ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007

УДК 531.3

А. Н. ДУБКО
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ЛИНИЯ ПОГОНИ

Предлагается способ вывода уравнения линии погони в общем виде и решения на его основе некоторых частных задач.

В течение многих веков внимание исследователей механических явлений привлекали линии с теми или иными кинематическими особенностями. Решения связанных с ними задач о каких-то частных движениях точек пополняли математический арсенал теоретической механики и иногда инициировали разработку и создание механизмов, обеспечивающих возможность реализации таких движений.

Одна из подобных задач рассматривает следующую ситуацию. Некоторый объект, схематизируемый точкой, начинает двигаться прямолинейно из заданного положения с постоянной скоростью. Второй объект с той же схематизацией начинает движение из иной точки, лежащей на перпендикуляре к траектории первого. Скорость его также постоянна и больше скорости первого объекта (далее будем называть их точками).

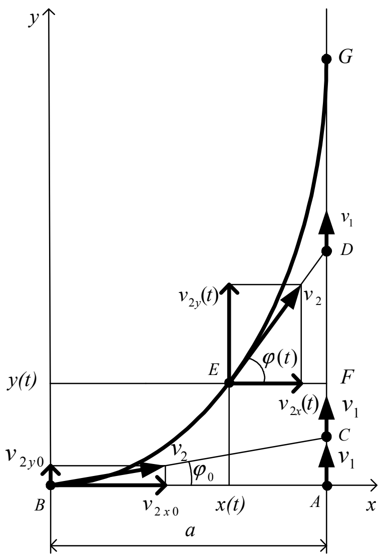

Рисунок 1 – Линия погони

Вторая точка догоняет первую таким образом, чтобы каждое её мгновенное перемещение происходило бы вдоль отрезка, соединяющего в этот момент времени обе точки. Траектория второй точки как раз и представляет собою линию погони или преследования (рисунок 1).

Попытки решения задачи об определении уравнения траектории погони и их описания можно видеть в некоторых изданиях учебных курсов математики или теоретической механики. Например, в [1] или [2]. Однако их нельзя признать общими, так как в цитированных работах уже при постановке задачи вводятся ограничения на соотношения скоростей обеих движущихся точек. А сами решения напоминают скорее математические упражнения, нежели поиск ответа в общем виде на поставленный технический вопрос.

Поэтому некоторая ущербность выполненных решений сформулированной задачи подтолкнула нас к попытке получения её решения, лишённого замеченных недостатков. Её постановку предлагаем в следующем виде.

Первая точка выходит из положения, обозначенного буквой A, и движется с постоянной скоростью v_1 параллельно оси y. Через Δt единиц времени она попадает в положение C. В этот момент из положения, обозначенного буквой B, начинает двигаться вторая точка с постоянной скоростью v_2. Вектор её скорости направлен вдоль отрезка BC в сторону сближения с первой точкой. Это условие выполняется вдоль всего пути преследования. Графически оно выражено с помощью отрезка ED и вектора скорости v_2, соответствующих некоторому произвольно взятому положению E второй точки и соответствующего ему положению D первой точки.

Таким образом, на основе следующих исходных данных: задаваемых a, Δt, v_1, v_2 ($v_1 > v_2$) и указанных выше условий относительного движения обеих точек, надо получить уравнение линии погони и рассмотреть, какие частные задачи можно решить с его использованием.

Используем для этого соотношение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\varphi$.

Из треугольника CDF следует: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{v_1 t - y}{a - x}$ или $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - v_1 t}{x - a}$.

Чтобы избавиться от переменной t, введём соотношение

$$s = v_2 (t - \Delta t),\ \text{откуда}\ t = \frac{s + v_2 \Delta t}{v_2}.$$

Вводим коэффициент $k = \dfrac{v_2}{v_1}$. Тогда $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{ky - s - v_2 \Delta t}{k(x - a)}$.

Учитывая, что $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, продифференцируем по x предыдущее соотношение: $k(x - a)\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$.

Введём обозначение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \xi$. Тогда предыдущее уравнение преобразовывается к такому виду: $k(x - a)\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \xi^2}$.

Разделение переменных и выполнение интегрирования уравнения

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = -\frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x - a}$$

приводит к выражению: $\frac{\xi + \sqrt{1+\xi^2}}{\xi_0 + \sqrt{1+\xi_0^2}} = \frac{a^{1/k}}{(a-x)^{1/k}}$.

Если теперь ввести обозначение $C_1 = a^{1/k}(\xi_0 + \sqrt{1+\xi_0^2})$ и вернуться к переменной y, то после выполнения очередного интегрирования с переменными верхними пределами для аргумента и функции, получается уравнение линии погони:

$$y = [-C_2(a-x)^{(k-1)/k} + C_3(a-x)^{(k+1)/k}] + C_4 .$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$C_2 = \frac{C_1 k}{2(k-1)};\ C_3 = \frac{k}{2C_1(k+1)};\ C_4 = C_2 a^{(k-1)/k} - C_3 a^{(k+1)/k} .$$

Полученные результаты позволяют выполнить дополнительные расчёты:

1) определить расстояние, которое пройдёт первая точка до момента окончания погони. На рисунке 1 оно обозначено отрезком AG. Для этого в уравнение погони достаточно подставить значение отрезка a. Непосредственно из этого уравнения видно, что искомое расстояние равно константе C_4;

2) рассчитать длительность времени движения первой точки от момента начала её движения до окончания погони. Делается это с помощью соотношения: $t_1 = AG : v_1$;

3) установить, как долго продолжалась погоня. Так как движение догоняющей точки началось по условию задачи через Δt единиц времени после начала движения первой точки, то

$$t_2 = t_1 - \Delta t ;$$

4) определить длину пути догоняющей точки. Её движение происходило с постоянной скоростью, поэтому пройденный путь имеет следующую длину: $S = v_2\, t_2$.

Таким образом, предлагаемое уравнение позволяет рассчитать все основные параметры кинематики погони при выполнении условия о наилучшем сближении догоняющего с убегающим в каждый момент времени, если скорости движения обеих точек постоянны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пономарев, К. К.** Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск, 1973. – 557 с.

2 **Суслов, Г. К.** Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.

Получено 12.02.2007