

УДК 539.377

А. В. НЕСТЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РАДИАЛЬНОЕ И ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследовано деформирование трехслойной круговой пластины под действием неосесимметричных радиальных и тангенциальных нагрузок, приложенных к срединной плоскости заполнителя. Приведена система дифференциальных уравнений равновесия и методом Фурье для пластины с закрепленным контуром получено решение для случая нагрузок, изменяющихся по синусоидальному закону. Учтено влияние температуры на упругие характеристики материалов слоев. Проведен численный анализ решения.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, неосесимметричное нагружение, радиальная нагрузка, тангенциальная нагрузка, температура.

Введение. Трехслойные элементы конструкций широко применяются в современных отраслях промышленности: авиа-, судо-, приборо-, машиностроении и строительстве. К ним часто предъявляются жесткие требования по прочности, долговечности и экономичности.

Исследованиям деформирования трехслойных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ. В монографиях [1, 2] приводятся постановки и методы решения краевых задач для трехслойных стержней и пластин. Колебаниям таких пластин при локальных импульсных и ударных воздействиях посвящены статьи [3, 4]. В публикациях [5, 6] рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных оболочек и прямоугольных пластин в температурном поле. Результаты исследований изотермического деформирования трехслойных стержней нагрузками различного вида приведены в [7, 8]. Деформирование круговых и кольцевых пластин, связанных с основаниями различного вида, описано в публикациях [9, 10]. Осесимметричное деформирование круглых однослойных пластин в своей плоскости рассмотрено в статье [11]. Постановки краевых задач и вывод уравнений равновесия круглых пластин при неосесимметричном деформировании в своей плоскости представлены в работах [12–14]. В статье [15] приведено общее решение краевой задачи о деформировании круглой пластины при радиальной косинусоидальной нагрузке.

В данной статье рассматривается новая краевая задача о неосесимметричном растяжении-сжатии и кручении упругой круговой трехслойной пластины под действием приложенных в срединной плоскости заполнителя радиальной и тангенциальной нагрузок, законы изменения которых представляют собой элементарные тригонометрические функции.

Математическая модель. Исследуется несимметричная по толщине круглая трехслойная пластина, состоящая из двух несущих слоев и толстого несжимаемого по толщине заполнителя, защемленная по контуру. Задача рассматривается в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной со срединной плоскостью заполнителя. Внешняя распределенная радиальная и тангенциальная нагрузки изменяются по гармоническому закону и приложены в срединной плоскости заполнителя:

$$\begin{aligned} p_r(r, \varphi) &= p_{r1} \cos \varphi; \quad p_{r1} = \text{const}; \\ p_\varphi(r, \varphi) &= p_{\varphi1} \sin \varphi; \quad p_{\varphi1} = \text{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

С помощью принципа возможных перемещений Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях [13]:

$$\begin{aligned} a_1 u_{r,r} + \frac{a_1}{r} u_{r,r} - \frac{a_1}{r^2} u_r + \frac{a_3}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{\varphi,\varphi} &= -p_r, \\ a_3 u_{\varphi,rr} + \frac{a_{13}}{r} u_{\varphi,r} - \frac{a_3}{r^2} u_\varphi + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{r,r\varphi} + \frac{a_1}{r^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{r,\varphi} &= -p_\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, а коэффициенты определяются формулами

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) h_k; \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right) h_k; \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 G_k h_k,$$

где $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемной деформации материалов; h_k – толщина слоя; k – номер слоя ($k = 1, 2, 3$).

Температура T в явном виде в уравнения равновесия (2) не входит, однако она влияет на модули упругости, входящие в коэффициенты a_i . Зависимость модулей упругости от температуры предполагается линейной и описывается формулой Белла [1]

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при «нулевом» напряжении, которые можно определить, зная G_0 при некоторой температуре, например комнатной T_0 , тогда $G(0) = G_0/\varphi(T_0)$.

Общее решение краевой задачи предложено в [15]. Для решения системы уравнений (2) искомые перемещения и нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье по координате φ . После подстановки этих рядов в систему (2), с учетом нагрузки (1) получена система двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $u_{r1}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi1}^{(1)}(r)$:

$$L_2 \left(u_{r_1}^{(1)}(r) \right) - \frac{a_3}{a_1 r^2} u_{r_1}^{(1)}(r) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 r} u_{\varphi_1, r}^{(2)}(r) - \frac{a_1 + a_3}{a_1 r^2} u_{\varphi_1}^{(2)}(r) = -\frac{1}{a_1} p_{r_1},$$

$$L_2 \left(u_{\varphi_1}^{(2)}(r) \right) - \frac{a_1}{a_3 r^2} u_{\varphi_1}^{(2)}(r) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 r} u_{r_1}^{(1)}(r) - \frac{a_1 + a_3}{a_3 r^2} u_{r_1}^{(1)}(r) = -\frac{1}{a_3} p_{\varphi_1},$$

где L_2 – дифференциальный оператор, форма которого приведена в [15].
Решение полученной неоднородной системы следующее:

$$u_{r_1}^{(1)} = -C_1 + C_2 \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} r^2 +$$

$$+ \left[-\left(51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2\right) p_{r_1} + \left(77a_1^2 - 142a_1a_2 - 11a_2^2\right) p_{\varphi_1} - \right.$$

$$\left. -4\left(5a_1 + a_2\right)\left(a_1 - 3a_2\right)\left(p_{r_1} + p_{\varphi_1}\right) \ln r \right] \frac{r^2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)\left(5a_1 + a_2\right)};$$

$$u_{\varphi_1}^{(2)} = C_1 + C_2 r^2 + \frac{5a_1 + a_2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)} \left(5 - 4 \ln r\right) \left(p_{r_1} + p_{\varphi_1}\right) r^2. \quad (3)$$

При кинематических граничных условиях, соответствующих заделке, шарнирному закреплению контура пластины, константы интегрирования C_1 , C_2 получаются из условия равенства нулю перемещений (3) на контуре

$$C_1 = -(C_2 + B_2) r_0^2, \quad C_2 = -\frac{B_1 + B_2}{A_1 + 1},$$

где

$$B_1 = \left[-\left(51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2\right) p_{r_1} + \left(77a_1^2 - 142a_1a_2 - 11a_2^2\right) p_{\varphi_1} - \right.$$

$$\left. -4\left(5a_1 + a_2\right)\left(a_1 - 3a_2\right)\left(p_{r_1} + p_{\varphi_1}\right) \ln r_0 \right] \frac{1}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)\left(5a_1 + a_2\right)},$$

$$B_2 = \frac{5a_1 + a_2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)} \left(p_{r_1} + p_{\varphi_1}\right) \left(5 - 4 \ln r_0\right), \quad A_1 = \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2}.$$

Зависимости проекций полного перемещения имеют вид

$$u_r(r, \varphi) = u_{r_1}^{(1)}(r) \cos \varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi) = u_{\varphi_1}^{(2)}(r) \sin \varphi.$$

В окончательной форме

$$u_r(r, \varphi) = \left[\frac{\left(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2\right) p_{r_1} - \left(13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2\right) p_{\varphi_1}}{2\left(3a_1 - a_2\right)} \left(r_0^2 - r^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(a_1 - 3a_2\right)\left(p_{r_1} + p_{\varphi_1}\right) \ln \left(\frac{r_0}{r}\right) r^2 \right] \frac{1}{16a_1\left(a_1 - a_2\right)} \cos \varphi;$$

$$u_{\varphi}(r, \varphi) = \left[\frac{-(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2)p_{r1} + (13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2)p_{\varphi1}}{2(3a_1 - a_2)} (r_0^2 - r^2) + (5a_1 + a_2)(p_{r1} + p_{\varphi1}) \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) r^2 \right] \frac{1}{16a_1(a_1 - a_2)} \sin \varphi.$$

Численные результаты получены при нагрузке с $p_{r1} = 10$ МПа, $p_{\varphi1} = 10$ МПа, распределенной по всей срединной плоскости пластины. Материалы слоев Д16Т–фторопласт–4–Д16Т, радиус пластины $r_0 = 1$ м, толщины слоев $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Механические характеристики материалов приняты в соответствии с [2].

Рисунок 1, *а* отображает изменение радиальных перемещений u_r вдоль радиуса пластины ($T = 293$ К) при различных значениях угловой координаты: 1 – $\varphi = 0, 2\pi$; 2 – $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$; 3 – $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$; 4 – $\varphi = \pi$. Положительный знак радиальных перемещений показывает перемещения точек вдоль радиуса от центра, отрицательный – к центру. Максимальные по модулю значения радиальных перемещений достигаются в центре пластины.

Рисунок 1, *б* показывает изменение тангенциальных перемещений u_{φ} вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты ($T = 293$ К): 1 – $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$; 2 – $\varphi = \pi/2$; 3 – $\varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$; 4 – $\varphi = 3\pi/2$.

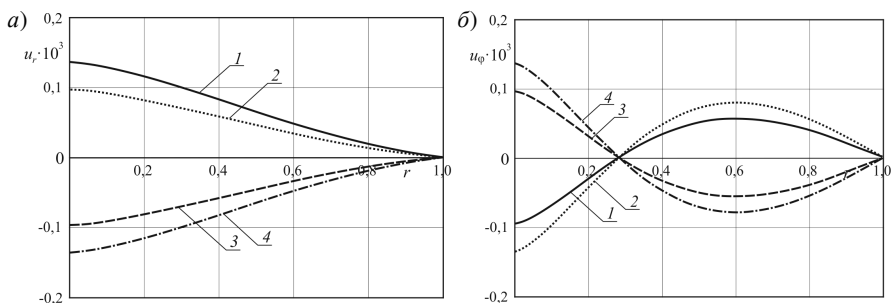


Рисунок 1 – Радиальные $u_r(r, \varphi)$ (*а*) и тангенциальные $u_{\varphi}(r, \varphi)$ (*б*) перемещения при $T = 293$ К

Максимальные значения тангенциальных перемещений совпадают по модулю с радиальными и достигаются в центре пластины. Участки верхней части пластины поворачиваются по часовой стрелке, т. к. соответствующие тангенциальные перемещения отрицательные, нижней – против часовой стрелки, ближе к краю пластины направление меняется.

На рисунке 2 изображены изменения радиальных u_r (при $\varphi = 0$) и тангенциальных u_{φ} (при $\varphi = 3\pi/2$) перемещений вдоль радиуса пластины при различных температурах: 1 – $T = 293$ К; 2 – $T = 323$ К; 3 – $T = 373$ К. При нагре-

ве на 30 К перемещения увеличиваются примерно на 3,2 %; в случае увеличения температуры на 80 К – на 7,63 %.

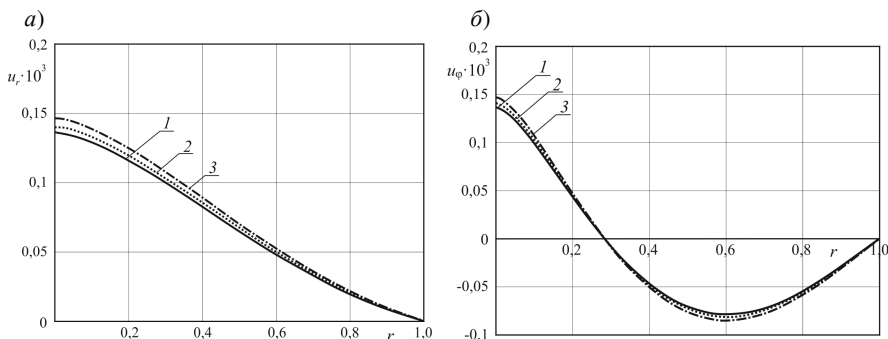


Рисунок 3 – Изменение термосиловых радиальных $u_r(r, \varphi)$ (а) и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ (б) перемещений вдоль радиуса пластины

Таким образом, за счет тангенциальной составляющей нагрузки изменяются не только окружные, но и радиальные перемещения. Влияние температуры на перемещения при закрепленном контуре пластины оказывается несущественным.

Заключение. Полученное аналитическое решение и численные результаты могут быть использованы при исследовании напряженно-деформированного состояния круговых трехслойных пластин в более сложных случаях неосесимметричного нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Starovoitov E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.
- 2 **Журавков, М. А.** Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 540 с.
- 3 **Starovoitov, E. I.** Circular sandwich plates under local impulsive loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 8. – P. 945–952.
- 4 **Deshpande, V. S.** Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading / V. S. Deshpande, N. A. Fleck // Journal of Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 71, No. 5. – P. 637–645.
- 5 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

6 **Зеленая, А. С.** Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

7 **Леоненко, Д. В.** Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем на упругом основании / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 67–73.

8 **Журавков, М. А.** Деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым наполнителем в температурном поле / М. А. Журавков // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 4. – С. 101–109.

9 **Starovoitov, E. I.** Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

10 **Козел, А. Г.** Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

11 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

12 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

13 **Нестерович, А. В.** Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

14 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

15 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

A. V. NESTEROVICH

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

RADIAL AND TANGENTIAL NON-AXISYMMETRIC LOADING OF A CIRCULAR THREE-LAYERED PLATE

There is investigated a deformation of a three-layered circular plate under the action of nonaxisymmetric radial and tangential loads applied to the median plane of the filler. A system of equilibrium differential equations is presented, and its solution is obtained using the Fourier method at a constant amplitude of loads and a fixed contour of the plate. The influence of temperature on the elastic characteristics of the materials of the layers is taken into account. Numerical testing was carried out.

Keywords: three-layered circular plate, non-axisymmetric loading, radial load, tangential load, temperature.

Получено 23.10.2020