ISBN 978-985-468-405-5. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 2. Гомель, 2008

УДК 531

Т. А. РОЩЕВА, Е. А. МИТЮШОВ, М. М. ШАЙМАРДАНОВ
Уральский государственный технический университет

СТАНДАРТНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ. КИНЕМАТИКА В ПРОСТРАНСТВЕ

В работе с использованием нетрадиционных алгоритмов, основанных на более широком применении векторных и матричных операций, приведены примеры решения задач повышенной сложности по кинематике пространственных механизмов. Изменение школьных и вузовских программ позволяет пересмотреть традиционные методы решения задач по теоретической механике, сделав акцент на применении формальных процедур, легко встраивающихся в современные программные прикладные пакеты.

Традиционная практика изложения курса теоретической механики в технических вузах не предполагает развития навыков решения задач, связанных с движением пространственных механизмов. Поэтому такие задачи относятся к нестандартным и предлагаются к решению на студенческих олимпиадах различного уровня. В действительности же решение большинства из этих задач не требует нестандартных умозаключений и вполне соответствует объему даваемых знаний по самым минимальным программам обучения. Естественно предполагается, что студенты обладают полученными в курсе математики навыками выполнения векторных и матричных операций.

При исследовании кинематики любого движения твердого тела основными "рабочими" являются формула Эйлера

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

и ее следствие

$$\vec{V}_B \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_A \cdot \overrightarrow{AB} . \tag{2}$$

При решении практических задач во многих случаях целесообразен переход к матричным обозначениям. Вводя в рассмотрение векторы-столбцы

$$\widehat{V}_B = \begin{pmatrix} V_{Bx} \\ V_{By} \\ V_{Bz} \end{pmatrix}, \ \widehat{V}_A = \begin{pmatrix} V_{Ax} \\ V_{Ay} \\ V_{Az} \end{pmatrix}, \ \widehat{r}_B - \widehat{r}_A = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$\text{и матрицу } \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

равенство (1) перепишем в виде

$$\widehat{V}_B = \widehat{V}_A + \Omega(\widehat{r}_B - \widehat{r}_A)$$

или

$$\begin{pmatrix} V_{Bx} \\ V_{By} \\ V_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{Ax} \\ V_{Ay} \\ V_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \tag{4}$$

Преимущества матричного представления становятся очевидными при определении ускорений точек твердого тела. Как известно, связь между ускорениями двух точек твердого тела устанавливается путем дифференцирования векторного равенства (1)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right). \tag{5}$$

Легко проверить, что неассоциативная операция двойного векторного произведения $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)$ становится ассоциативной при использовании матричного представления вектора угловой скорости (3).

В этом случае

$$\widehat{a}_B = \widehat{a}_A + \left(\widehat{\varepsilon} + \Omega^2\right) A\widehat{B},$$

где

$$\widehat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Omega^2 = \Omega\Omega = \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix}.$$

В качестве примеров приведем решения задач, предложенных на олимпиадах по теоретической механике и оцененных большим количеством баллов. Условия задач цитируются по [1].

Задача 1. (СССР, 1984, 9 баллов)

Пространственная конструкция из трех тонких стержней, жестко соединенных (сваренных) под прямыми углами в точке A, совершает пространственное движение (рисунок 1). При этом стержень AC прикреплен к ползуну C с помощью сферического шарнира, а стержень AD может свободно перемещаться внутри втулки, присоединенной к неподвижному основанию в начале координат сферическим шарниром O. Ползун C равномерно движется вдоль направляющего паза, параллельного оси Oy, со скоростью $\vec{V}_C = \vec{u}$, а точка B

безотрывно скользит по плоскости Oxy. Найти проекции вектора угловой скорости пространственной конструкции $ABCD$ на оси координат в положении, когда $EC = l\sqrt{2}$; $AB = AC = 2l$; $OE = l\sqrt{6}$.

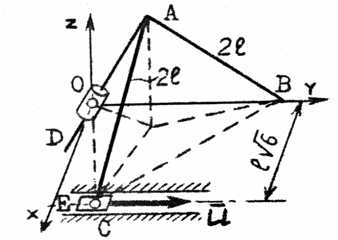

Рисунок 1

Информация о движении трех точек твердого тела является достаточной для описания его движения. Поэтому начинаем решение с выбора точек тела, про скорости которых в условии данной задачи что-либо известно (величина, направление):

$$\vec{V}_O \parallel OA;$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{Bx} + \vec{V}_{By} = \{V_{Bx}; V_{By}; 0\}; \qquad (6)$$

$$\vec{V}_C = \{0;\ u;\ 0\}.$$

Вместе с искомыми проекциями вектора угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ имеем шесть неизвестных величин, для определения которых запишем два равенства

$$\begin{cases} \hat{V}_C = \hat{V}_O + \Omega \hat{r}_C \\ \hat{V}_B = \hat{V}_O + \Omega \hat{r}_B \end{cases}. \qquad (7)$$

Все остальное – дело вычислительной техники, и трудности решения могут быть сопряжены лишь с элементарной геометрией.

Не останавливаясь на способах определения, запишем столбцы необходимых для вычислений векторов:

$$\hat{r}_C = \begin{pmatrix} l\sqrt{6} \\ l\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \hat{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2l\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для записи вектора-столбца $\vec{V}_O$ определим координаты точки $A\left(\frac{l\sqrt{6}}{3}; l\sqrt{2}; \frac{2l\sqrt{3}}{3}\right)$ и учтем то обстоятельство, что $\vec{V}_O \parallel \overrightarrow{OA}$. В результате получим

$$\vec{V}_O = \begin{pmatrix} V_O \dfrac{x_A}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} \\ V_O \dfrac{y_A}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} \\ V_O \dfrac{z_A}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{V_O\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{V_O\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{V_O\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Остается записать аналитические выражения, соответствующие равенствам (7). С учетом значений компонент векторов скоростей (6)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{V_O\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{V_O\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{V_O\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\sqrt{6} \\ l\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} V_{BX} \\ V_{BY} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{V_O\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{V_O\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{V_O\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2l\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решив полученную систему относительно искомых неизвестных, найдем

$$\omega = \left\{ -\frac{u\sqrt{3}}{12\cdot l}; \frac{u}{12\cdot l}; \frac{u\sqrt{6}}{12\cdot l} \right\}.$$

Задача 2. (СССР, 1988, 6 баллов)

Конец A стержня AB длины $2l$ движется по оси z с постоянной скоростью $\vec{u}$, конец B движется по прямой $y = l$, $z = 0$. Определите скорость V_B и ускорение a_B конца B стержня в момент, когда $OA = l$ (рисунок 2).

Так как $\vec{V}_A = \{0; 0; -u\}$; $\vec{V}_B = \{V_B; 0; 0\}$, $\overrightarrow{AB} = \left\{\sqrt{2}l; k; -l\right\}$ использование формулы (2) сразу же позволяет определить скорость точки B:

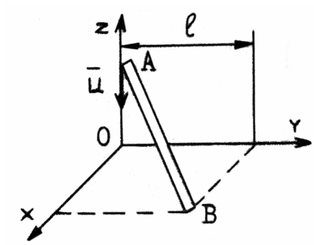

Рисунок 2

$$u \cdot l = \sqrt{2} l \cdot V_B \Rightarrow V_B = \frac{\sqrt{2}}{2} u \,.$$

Непосредственное использование матричного равенства (4) в данном случае

$$\begin{pmatrix} \dfrac{u\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\sqrt{2} \\ l \\ -l \end{pmatrix}$$

приводит к системе уравнений

$$\frac{u\sqrt{2}}{2} = -\omega_z \cdot l - \omega_y \cdot l = -l(\omega_z + \omega_y);$$

$$0 = \omega_z \cdot l\sqrt{2} + \omega_x \cdot l;$$

$$0 = -u - \omega_y \cdot l\sqrt{2} + \omega_x \cdot l.$$

Решением этой системы будет:

$$\omega_y = \frac{\omega_x\sqrt{2}}{2} - \frac{u\sqrt{2}}{2 \cdot l}; \qquad \omega_z = -\frac{\omega_x\sqrt{2}}{2}. \tag{8}$$

Ускорение точки B найдем по формуле (5). Так как $\vec{a}_A = 0$, то

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)$$

или в матричной форме записи

$$\begin{pmatrix} a_{Bx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z^2 - \omega_y^2 & -\varepsilon_z + \omega_x\omega_y & \varepsilon_y + \omega_x\omega_z \\ \varepsilon_z + \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & -\varepsilon_x + \omega_y\omega_z \\ -\varepsilon_y + \omega_x\omega_z & \varepsilon_x + \omega_y\omega_z & -\omega_y^2 - \omega_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\sqrt{2} \\ l \\ -l \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матричное уравнение (9) с учетом соотношений (8) позволяет найти a_{Bx} без определения других неизвестных (ω_x, ε_x, ε_y, ε_z).

$$a_{Bx} = -\frac{3\sqrt{2} \cdot u^2}{4l}.$$

Ответ: $V_B = \frac{\sqrt{2}}{2} u$; $a_B = \frac{3\sqrt{2} \cdot u^2}{4l}$.

Замечание. При неформальном использовании представленного алгоритма можно определить ускорение точки В чуть быстрее. Для этого следует обе части векторного равенства (8) умножить скалярно на вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{a}_B \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)\right) \cdot \overrightarrow{AB}. \qquad (10)$$

С учетом представления $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ и возможностью записи смешанного произведения векторов в виде определителя третьего порядка, элементами которого являются компоненты перемножаемых векторов, перепишем равенство (10) в виде

$$a_B \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_{Bx} - V_{Ax} & V_{By} - V_{Ay} & V_{Bz} - V_{Az} \\ AB_x & AB_y & AB_z \end{vmatrix}.$$

В условиях данной задачи

$$a_{Bx} \cdot \sqrt{2}l = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \frac{\sqrt{2}u}{2} & 0 & u \\ \sqrt{2}l & l & -l \end{vmatrix} = u \cdot l \cdot \left(-\omega_x + \omega_y \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + \omega_z \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3}{2} u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{Bx} = -\frac{3\sqrt{2}}{4l} u^2.$$

Задача 3. (В расширенной постановке задача решена в [2]).

Крестовина универсального шарнира Кардано – Гука ($\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$), употребляемого при передаче вращения между пересекающимися осями, вращается вокруг неподвижной точки E. Угол между осями валов равен α. Найти отношение угловых скоростей ω_1 / ω_2 для валов, связанных крестовиной, как функцию угла поворота φ_1 первого вала, отсчитываемого от горизонтального положения плоскости вилки *1* (рисунок 3).

Крестовина шарнира движется как абсолютно твердое тело, и для ее точек *B* и *C* справедливо уравнение (2):

$$\vec{V}_B \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{V}_C \cdot \overrightarrow{BC}.$$

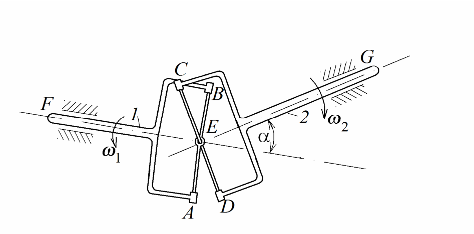

Рисунок 3

Являясь точкой пересечения двух неподвижных осей, точка E остается неподвижной во все время движения. Поэтому

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{EB};\ \vec{V}_C = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{EC}\ .$$

Тогда

$$\left(\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{EB}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{EC}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

или (с учетом векторного равенства $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}$)

$$\left(\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{EB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}\right) = \left(\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{EC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}\right).$$

Откуда после преобразований получим

$$\left((\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{EB}\right) \cdot \overrightarrow{EC} = 0. \qquad (11)$$

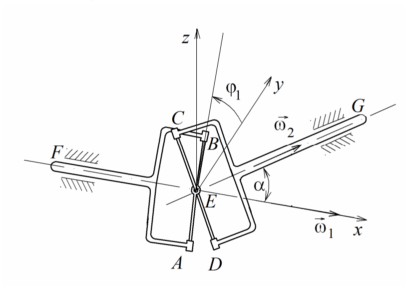

Рисунок 4

Выбрав прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость, образованная осями валов, совпала с плоскостью xEz, запишем компоненты входящих в выражение (11) векторов (при этом модуль вектора $\overrightarrow{EB}$ примем равным единице, а вектор $\overrightarrow{EC}$ определим как результат векторного произведения единичного направляющего вектора оси вала EG и вектора $\overrightarrow{EB}$). В выбранной системе отсчета:

$$\vec{\omega}_1 = \{\omega_1; 0; 0\};\ \ \vec{\omega}_2 = \{\omega_2 \cos\alpha; 0; \omega_2 \sin\alpha\};$$

$\overrightarrow{EB} = \{0;\ \cos\varphi_1;\ \sin\varphi_1\}$;

$\overrightarrow{EC} = \{-\sin\alpha\cos\varphi_1;\ -\cos\alpha\sin\varphi_1;\ \cos\alpha\cos\varphi_1\}$.

Записав, как ранее, смешанное произведение векторов, стоящее в левой части равенства (11) в виде определителя из координат сомножителей, перепишем уравнение (11) в виде

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega_2\cos\alpha & 0 & -\omega_2\sin\alpha \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\alpha\cos\varphi_1 & -\cos\alpha\sin\varphi_1 & \cos\alpha\cos\varphi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда найдем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi_1}{\cos\alpha}.$$

Следует отметить, что представленная формализация кинематических расчетов пространственных систем может быть положена в основу составления алгоритмов вычислительных процессов с использованием персонального компьютера, и, возможно, это обстоятельство делает представленный материал интересным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Попов, В. И.** Сборник олимпиадных задач по теоретической механике / В. И. Попов [и др.]. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2002. – 72 с.

2 **Митюшов, Е. А., Берестова, С. А.** Теоретическая механика / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. – М. : Издательский Центр «Академия», 2006. – 320 с.

Получено 28.06.2007