J.$$

Теорема 2.2.1 позволила сформулировать большое число следствий, в том числе для l-арной операции $[\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,J}$, где σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$ порядка k. Важное значение этой операции объясняется тем, что, как установлено в разделе 2.5, она является ассоциативной.

Отсутствие единиц в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ в случае нетождественности подстановки σ гарантирует следующая теорема из раздела 2.3.

---

[5]Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

[8]Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навукаітэхніка, 1992. – 245 с.

[9]Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.

Теорема 2.3.1 [21, с. 8]. *Если* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* l*-арном группоиде* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *нет единиц.*

Основным результатом раздела 2.4 является следующая теорема, согласно которой в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ все элементы являются делителями нуля, если каждое из множеств J и A содержит более одного элемента.

Теорема 2.4.1 [2, с. 131]. *Если* 0 *– нуль группоида* A, *то функция* $\mathbf{0} \in A^J$ *такая, что* $\mathbf{0}(j) = 0$ *для любого* $j \in J$, *является нулем* l*-арного группоида* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *каждое из множеств* J *и* A *содержит более одного элемента, то в* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

В разделе 2.5 доказывается ассоциативность l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ в случае тождественности подстановки σ^{l-1}.

Теорема 2.5.1 [2, с. 86]. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* l*-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ *является ассоциативной и для всех* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$ *верны равенства*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{l\,\sigma}\ \mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{l\,\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l.$$

Следующая теорема полностью описывает множество $\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J})$ всех единиц l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ для полугруппы A с левым (правым, двусторонним) сокращением.

Теорема 2.5.4 [21, с. 10]. *Пусть* ε *– тождественная подстановка, полугруппа* A *с левым (правым, двусторонним) сокращением содержит единицу. Элемент* $\mathbf{u} \in A^J$ *является единицей в* l*-арной полугруппе* $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *справедливы условия*

$$\mathbf{u}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1,$$

где $\mathbf{Z}(A)$ *– центр полугруппы* A, *то есть*

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1, \text{ для любого } j \in J\}.$$

В заключении раздела 2.5 приводятся результаты об операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ для некоторых полугрупп, играющих значительную роль в алгебраических исследованиях: полугруппы $\mathcal{F}_X$ всех преобразований множества X, полугруппы $\mathcal{B}_X$ всех бинарных отношений на множестве X, полугруппы $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над полем P.

Теорема 2.5.5 [2, с. 99]. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \mathcal{F}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *–* l*-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, множество* X *содержит более одного элемента, то эта* l*-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

Теорема 2.5.6 [2, с. 99]. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \mathcal{B}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *–* l*-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, множество* X *содержит более одного элемента, то эта* l*-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

Теорема 2.5.7 [2, с. 99]. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l*-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, то эта* l*-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

В главе 3 «Центры и полуцентры в $< A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J} >$» решается задача описания центров и полуцентров l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ в случае, когда группоид A содержит единицу.

В разделе 3.1 доказывается следующая теорема о неабелевости l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ для нетождественной подстановки σ, обобщающая известные результаты[14] об операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ для конечного множества J и полугруппы A.

Теорема 3.1.1 [2, с. 55]. *Пусть* σ – *нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *группоид* A *содержит единицу* 1 *и элемент* a, *отличный от неё. Тогда* l*-арный группоид* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *неабелев.*

В этом же разделе определяются шесть аналогов центра группоида:

левый центр

$$\mathbf{Z}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zxy_1 \ldots y_{l-2}] = [xzy_1 \ldots y_{l-2}],\ x, y_i \in A\};$$

малый левый центр

$$\mathbf{KZ}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zx\underbrace{y \ldots y}_{l-2}] = [xz\underbrace{y \ldots y}_{l-2}],\ x, y \in A\};$$

большой левый центр

$$\mathbf{GZ}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{x \ldots x}_{l-1}] = [xz\underbrace{x \ldots x}_{l-2}],\ x \in A\};$$

правый центр

$$\mathbf{Z}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [y_1 \ldots y_{l-2}xz] = [y_1 \ldots y_{l-2}zx],\ x, y_i \in A\};$$

малый правый центр

$$\mathbf{KZ}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{y \ldots y}_{l-2}xz] = [\underbrace{y \ldots y}_{l-2}zx],\ x, y \in A\};$$

большой правый центр

$$\mathbf{GZ}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{x \ldots x}_{l-1}z] = [\underbrace{x \ldots x}_{l-2}zx],\ x \in A\}.$$

При $l = 2$ все шесть аналогов совпадают с центром $\mathbf{Z}(A)$ группоида A.

Справедлива теорема.

Теорема 3.1.2 [2, с. 60]. *Пусть* σ – *нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*

[14] Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2009. – 265 с.

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing,$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing,$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) =$$
$$= \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing.$$

Результаты раздела 3.1 конкретизируются в разделе 3.2 для подстановки σ, являющейся циклом длины $l - 1$.Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 3.2.1 [2, с. 66]. *Пусть σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing,$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing,$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

В разделе 3.3 левые и правые центры одного и того же вида объединяются общим понятием следующим образом. Для l-арного группоида $< A, [\ ] >$ и любого $i = 1, \ldots, l - 1$ определим *i-й центр*

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [y_1 \ldots y_{i-1} z x y_i \ldots y_{l-2}] = [y_1 \ldots y_{i-1} x z y_i \ldots y_{l-2}],\ x, y_i \in A\},$$

малый i-й центр

$$\mathbf{KZ}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{y \ldots y}_{i-1} z x \underbrace{y \ldots y}_{l-i-1}] = [\underbrace{y \ldots y}_{i-1} x z \underbrace{y \ldots y}_{l-i-1}],\ x, y \in A\},$$

большой i-й центр

$$\mathbf{GZ}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{x \ldots x}_{i-1} z \underbrace{x \ldots x}_{l-i}] = [\underbrace{x \ldots x}_{i} z \underbrace{x \ldots x}_{l-i-1}],\ x \in A\}.$$

Для любого $i = 1, \ldots, l - 1$ имеют место включения

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{KZ}_i(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{GZ}_i(A, [\ ]).$$

Ясно, что 1-е центры совпадают с левыми центрами, а $(l - 1)$-е центры – с правыми центрами.

В следующей теореме устанавливаются достаточные условия совпадения и пустоты i-ых центров l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теорема 3.3.1 [2, с. 74]. *Пусть* σ – *нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, A – *полугруппа с двусторонним сокращением, содержащая единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*

$$\mathbf{Z}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$$

для любого $i = 1, \ldots, l-1$.

В разделе 3.4 находится необходимое и достаточное условие абелевости l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, если σ – тождественная подстановка, A – полугруппа с единицей.

В разделе 3.5 доказывается следующий критерий полуабелевости l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теорема 3.5.1 [19, с. 77]. *Если полугруппа A содержит единицу, подстановка* $\sigma \in \mathrm{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* l*-арная полугруппа* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A коммутативна.*

Всякая полуабелева l-арная полугруппа является и слабо полуабелевой. Как показывает следующая теорема, для цикла длины $l-1$ из слабой полуабелевости l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ следует ее полуабелевость. Более того, в этом случае понятия полуабелевости, слабой полуабелевости и коммутативности тождественны.

Теорема 3.5.2 [19, с. 77]. *Если полугруппа A содержит единицу,* σ – *цикл длины* $l-1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, *то следующие утверждения эквивалентны*:

1) l*-арная полугруппа* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *полуабелева*;

2) l*-арная полугруппа* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *слабо полуабелева*;

3) *полугруппа A коммутативна*.

Так как при $n \geq 2$ полугруппа $\mathbf{M}_n(P)$ некоммутативна, то теоремы 2.3.1, 2.5.1 и 3.5.1 позволяют сформулировать следующую теорему, уточняющую теорему 2.5.7.

Теорема 3.5.3 [2, с. 111]. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*

1) $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$– l*-арная полугруппа*;

2) *если* $n \geq 2$, *то эта* l*-арная полугруппа неполуабелева*;

3) *если* σ – *нетождественная подстановка, то в этой* l*-арной полугруппе нет единиц.*

В разделе 3.6 вначале для всякого l-арного группоида определяются полуцентр, малый полуцентр и большой полуцентр:

полуцентр

$$\mathbf{HZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zy_1 \ldots y_{l-2}x] = [xy_1 \ldots y_{l-2}z],\ x, y_i \in A\};$$

малый полуцентр

$$\mathbf{KHZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{y \ldots y}_{l-2}x] = [x\underbrace{y \ldots y}_{l-2}z], x, y \in A\};$$

большой полуцентр

$$\mathbf{GHZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{x \ldots x}_{l-1}] = [\underbrace{x \ldots x}_{l-1}z], x \in A\}.$$

Далее следующим предложением устанавливается связь малого и большого полуцентров l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ с его центром.

Предложение 3.6.1 [19, с. 78]. *Пусть полугруппа A содержит единицу. Тогда*

1) *если подстановка* $\sigma \in \mathrm{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\mathbf{KHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J);$$

2) *если* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, *то*

$$\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J).$$

В следующей теореме устанавливаются достаточные условия пустоты полуцентра l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теорема 3.6.1 [19, с. 79]. *Пусть некоммутативная полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу,* $l \geq 3$, *подстановка* $\sigma \in \mathrm{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$.

Результаты раздела 3.6 применяются в разделе 3.7 для подстановки σ, являющейся циклом длины $l - 1$.

Теорема 3.7.1 [19, с. 79]. *Пусть некоммутативная полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу,* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда* $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$.

В главе 4 «l-Арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ и $(2, l)$-алгебра $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$» решается задача изучения свойств l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ в случае, когда она определяется на декартовой степени A^J группы A или алгебры A.

Основным результатом раздела 4.1 является теорема.

Теорема 4.1.1 [2, с. 112]. *Если A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *–* l*-арная группа.*

В разделе 4.2 доказываются результаты, позволяющие для любого элемента l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ находить его косой элемент. Из многочисленных результатов этого раздела выделим предложение.

Предложение 4.2.2 [2, с. 114]. *Пусть A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *порядка k,* $s \geq 1$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(sk + 1)$*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{sk+1,\sigma,J} >$ *функция* $\mathbf{u} \in A^J$, *определяемая любым из следующих четырех равенств*

$$\mathbf{u}(j) = ((\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{a}(j))^{s-1}\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1};$$

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}((\mathbf{a}(j))^{-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1})^{s-1};$$

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))(\mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{s-1})^{-1};$$
$$\mathbf{u}(j) = ((\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}(\mathbf{a}(j))^{-1})^{s-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}$$

для любого $j \in J$, является косым элементом, то есть $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{u}$. *В частности* ($s = 1$), *косой элемент* $\bar{\mathbf{a}}$ *для любого элемента* $\mathbf{a}$ ($k + 1$)*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{k+1,\ \sigma,\ J} >$ *определяется любым из следующих равенств:*

$$\bar{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1};$$
$$\bar{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J.$$

Результаты глав 2 и 3 используются в разделе 4.3 для описания центра и полуцентра l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$ для подстановки σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$.

Если группа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, то согласно теореме 3.3.1 l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$ неабелев. В действительности имеет место более сильное утверждение.

Теорема 4.3.1 [2, с. 120]. *Пусть A – группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*

1) *если группа A неединичная, подстановка σ нетождественная, то центр l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$ пуст;*

2) *если подстановка σ тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J}) = \{\mathbf{z} \in A^J \mid \mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ j \in J\},$$

где $\mathbf{Z}(A)$ – центр группы A.

Полуцентр и большой полуцентр l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$ описываются следующими теоремами.

Теорема 4.3.4 [2, с. 122]. *Пусть A – группа, $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*

1) *если группа A абелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J}) = A^J$;*

2) *если группа A неабелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J}) = \varnothing$.*

Теорема 4.3.5 [2, с. 122]. *Пусть A – группа, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$. Тогда*

1) *если группа A абелева, то $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J}) = A^J$;*

2) *если группа A неабелева, то $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J}) = \varnothing$.*

В разделе 4.4 доказываются аналоги теорем 2.5.5 и 2.5.7 для множества $\mathbf{S}_X^J$ всех функций из множества J в группу $\mathbf{S}_X$ всех подстановок множества X и для множества $\mathbf{GL}_n^J(P)$ всех функций из множества J в группу $\mathbf{GL}_n(P)$ всех матриц из $\mathbf{M}_n(P)$ с определителем, отличным от нуля поля P.

Теорема 4.4.1 [2, с. 125]. *Пусть $l \geq 3$, подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, множество X содержит более двух элементов. Тогда*

1) $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$ *– l-арная подгруппа l-арной полугруппы* $< \mathcal{F}_X^J, [\ ]_{l,\ \sigma,\ J} >$;

2) *полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$ *l-арной группы* $<\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *пуст, а сама она неполуабелева, в частности, неабелева*;

3) *если* σ *нетождественная, то l-арная группа* $<\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

4) *если подстановка* σ *тождественная, то единственной единицей l-арной группы* $<\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$, *как и единственным элементом ее центра, является функция* $\mathbf{e} \in \mathbf{S}_X^J$ *такая, что* $\mathbf{e}(j) = 1$ *для любого* $j \in J$, *где* 1 – *единица группы* $\mathbf{S}_X$, *то есть*, $\mathbf{Z}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{E}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\}$.

Теорема 4.4.2 [2, с. 126]. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*

1) $<\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$– *l-арная подгруппа в* $<\mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$;

2) $<\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$ *и является неполуабелевой, в частности, неабелевой*;

3) *если подстановка* σ *нетождественная, то* $<\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

4) *если подстановка* σ *тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_j E_n,\ u_j \in P^*,\ j \in J\},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_j E_n,\ u_j^{l-1} = 1,\ j \in J\},$$

где E_n – *единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$;

1 – *единица поля P*.

Для специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$, проективной общей линейной группы $\mathbf{PGL}_n(P)$ и проективной специальной линейной группы $\mathbf{PSL}_n(P)$ доказаны теоремы, аналогичные теоремам 4.4.1 и 4.4.2.

В разделе 4.5 доказываются результаты об идемпотентах l-арной группы $<A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$. Основной здесь является следующая теорема.

Теорема 4.5.1 [2, с. 141]. *Пусть A – группа,* 1 – *ее единица, J – дизъюнктное объединение конечных множеств* $J_\lambda = \{j_{\lambda 1}, \ldots, j_{\lambda l_\lambda}\}$, $l_\lambda \geq 1$, $\lambda \in \Lambda$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *а ее сужение на каждое множество* J_λ *действует на нем как цикл длины* l_λ. *Тогда для того, чтобы элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *являлся идемпотентом в* $<A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $j_{\lambda i} \in J_\lambda$ *выполнялось равенство*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j_{\lambda i})\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j_{\lambda i}))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j_{\lambda i})) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j_{\lambda i})) = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $j_{\lambda i} \in J_\lambda$.

Если группоид A обладает нулем 0, то элемент $\mathbf{0} \in A^J$, все значения которого равны 0, является идемпотентом в $<A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$. Идемпотентами в $<A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}>$ могут быть и функции, принимающие как нулевые, так и ненулевые значения. Имеет место предложение.

Предложение 4.5.2 [2, с. 145]. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, K – *конечное подмножество мощности k множества J, $l \geq k$, σ – подстановка множества J, сужение которой на подмножество K действует на нем так же, как некоторый цикл длины k, функция $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^J$ является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, принимающим в некоторой точке $j \in K$ значение, равное нулю* ($\boldsymbol{\varepsilon}(j) = 0$). *Тогда* $\boldsymbol{\varepsilon}(s) = 0$ *для любого $s \in K$, то есть идемпотент $\boldsymbol{\varepsilon}$ по крайней мере k раз принимает значение* 0.

Заметим, что теорема 4.5.1 позволяет сформулировать следствия известных результатов[14,35].

Одним из важнейших достижений Э. Поста в теории полиадических групп является результат, который впоследствии стали называть теоремой Поста о смежных классах, позволяющий во многих случаях при изучении l-арных групп использовать результаты теории групп. В разделе 4.6 для l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ устанавливаются свойства её обертывающей и соответствующей групп, существование которых гарантирует теорема Поста о смежных классах. Основной в этом разделе является следующая теорема.

Теорема 4.6.1 [2, с. 174]. *Пусть* $l \geq 3$, *подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, A – группа, A / B – факторгруппа по ее нормальной подгруппе B, множество U определяется так же, как в лемме* 4.6.1. *Тогда $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ и $< U, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арные подгруппы l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Если факторгруппа A / B является циклической, порождается смежным классом C и имеет порядок, делящий* $l - 1$, *то*

1) $< C^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная подгруппа l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$;*

2) *подгруппы U и B^J являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для l-арной группы $< C^J, [\ ] >$* с *l-арной операцией* $[\ ]$, *производной от операции в группе A^J;*

3) *существует гомоморфизм ψ универсальной обертывающей группы* $(C^J)^*$ *в группу U, сужение которого на соответствующую группу* $(C^J)_0$ *является изморфизмом на B^J; если же порядок факторгруппы A / B равен* $l - 1$, *то указанный гомоморфизм ψ является изоморфизмом* $(C^J)^*$ *на U;*

4) *l-арные операции* $[\ ]_{l,\sigma,J}$ *и* $[\ ]$ *связаны условием*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l] = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l]$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$, где f_σ – отображение A^J в A^J, ставящее в соответствие функции $\mathbf{x} \in A^J$ функцию $\mathbf{x}^{f_\sigma} \in A^J$, значение которой в каждой точке

---

[14] Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2009. – 265 с.

[35] Воробьёв, Г.Н. Идемпотенты в (k+1)-арной $< \mathbb{Z}_k^K, [\ ]_{k+1,K} >$ / Г.Н. Воробьев // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 2 (38). – С. 11–38.

$j \in J$ совпадает со значением функции $\mathbf{x}$ *в точке* $\sigma(j)$: $\mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$.

Описание l-арной группы $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, данное в теореме 4.4.2, можно детализировать для конечного поля $P = F_q$ из q элементов, если воспользоваться теоремой 4.6.1, положив в ней $A = \mathbf{GL}_n(q)$ и $B = \mathbf{SL}_n(q)$, а также учесть тот факт, что факторгруппа $\mathbf{GL}_n(q) / \mathbf{SL}_n(q)$ является циклической и имеет порядок $q - 1$.

Теорема 4.6.2 [2, с. 179]. *Пусть $l \geq 3$, $n \geq 2$, подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^q = \sigma$, C – смежный класс, порождающий циклическую факторгруппу* $\mathbf{GL}_n(q) / \mathbf{SL}_n(q)$,

$$U = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(q)} (u\mathbf{SL}_n(q))^J = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(q)} \mathbf{c}_u \mathbf{SL}_n^J(q).$$

Тогда

1) *множество U замкнуто относительно q-арной операции $[\ ]_{q\,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $< U, [\ ]_{q,\sigma,J} >$ является q-арной подгруппой q-арной группы* $< \mathbf{GL}_n^J(q), [\ ]_{q,\sigma,J} >$;

2) $< C^J, [\ ]_{q,\sigma,J} >$ – *q-арная подгруппа q-арной группы* $< \mathbf{GL}_n^J(q), [\ ]_{q,\sigma,J} >$;

3) *подгруппы U и $\mathbf{SL}_n^J(q)$ являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для q-арной группы $< C^J, [\ ] >$* с *q-арной операцией* $[\ ]$, *производной от операции в группе* $\mathbf{GL}_n^J(q)$;

4) *существует изоморфизм ψ группы $(C^J)^*$ на группу U, сужение которого на $(C^J)_0$ является изморфизмом на* $\mathbf{SL}_n^J(q)$;

5) *l-арные операциии $[\ ]$ и $[\ ]_{q,\sigma,J}$ связаны условием*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_q]_{q,\sigma,J} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{q-1}^{f_\sigma^{q-2}} \mathbf{x}_q] = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{q-1}^{f_{\sigma^{q-2}}} \mathbf{x}_q],$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q \in A^J$, где f_σ – отображение группы $\mathbf{GL}_n^J(q)$ в себя, ставящее в соответствие функции $\mathbf{x} \in \mathbf{GL}_n^J(q)$ функцию $\mathbf{x}^{f_\sigma} \in \mathbf{GL}_n^J(q)$, значение которой в каждой точке $j \in J$ совпадает со значением функции $\mathbf{x}$ в точке $\sigma(j)$: $\mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$.

В разделе 4.6 представляют интерес следующие предложения.

Предложение 4.6.3 [2, с. 181]. *Если группа A и множество J содержат более чем по одному элементу, $l \geq 3$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ не является полуциклической.*

Предложение 4.6.4 [2, с. 182]. *Если A – нильпотентная группа, $l \geq 3$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является полунильпотентной.*

Напомним, что полиадическую группу называют *полуциклической*[12] (*полунильпотентной*[36]), если ее соответствующая группа Поста циклическая (нильпотентная).

Из теоремы 3.6.1 и предложения 4.6.3 вытекает следствие.

Следствие 4.6.2 [2, с. 183]. *Если группа A и множество J содержат более чем по одному элементу,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная группа* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *является полуабелевой, но не является полуциклической.*

В разделе 4.7 доказывается, что если $< A, +, \times >$ – кольцо (алгебра), то универсальная алгебра $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ является $(2, l)$-кольцом ($(2, l)$-алгеброй) и подробно описываются свойства этого $(2, l)$-кольца (этой $(2, l)$-алгебры).

В следующей теореме символом $A^{\bullet}$, как обычно, обозначается группа всех обратимых элементов кольца A с единицей. Считаем также, что и в кольце A, и во множестве J содержится более, чем по одному элементу.

Теорема 4.7.2 [2, с. 163]. *Пусть* $< A, +, \times >$ *– алгебра,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*

1) $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – $(2, l)$-*алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *нет единиц, если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если алгебра* $< A, +, \times >$ *содержит единицу,* σ *– нетождественная подстановка, то* $(2, l)$-*алгебра* $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *неабелева*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то из ассоциативности алгебры* $< A, +, \times >$ *следует ассоциативность* $(2, l)$-*алгебры* $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *коммутативная алгебра* $< A, +, \times >$ *содержит единицу, то* $(2, l)$-*алгебра* $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *полуабелева;*

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-*арная группа, в которой функция*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J$$

является косым элементом для функции $\mathbf{a} \in A^{\bullet J}$;

7) *если алгебра* $< A, +, \times >$ *имеет единицу* 1, *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^{\bullet J}$ *является идемпотентом в* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

---

[12]Гальмак, А.М. *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.

[36]Щучкин, Н.А. Разрешимые и нильпотентные *n*-арные группы / Н.А. Щучкин // Алгебраические системы. – Вологоград, 1989. – С. 133–139.

Полагая в теореме 4.7.2 $A = \mathbf{M}_n(P)$ – алгебра всех квадратных матриц порядка n над полем P, получим следующий результат.

Теорема 4.7.3 [2, с. 165]. *Пусть* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*

1) $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – $(2, l)$*-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *нет единиц, если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если* σ *– нетождественная подстановка, то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *– неабелева*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *ассоциативна*;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $n \geq 2$, *то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *неполуабелева*;

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *–* l*-арная группа, в которой функция*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J$$

является косым элементом для функции $\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$;

7) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$ *является идемпотентом в* l*-арной группе* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = \mathrm{E},$$

где E *– единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$.

В главе 5 «Полуабелевы n-арные группы и их распознавание» решены следующие задачи: установлена тождественность понятий полуабелевости, коммутативности и аффинности универсальных алгебр в классе всех n-арных групп; построены элементы аффинной геометрии на n-арной группе и установлены критерии полуабелевости n-арных групп с помощью свойств объектов аффинной геометрии, построенных на n-арной группе.

В разделе 5.1 основным результатом является теорема.

Теорема 5.1.7 [1, с.27]. *n-Арная группа* $<A, [\ ]>$ *является полуабелевой тогда и только тогда, когда она аффинная.*

Ввиду тождественности понятий полуабелевости и коммутативности в классе всех n-арных групп, установленной в работах[37,38], из теоремы 5.1.7 вытекает, что классы всех коммутативных n-арных групп, всех аффинных

[37]Колесников, О.В. Разложение *n*-арных групп / О.В. Колесников // Математические исследования. Вып. 51. Квазигруппы и лупы. – Кишинёв: Штиинца, 1979. – С. 88–92.

[38]Glazek, K. GleichgeweichtB. Abelin *n*-groups / K. Glazek // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai. Eszterom. – 1977. – P. 321–329.

n-арных групп и всех полуабелевых n-арных групп совпадают.

Следующие теоремы являются n-арными аналогами соответствующих утверждений из аффинной геометрии.

Теорема 5.2.17 [1, с. 48]. *Пусть* A *– полуабелева* n*-арная группа,* t *– произвольная точка из* A*. Если* $a,b,c,d \in A$, $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}$, $m \in A$ *– середина отрезка* $[cS_t(a)]$*, то справедливы равенства*

$$S_m(S_t(a))=c,\; S_m(S_t(b))=d.$$

Теорема 5.2.18 [1, с. 50]. *Пусть* A *– полуабелева* n*-арная группа. Для произвольных точек* $a,b,c \in A$ *справедливо равенство* $\overrightarrow{aS_c(S_b(a))}=2\overrightarrow{bc}$.

Теорема 5.2.19 [1, с. 52]. *Если* A *– полуабелева* n*-арная группа, то для любых точек* $a,b,c,d \in A$ *четырехугольник*

$$< a,\ b,\ S_d(a),\ [S_d(a)[S_c(a)]^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_c(a)}_{2n-4}S_c(b)] >$$

– параллелограмм A.

Теорема 5.2.20 [1, с. 55]. *Для произвольных точек* a,b,c,d,u *полуабелевой* n*-арной группы* A *справедливо равенство*

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{u[[ua^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b]u^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,[dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u]]}.$$

В разделе 5.3 приведены результаты, которые являются критериями полуабелевости n-арной группы, выраженными через свойства многоугольников, определенных на этой группе.

Типичным результатом является следующая теорема.

Теорема 5.3.7 [1, с. 132]. *Пусть* a,b,c,d *– произвольные точки из* A *и* $< a,\ b,\ c,\ S_d(a),\ S_d(b),\ S_d(c) >$ *– шестиугольник* A*.* n*-Арная группа* A *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда хотя бы один из четырехугольников* $< a,\ b,\ S_d(a),\ S_d(b) >$, $< b,\ c,\ S_d(b),\ S_d(c) >$, $< a,\ c,\ S_d(a),\ S_d(c) >$ *– параллелограмм* A.

В разделе 5.4 критерии полуабелевости n-арной группы выражены через свойства векторов, определенных на этой группе.

n*-Арная группа* A *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек* $a,\ b,\ c,\ d \in A$ *справедливо одно из следующих равенств:*

1) (теорема 5.4.2 [1, с.151])

$$2\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}+\overrightarrow{S_a(c)S_b(d)};$$

2) (теорема 5.4.3[1, с.154])

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{S_b(a)S_d(c)}=\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{S_c(a)S_d(b)};$$

3) (теорема 5.4.5 [1, с.160])

$$\overrightarrow{S_d(S_c(a))S_d(S_c(b))}=\overrightarrow{ab}.$$

Теорема 5.4.7 [1, с. 145]. *Пусть* t *– произвольное нечетное натуральное число и* $t \geq 3$*.* n*-Арная группа* A *полуабелева тогда и только тогда, когда для любых точек* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_t,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_t \in A$ *выполняется равенство*

$$\overrightarrow{[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5\ldots a_{t-1}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{t-1}}\,a_t]}$$
$$\overrightarrow{[b_1b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\,b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\,b_5\ldots b_{t-1}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{t-1}}\,b_t]} = \overrightarrow{a_1b_1} - \overrightarrow{a_2b_2} + \overrightarrow{a_3b_3} - \ldots - \overrightarrow{a_{t-1}b_{t-1}} + \overrightarrow{a_tb_t}.$$

Глава 6 «Самосовмещение элементов n-арных групп» посвящена новому направлению исследований в области теории n-арных групп, а именно, приложению полиадических операций в аффинной геометрии и теории самосовмещений. Отметим, что самосовмещения правильных многоугольников и многогранников изучали многие математики. Однако, применение полиадических операций для построения элементов аффинной геометрии позволило по-новому взглянуть на эту тематику. В главе 6 приведены результаты, в которых строятся последовательности точек (элементов) n-арной группы, такие, что последовательность симметрий любой произвольной точки относительно элементов построенной последовательности приводит к самосовмещению.

В разделе 6.1 вводится определение i-го обхода элементов последовательности $<a_1,\ldots,a_k>$ и устанавливаются критерии самосовмещения произвольных точек n-арных групп относительно элементов последовательностей вершин треугольника и четырехугольника, а также самосовмещения произвольной точки при $2n$-м обходе нечетного числа произвольных точек.

Определение 6.1.1 [1, с. 183]. Точку x_i назовем i-м обходом элементов последовательности $<a_1,\ \ldots,\ a_k>$ точкой p, если

$$x_1 = S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)$$

и

$$x_i = S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(x_{i-1})))\ldots)$$

для всех $i = 2, 3, \ldots, n$, где $p \in A,\ a_1^k \in A^k$.

Определение 6.1.2 [1, с. 183]. Будем говорить, что точка p самосовмещается относительно элементов последовательности $<a_1,\ldots,a_k>$, если

$$S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots) = p,$$

где $p \in A,\ a_1^k \in A^k$.

Теорема 6.1.3 [1, с. 184]. *Пусть a, b, c – произвольные точки полуабелевой n-арной $2s$-группы A. Точка $d \in A$ самосовмещается относительно последовательности вершин треугольника $<a,\ b,\ c>$ тогда и только тогда, когда стороны треугольника $<a,\ b,\ c>$ являются средними линиями треугольника $<d,\ S_a(d),\ S_b(S_a(d))>$.*

Теорема 6.1.4 [1, с. 186]. *Пусть $<a,\ b,\ c,\ d>$ – четырехугольник полуабелевой n-арной $2s$-группы A. Произвольная точка $p \in A$ самосовмещается относительно последовательности вершин четырехугольника $<a,\ b,\ c,\ d>$ тогда и только тогда, когда $<a,\ b,\ c,\ d>$ – параллелограмм A.*

Теорема 6.1.7 [1, с. 196]. *Пусть* A *– полуабелева n-арная 2s-группа и пусть имеется нечетное число* k *произвольных точек* $a,\ b,\ c,\ d,\ \dots,\ u,\ v$ *из* A. *2n-й обход произвольной точкой* $p \in A$ *последовательности*

$$< a,\ b,\ c,\ d,\ \dots,\ u,\ v >$$

является самосовмещением точки p.

В разделе 6.2 приводятся критерии полуабелевости *n*-арной группы, выраженные через самосовмещение произвольных точек относительно элементов последовательностей вершин специально построенных четырехугольников и шестиугольников. Приводятся критерии полуабелевости *n*-арной группы, выраженные через самосовмещения произвольных точек относительно элементов последовательности середин сторон произвольных *k*-угольников (в первом случае k – нечетное натуральное число, а во втором – k четное).

Теорема 6.2.3 [1, с. 200]. *Пусть* $a,\ b,\ c$ *– произвольные точки n-арной 2s-группы* A, *а точка* $d \in A$, *такая, что четырехугольник* $< a,\ b,\ c,\ d >$ *– параллелограмм* A. *Тогда*

1) *если произвольная точка* $p \in A$ *самосовмещается относительно элементов последовательности вершин любого из четырехугольников* $< a, S_b(a), S_c(d), d >$, $< d, S_b(a), S_c(a), S_d(a) >$, $< b, S_b(a), S_c(b), S_d(a) >$, $< d, c, S_c(b), S_d(a) >$, $< b, S_b(a), S_c(d), c >$, $< a, b, S_c(b), S_d(a) >$, $< a, d, c, b >$, $< a, b, c, [ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c] >$, *т. е. если справедливо одно из следующих равенств:*

$$S_d(S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))) = p,\ S_{S_d(a)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))) = p,$$
$$S_{S_d(a)}(S_{S_c(b)}(S_{S_b(a)}(S_b(p)))) = p,\ S_{S_d(a)}(S_{S_c(b)}(S_c(S_d(p)))) = p,$$
$$S_c(S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_b(p)))) = p,\ S_{S_d(a)}(S_{S_c(b)}(S_b(S_a(p)))) = p,$$
$$S_b(S_c(S_d(S_a(p)))) = p,\ S_{[ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c]}(S_c(S_b(S_a(p)))) = p,$$

то A *– полуабелева n-арная группа;*

2) *если* A *– полуабелева* n *-арная группа, то справедливы вышеперечисленные равенства.*

Теорема 6.2.4 [1, с.220]. *Пусть* a, b, c, d *– произвольные точки n-арной группы* A. *Тогда*

1) *если A – полуабелева n-арная группа, то произвольная точка* $p \in A$ *самосовмещается относительно элементов последовательности вершин любого из шестиугольников* $< a, b, c, d, [dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b], a >$, $< a, c, b, S_b(S_c(a)), [ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a))], S_a(S_c(b)) >$, $< S_b(a),\ S_c(a),\ S_c(b),\ S_a(b),\ S_a(c),\ S_b(c) >$, $< S_a(c),\ S_{S_b(c)}(S_a(c)),\ S_{S_b(a)}(S_a(c)),\ S_{S_c(a)}(S_a(c)),\ S_{S_c(b)}(S_a(c)),\ S_{S_a(b)}(S_a(c)) >$, $< S_{S_b(a)}(d),\ S_{S_c(a)}(d),\ S_{S_c(b)}(d),\ S_{S_a(b)}(d),\ S_{S_a(c)}(d),\ S_{S_b(c)}(d) >$, *т. е. справедливы следующие равенства:*

$$S_a(S_{[dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b]}(S_d(S_c(S_b(S_a(p)))))) = p;$$

$$S_{S_a(S_c(b))}(S_{[ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a))]}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))))))=p;$$

$$S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(S_{S_a(b)}(S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p))))))=p;$$

$$S_{S_{S_a(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p))))))=p;$$

$$S_{S_{S_b(a)}(d)}(S_{S_{S_c(a)}(d)}(S_{S_{S_c(b)}(d)}(S_{S_{S_a(b)}(d)}(S_{S_{S_a(c)}(d)}(S_{S_{S_b(c)}(d)}(p))))))=p;$$

2) если выполняются любые из вышеперечисленных равенств, то A– полуабелева.

Теорема 6.2.6 [1, с. 240]. *Пусть $b_1,\ldots,b_k$ – произвольные точки n-арной группы A ($k\in N$, $k\geq 3$, k – нечетное) и $a_1,\ldots a_k\in A$ такие, что*

$$b_2=S_{a_1}(b_1),b_3=S_{a_2}(b_2),\ldots,b_k=S_{a_{k-1}}(b_{k-1}),b_1=S_{a_k}(b_k).$$

n-Арная группа A будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p\in A$ самосовмещается относительно элементов последовательности $<a_{1,\ldots,}a_k,b_1>$.

Теорема 6.2.7 [1, с. 245]. *Пусть $b_1,\ldots,b_k$– произвольные точки n-арной группы A ($k\in N$, $k\geq 4$, k – четное) и $a_1,\ldots,a_k\in A$, такие, что*

$$b_2=S_{a_1}(b_1),b_3=S_{a_2}(b_2),\ldots,b_k=S_{a_{k-1}}(b_{k-1}),b_1=S_{a_k}(b_k).$$

n-Арная группа A будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p\in A$ самосовмещается относительно элементов последовательности $<a_1,\ldots,a_k>$, т.е. когда справедливо равенство $S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)=p$.

В разделе 6.3 приводятся критерии полуабелевости n-арной группы, выраженные через свойства специально построенных последовательностей векторов, таких, что их сумма есть нулевой вектор.

Теорема 6.3.1 [1, с. 248] *Пусть a,b,c – произвольные точки из A, d – такая точка из A, что четырехугольник $<a,b,c,d>$– параллелограмм A. n-Арная группа A будет полуабелевой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)S_b(a)}+\overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)}+\overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d}=\vec{0}.$$

Теорема 6.3.4 [1, с. 270]. *Пусть a,b,c,d,p– произвольные точки из A. n-Арная группа A будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)b}+\overrightarrow{S_b(S_a(p))c}+\overrightarrow{S_c(S_b(S_a(p)))d}+$$

$$+\overrightarrow{S_d(S_c(S_b(S_a(p))))[dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b]}+\overrightarrow{S_{[dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b]}(S_d(S_c(S_b(S_a(p)))))}=\vec{0}.$$

Теорема 6.3.5 [1, с. 278]. *Пусть p, $b_1,\ldots,b_k$ – произвольные точки n-арной группы A ($k\in N$, $k\geq 4$, k – четное) и $a_1^k\in A$ такие, что*

$$b_2=S_{a_1}(b_1),b_3=S_{a_2}(b_2),\ldots,b_k=S_{a_{k-1}}(b_{k-1}),b_1=S_{a_k}(b_k).$$

n-Арная группа будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\overrightarrow{pS_{a_1}(p)}+\overrightarrow{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))}+\ldots+$$
$$+\overrightarrow{S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots))}=\vec{0}.$$

Теорема 6.3.6 [1, с. 283]. *Пусть* $p, b_1, \ldots, b_k$ *– произвольные точки* n*-арной группы* A $(k\in N,\ k\geq 3,\ k$ *– нечетное*$)$, *и* $a_1, \ldots, a_k \in A$ *такие, что*

$$b_2=S_{a_1}(b_1), b_3=S_{a_2}(b_2),\ldots, b_k=S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1=S_{a_k}(b_k).$$

n*-Арная группа будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\overrightarrow{pS_{a_1}(p)}+\overrightarrow{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))}+\ldots+$$
$$+\overrightarrow{S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)S_{b_1}(S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots))}=\vec{0}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации реализована исследовательская программа по развитию теории полиадических операций и их приложений. Основные результаты диссертации следующие.

В главе 2 решена задача обобщения конструкции Э. Поста, которую он использовал при построении своих m-арных операций, одна из которых была определена на конечной декартовой степени симметрической группы, а вторая – на конечной декартовой степени полной линейной группы.

В разделе 2.1 приведены примеры тернарных операций, определённых на множестве A^J, когда множество J бесконечно.

В разделе 2.2 для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J и любой биекции σ этого множества на себя на декартовой степени A^J произвольного группоида A определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и доказана основная теорема 2.2.1 [2, с. 48].

В разделе 2.3 доказано отсутствие единиц в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, если σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$ (теорема 2.3.1 [21, с. 8]).

В разделе 2.4 установлено, что если $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ все элементы являются делителями нуля (теорема 2.4.1 [2, с. 131]).

В разделе 2.5 доказана ассоциативность операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ в случае тождественности подстановки σ^{l-1} (теорема 2.5.1 [2, с. 86]) и получены результаты об операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ для некоторых полугрупп, играющих значительную роль в алгебраических исследованиях (теоремы 2.5.5–2.5.8 [2, с. 99]).

В главе 3 решена задача описания центров и полуцентров l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ в случае, когда группоид A содержит единицу.

В разделе 3.1 доказана неабелевость l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, если σ – нетождественная подстановка, группоид A содержит единицу и отличный от неё элемент (теорема 3.1.1 [2, с. 55]). Для произвольного l-арного группоида определены шесть полиадических аналогов центра группоида и найдены достаточные условия пустоты этих аналогов для l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ (теоремы 3.1.2 и 3.1.3 [2, с. 60 и с. 65]).

Результаты раздела 3.1 конкретизированы в разделе 3.2 для подстановки σ, являющейся циклом длины $l - 1$ (теорема 3.2.1 [2, с. 66]).

В разделе 3.3 доказано (теорема 3.3.1 [2, с. 74]), что если σ – нетождественная подстановка, A – полугруппа с двусторонним сокращением, содержащая единицу и отличный от неё элемент, то для любого $i = 1, \ldots, l - 1$ i-*й* центр, малый i-*й* центр и большой i-*й* центр l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ совпадают с пустым множеством.

В разделе 3.4 найдено необходимое и достаточное условие абелевости l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, если σ – тождественная подстановка, A – полугруппа с единицей (предложение 3.4.1 [2, с. 78]).

В разделе 3.5 доказан критерий полуабелевости l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ для подстановки σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$ (теорема 3.5.1 [19, с. 77]), и установлено, что если σ – цикл длины $l - 1$, то понятия полуабелевости, слабой полуабелевости и коммутативности тождественны на l-арной полугруппе $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ (теорема 3.5.1 [19, с. 77]).

В разделе 3.6 доказано (теорема 3.6.2 [19, с. 79]), что если коммутативная (некоммутативная) полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, $l \geq 3$, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полуцентр l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ совпадает с ней (является пустым).

Результаты раздела 3.6 конкретизированы в разделе 3.7 для подстановки σ, являющейся циклом длины $l - 1$ (теорема 3.7.2 [19, с. 79]).

В главе 4 решена задача изучения свойств l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ в случае, когда она определяется на декартовой степени A^J группы A или алгебры A.

В разделе 4.1 доказано (теорема 4.1.1 [2, с. 112]), что если A – группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная группа.

В разделе 4.2 получены результаты (предложения 4.2.1–4.2.5 [2, с. 113–117]) о косых элементах l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Центры и полуцентры l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ описаны (теоремы 4.3.1 и 4.3.2 [2, с. 120 и с. 122]) в разделе 4.3. Здесь же доказана теорема 4.3.6 [2, с. 123] о явном виде l-арной подгруппы единиц.

В разделе 4.4 изучены свойства l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, где в качестве группы A взята одна из следующих групп: симметрическая группа (теорема 4.4.1 [2, с. 125]), полная линейная группа (теорема 4.4.2 [2, с. 126]), специальная линейная группа (теорема 4.4.3 [2, с. 127]), финитарная симметрическая группа (теорема 4.4.6 [2, с. 130]).

В разделе 4.5 найдено необходимое и достаточное условие идемпотентности элемента l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ (теорема 4.5.1 [2, с. 141]) и приведены многочисленные следствия из этой теоремы/

В разделе 4.6 установлены свойства (теорема 4.6.1 [2, с. 174]) обертывающей и соответствующей групп для l-арной группы, построенной на декартовой степени смежного класса, порождающего циклическую факторгруппу порядка, делящего $l - 1$. Найденные свойства конкретизированы для факторгруппы полной линейной группы по специальной линейной группе (теорема 4.6.2 [2, с. 179]).

В разделе 4.7 доказано, что если $< A, +, \times >$ – кольцо (алгебра), то универсальная алгебра $< A^J, +, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ является $(2, l)$-кольцом ($(2, l)$-алгеброй). Подробному описанию свойств этого $(2, l)$-кольца и этой $(2, l)$-алгебры посвящены соответственно (теорема 4.7.1 [2, с. 161]) и (теорема 4.7.2 [2, с. 163]).

В главе 5 доказано, что класс всех коммутативных n-арных групп и класс всех аффинных n-арных групп совпадает с классом всех полуабелевых n-арных групп, а также получены результаты, которые позволяют распознавать полуабелевы n-арные группы с помощью свойств объектов аффинной геометрии, построенных на этих группах.

В разделе 5.1 доказана (теорема 5.1.7 [1, с. 27]) тождественность понятий коммутативности и аффинности универсальных алгебр в классе всех n-арных групп.

В разделе 5.2 изучены свойства n-арных аналогов фигур аффинной геометрии, необходимые в дальнейшем для распознавания свойства полуабелевости у n-арных групп, а также для установления критериев самосовмещения элементов n-арных групп. Кроме того, получен ряд результатов, в которых совершенствуются геометрические методы исследования теории n-арных групп. В частности, установлены (теоремы 5.2.17–5.2.20, [1, с. 48–55]) n-арные аналоги соответствующих утверждений из аффинной геометрии.

В разделе 5.3 решена задача распознавания свойства полуабелевости у n-арной группы через свойства многоугольников, построенных на этой группе. Установлены (теоремы 5.3.6 и 5.3.7 [1, с. 123, 132]) критерии полуабелевости n-арной группы, являющиеся n-арными аналогами соответствующих утверждений из аффинной геометрии.

В разделе 5.4 решена задача распознавания свойства полуабелевости у n-арной группы через свойства векторов, определенных на этой группе.

В главе 6 разрабатывается новое направление исследований, посвященное приложению полиадических операций в теории самосовмещений, через построение элементов аффинной геометрии на полуабелевой n-арной группе.

В разделе 6.1 введены понятия i-го обхода (определение 6.1.1 [1, с. 183]) и самосовмещения (определение 6.1.2 [1, с. 183]) произвольной точки относительно элементов последовательности. Решена задача о самосовмещении произвольных точек n-арных групп относительно элементов последовательностей вершин треугольника (теорема 6.1.3 [1, с. 184]) и четырехугольника (теорема 6.1.4 [1, с. 186]). Решена задача о самосовмещении произвольной точки p при $2i$-м обходе нечетного числа произвольных точек (теорема 6.1.7 [1, с. 196]).

В разделе 6.2 решена задача установления свойства полуабелевости n-арной группы через самосовмещения произвольных точек относительно элементов последовательностей вершин специально построенных четырехугольников (теорема 6.2.3 [1, с. 200]), шестиугольников (теорема 6.2.4 [1, с. 220]). Решена задача установления критериев полуабелевости n-арной группы, связанных с произвольными k-угольниками: в первом случае k – нечетное натуральное число (теорема 6.2.6 [1, с. 240]), а во втором – k четное (теорема 6.2.7 [1, с. 245]).

В разделе 6.3 решена задача установления свойства полуабелевости n-арной группы через свойства специально построенных последовательностей векторов таких, что их сумма есть нулевой вектор (теоремы 6.3.1–6.3.6[1, с. 248–283])

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории полиадических операций и их приложений, проводимых в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины, в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Белорусском государственном университете, Институте математики Молдавской Академии Наук, Витебском университете имени П.М. Машерова, в Волгоградском государственном университете, Могилевском университете продовольствия и др. Все основные результаты диссертации опубликованы в известных как русскоязычных, так и в англоязычных журналах [13, 6, 18, 22, 23, 26, 27], что делает их доступными для использования во многих научных центрах Беларуси.

Результаты диссертации могут быть использованы при изучении n-арных полугрупп, n-арных квазигрупп, топологических n-арных групп и других близких к n-арным группам универсальных алгебр, в иных областях, связанных с изучением поведения элементов, в частности точек, некоторых объектов, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.

2. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

Статьи в научных журналах

3. Кулаженко, Ю.И. Критерии полуабелевости *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ. – 1997. – №3(5). – С.61–64.

4. Кулаженко, Ю.И. Критерии полуабелевости *n*-арной группы $G = \langle X, (\ ), {}^{[-2]} \rangle$, выраженные через самосовмещение ее элементов / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2007. – №2(4). – С.55–58.

5. Кулаженко, Ю.И. n-Арные аналоги аффинных преобразований / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2007. – №6(45). – С. 161–168.

6. Кулаженко, Ю.И. Последовательность симметрий и совмещение произвольных элементов *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2008. – №5(50).Ч.1. – С. 198–204.

7. Кулаженко, Ю.И. Четырехугольники, полуабелевость и самосовмещение элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2008. – №6(51). Ч.2. – С. 149–155.

8. Кулаженко, Ю.И. Симметрия, шестиугольники и полуабелевость n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2008. – №2(47). – С.99-106.

9. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость, гомотетия и симметрия в n-арных группах / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – №5(56). – С. 85–90.

10. Кулаженко, Ю.И. Критерии полуабелевости и векторы n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – №3(54).Ч.2. – С. 155–162.

11. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость и самосовмещение точек n-арных групп относительно элементов последовательностей вершин четырехугольников / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – №2(53). – С. 150–156.

12. Кулаженко, Ю.И. n-Арные аналоги двух теорем аффинной геометрии и полуабелевость n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ. – 2009. – №4(54). – С. 119–125.

13. Kulazhenko, Yu.I. Semi – commutativity criteria and self – coincidence of elements expressed by vektors properties of n-ary groups / Yu.I. Kulazhenko // Algebra and discrete mathematics. – 2010. – V.9, № 2. – P. 98-107.

14. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость и самосовмещение в терминах векторов *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ. – 2010. – № 4 (58). – С. 11–16.

15. Кулаженко, Ю.И. Самосовмещения элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2010. – №1 (58). – С. 211–218.

16. Kulazhenko, Yu.I. Geometry of semiabelian n-ary groups / Yu.I. Kulazhenko // Quasigroups and Related Systems. – 2011. – V. 19. – P. 265–278.

17. Кулаженко, Ю.И. Векторы и критерии полуабелевости n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №1(6). – С. 65–68.

18. Kulazhenko, Yu.I. Sequences of Vectors and Criteria of Semi-Commutativity of n-Ary Groups /Yu.I. Kulazhenko // Southeast Asian Bullettin of mathematics. – 2013. – V. 37. – P. 745–752.

19. Кулаженко, Ю.И. О полуцентрах *l*-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – №2 (15). – С. 76–80.

20. Кулаженко, Ю.И. О центрах *l*-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ. – 2013. – №3(75). – С. 5–11.

21. Кулаженко, Ю.И. О единицах *l*-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Веснік Гродзенскага дзярж. унів. Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2013. – №3(159). – С. 6–11.

22. Kulazhenko, Yu.I. On Semi-Commutativity of n-ary Groups / Yu.I. Kulazhenko, M.V. Selkin// Mathematical Sciences Research Journal (USA). – 2013. – V. 17(9). – P.229–238.

23. Kulazhenko, Yu.I. Semiabelian and Self-Returning of points of *n*-ary Groups / Yu.I. Kulazhenko // Algebra and Discrete Mathematics. – 2014. – V17, №1. – P. 70–79.

24. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость и свойства векторов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Труды института математики и механики УроРАН. – 2014. –Т.20, №1. – С.142–147.

25. Кулаженко, Ю.И. О полуабелевости n-арных групп / Ю.И.Кулаженко, М.В.Селькин // Вести НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. – 2015. – №1. – С. 68-75.

26. Galmak, A.M. The Operation $[\ ]_{l,\sigma,J}$ / A.M. Galmak, Yu.I. Kulazhenko // Национальная ассоциация ученых. Ежемесячный научный журнал (Екатеринбург). – 2015. – №2 (7) – С. 34–39.

27. Galmak, A.M. In the class of all n-ary groups semi-commutativity, commutativity and affinity are identical concepts / A.M. Galmak, Yu.I. Kulazhenko // Asian-European J. Math. – DOI: 10.1142/S1793557115500254.

Тезисы докладов конференций

28. Кулаженко, Ю.И. Параллелограммы и точки симметрии n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Конференция математиков Беларуси: тез. докл. науч. конф., часть 1, Гродно, 29 сент. – 2 окт. 1992 г. / Акад. наук Респ. Беларусь, Мин-во образования Респ. Беларусь, ГГУ им. Я.Купалы. – Гродно, 1992. – С.31.

29. Кулаженко, Ю.И. О некоторых свойствах векторов n-арной группы / Ю.И. Кулаженко// Проблемы повышения функциональности и экономической устойчивости работы транспортного комплекса и его кадрового обеспечения в условиях рынка: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф., Гомель,. 1993 г. / Мин-во образования Респ. Беларусь, Мин. трансп. и коммун. Респ. Беларусь, БелИИЖТ, Бел. жел. дорога. – Гомель, 1993. – С.106-107.

30. Кулаженко, Ю.И. Признаки полуабелевости n-арных групп / Ю.И. Кулаженко// Международная математическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского: тез. докл. науч. конф., часть 1, Минск, 4–8 декабря 1993 г. / Акад. наук Респ. Беларусь, Мин-во образования Респ. Беларусь, МГПИ. – Минск, 1993. – С. 18.

31. Кулаженко, Ю.И. О связи полуабелевости с последовательностью параллелограммов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Международная 51-ая научно-техническая конференция, посвященная 75-летию БГПА: тез. докл. науч. конф., часть 1 / Минск, 1995 г. / Мин. обр . и науки Респ. Беларусь., Бел. гос. политех. академия. – Минск,1995. – С. 143–144.

32. Кулаженко, Ю.И. Построение параллелограммов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Проблемы алгебры и кибернетики: тез. докл. междун. конф., посвящ. памяти академика С.А.Чунихина, часть 1 / Мин-во образования и науки Респ. Беларусь. БелГУТ. ГГУ им.Ф.Скорины. Гом. филиал инст. мат. АН Беларуси, Белорусское республ. агенст. науч.-тех. и делов. информ. – Гомель, 1995. – С.89–90.

33. Кулаженко, Ю.И. О связи полуабелевости со свойствами векторов n-арной группы / Ю.И. Кулаженко // VII Белорусская математическая конференция: тез. докл., часть 1, Минск, 18-22 ноября 1996 г. / Мин-во образования и науки Респ. Беларусь., Белорусское мат. общ., БГУ, Инст. мат. Акад. наук Беларуси. – Минск, 1996. – С. 68–69.

34. Кулаженко, Ю.И. Аналог теоремы Фалеса, выраженной через векторы n-арной группы / Ю.И. Кулаженко // Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти профессора Л.М. Глускина: тез. докл. науч. конф., Славянск, Донецкой обл., 25–29 августа 1997 г. / Киевский университет им. Т. Шевченко, ГГУ им. Ф. Скорины, ДГУ, ЛГУ им. М. Франко. Славянский гос. пед. ин-т. – Славянск, 1997. –С. 12–13.

35. Кулаженко, Ю.И. К свойствам векторов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора Вольфганга Гашюца: тез. докл., Гомель, 16–21 октября 2000 г. – Гомель, 2000. – С. 36–37.

36. Кулаженко, Ю.И. К свойствам симметрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // VIII Белорусская математическая конференция: тез.докл.,

часть 2, Минск, 19–24 июня 2000 г. / Мин-во образования и науки Респ. Беларусь, Белорусское мат. общ, БГУ, Ин-т. мат. Акад. наук. Беларуси. – Минск, 2000. – С. 49.

37. Кулаженко, Ю.И. Гомотетия и самосовмещение элементов *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Юбилейная научно-практическая конференция УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель, 2009. – Ч. 4. – Гомель, 2009. – С. 134.

38. Кулаженко, Ю.И. Последовательности векторов и критерий полуабелевости *n*-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Международная научно-практическая. Интерн-конференция, посвященная 60-летию Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. – Витебск, 2011. – С.50–51.

39. Kulazhenko, Yu.I. Self-coincidence and polygons with odd number of points/ Yu.I. Kulazhenko // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Professor Vitaly Usenko, Lugansk Taras Shevchenko National University, Ukraine, July 5–12, 2011. – Lugansk, 2011. – P. 51.

40. Kulazhenko, Yu.I. Polygons with an Odd Number of Varitices and Self – Returning of Elements of n-ary Groups / Yu.I. Kulazhenko // International Math. Conference on occasion to the 70-th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko, Mykolayiv V.O. Sukhomlynsky National University, June 13–19, 2012. – Mykolayiv, 2012. – P. 13-14.

41. Kulazhenko, Yu.I. Self-Returns with respect to the Elements of the Succession with an Even Number of Points / Yu.I. Kulazhenko // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.N.Chernikov, July 7–12, 2014. – Kiev, 2012. – P. 73.

42. Кулаженко, Ю.И. Новый критерий полуабелевости и центроид n-арной группы / Ю.И. Кулаженко // XI Белорусская математическая конференция: тез.докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. – Часть 5. – Минск, 2012. – С. 37.

43. Кулаженко, Ю.И. О полуабелевых, коммутативных и аффинных *n*-арных группах / Ю.И. Кулаженко // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез докл. X Междунар. конф. Волгоград, 10–16 сентября 2012 г. – Волгоград, 2012. – С. 20–23.

44. Кулаженко, Ю.И. О центрах *l*-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Международная научно-практическая конференция, посвященная 100-летию МГУ им. А.А. Кулешова: тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – Могилев, 2013. – С. 156-157.

РЭЗЮМЭ

КУЛАЖАНКА Юрый Іванавіч

Паліадычныя аперацыі і іх прыкладанні

Ключавыя словы: *n*-арная аперацыя, *n*-арная група, *n*-арны групоід, цэнтр *n*-арнага групоіда, паўцэнтр *n*-арнага групоіда, паўабелева *n*-арная група, самасумячшчэнне элементаў *n*-арных груп.

У дысертацыі распрацаваны новыя метады даследавання паліадычных аперацый. Распрацаваны агульныя метады пабудовы і апісання паліадычных аперацый на мноствах функцый. Даследавана будова цэнтраў і паўцэнтраў паліадычных групоідаў і паўгруп функцый. Устаноўлены новыя ўласцівасці і заканамернасці паліадычных груп і алгебр функцый. Даказана тоеснасць у класе ўсіх *n*-арных груп паняццяў паўабелевасці і афіннасці. Знойдзены некаторыя *n*-арныя аналагі сцвярджэнняў з афіннай геаметрыі. Распрацаваны метады распазнавання паўабелевых *n*-арных груп у класе ўсіх *n*-арных груп пры дапамозе ўласцівасцей аб'ектаў афіннай геаметрыі, пабудаваных на гэтых групах. Вывучана самасумяшчэнне элементаў *n*-арных груп. Распрацаваны метады распазнавання паўабелевых *n*-арных груп у класе ўсіх *n*-арных груп праз самасумяшчэнне элементаў гэтых груп.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыставаны ў даследаваннях па тэорыі *n*-арных груп і блізкіх да іх алгебраічных сістэм, а таксама ў іншых галінах, звязаных з вывучэннем паводзін элементаў, у прыватнасці кропак, некаторых аб'ектаў. Акрамя гэтага, вынікі дысертацыі могуць быць выкарыставаны пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах.

РЕЗЮМЕ

КУЛАЖЕНКО Юрий Иванович

Полиадические операции и их приложения

Ключевые слова: *n*-арная операция, *n*-арная группа, *n*-арный группоид, центр *n*-арного группоида, полуцентр *n*-арного группоида, полуабелева *n*-арная группа, самосовмещение элементов *n*-арных групп.

В диссертации разработаны новые методы исследования полиадических операций и их приложений. Разработаны общие методы построения и описания полиадических операций на множествах функций. Исследовано строение центров и полуцентров полиадических группоидов и полугрупп функций. Установлены новые свойства и закономерности полиадических групп и алгебр функций. Доказана тождественность в классе всех *n*-арных групп понятий полуабелевости и аффинности. Получены некоторые *n*-арные аналоги утверждений из аффинной геометрии. Разработаны методы распознавания полуабелевых *n*-арных групп в классе всех *n*-арных групп с помощью свойств объектов аффинной геометрии, построенных на этих *n*-арных группах. Изучено самосовмещение элементов *n*-арных групп. Разработаны методы распознавания полуабелевых *n*-арных групп в классе всех *n*-арных групп через самосовмещение элементов этих групп.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории *n*-арных групп и близких к ним алгебраических систем, а также в других областях, связанных с изучением поведения элементов, в частности точек, некоторых объектов. Кроме того, результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Kulazhenko Yurij Ivanovich

Polyadic Operations and their Application

Key words: *n*-ary operation, *n*-ary group, *n*-ary groupoid, centre of an *n*-ary groupoid, semi-centre of *n*-ary an groupoid, semi-commutative *n*-ary group, self-returning of the elements of an *n*-ary group.

The thesis presents new methods of studying polyadic operations. It contains general methods and the description of polyadic operations on the sets of functions. The thesis also presents the findings in studying structures of centres and semi-centres of polyadic groupoids and semigroups of functions. It establishes new properties and regularities of polyadic groups and algebras of functions. The identity of the notions of semi-commutativity and affinity of all *n*-ary groups in the class is proved. The thesis presents some *n*-ary analogues of statements from affine geometry. The methods of identifying semi-commutative *n*-ary groups in the class of all *n*-ary groups by means of properties of objects of affine geometry constructed on the groups is worked out in the thesis. A new trend of investigation, self-returning of *n*-ary groups, is determined. The methods of identifying semi-commutative *n*-ary groups in the class of all *n*-ary groups through the self-returning of the elements of the groups are also worked out.

All the main results of the thesis are new. They have theoretical character and can be used in the investigations on the theory of *n*-ary groups and the algebraic systems similar to them, as well as in other areas relating to the study of behavior of the elements, in particular points of some objects. Morever, they can be used at lecturing special courses at universities.

Научное издание

Кулаженко Юрий Иванович

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 15.04.2015. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. п. л. 2,8
Уч.-изд. л. 2,9 Тираж 60 экз. Заказ № 224

Издатель и полиграфическое исполнение
учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
ЛП № 02330/0150450 от 03.02.2009.
ул. Советская, 104, 246019, Гомель.