ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009

УДК 531

Т. А. РОЩЕВА, Е. А. МИТЮШОВ
Уральский государственный технический университет, Екатеринбург

МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Предлагается метод описания движения твердого тела, основанный на матричной структуризации трехмерного пространства, позволяющий алгоритмизировать поиск решения многих разнородных с точки зрения традиционного (в рамках векторной алгебры) изложения задач теоретической механики и в полной мере использовать при их решении стандартные информационные ресурсы.

На протяжении всей истории человеческой цивилизации при передаче накопленных знаний следующим поколениям естественным образом менялись содержание, методы и формы обучения. Происходила переоценка значимости тех или иных результатов, их уточнение (или опровержение). Особенно высокими темпами эти процессы протекают в настоящее время, в связи с происходящей информационной революцией. К сожалению, основная учебная литература, вновь издаваемая и переиздаваемая в России для базовых курсов в системе высшего профессионального образования, не в полной мере отвечает требованиям и возможностям новой информационной среды. Имеются единичные примеры учебных пособий по естественнонаучным и общепрофессиональным дисциплинам, в которых даются примеры решения стандартных задач традиционными методами, но с применением новых вычислительных средств. При этом практически не подвергается изменению содержательная часть курса. В целом, идеология, заложенная в учебных курсах, отражает уровень преподавания середины XX века.

В частности, в преподавании теоретической механики к этому времени завершился переход к векторному способу изложения основного учебного материала, сократилось применение графических методов решения задач, которые сейчас практически не используются. Решение прикладных задач с использованием векторных моделей продолжает выполняться преимущественно громоздкими геометрическими методами. В преподавании теоретической механики в технических вузах практически не используются методы матричной, линейной и тензорной алгебр. При этом матричные методы уже давно и широко используются в последующих учебных курсах, а также в различных пакетах прикладных программ.

Как известно, каждой точке физического пространства может быть поставлен в соответствие набор из трех чисел, называемых ее координатами. В зависимости от условия задачи пространство может быть наделено либо векторной структурой, либо матричной, т.е. между точками пространства могут быть установлены отношения, представленные в виде векторных или матричных уравнений. Векторная структура безусловно удобна для иллюстраций. В то же время более высокая степень формализации операций над матрицами позволяет получать строгие результаты, имеющие физический смысл, путем незатруднительных алгебраических преобразований.

Отметим некоторые возможности матричного представления операций над векторами, реализуемых в процессе решения задач, связанных с движением объектов.

Пусть *Oxyz* – прямоугольная декартова система координат. Тройка чисел, определяющих положение точки или координаты вектора, может быть представлена в виде

$$\hat{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}, \qquad \text{или} \qquad \hat{l}^T = (l_x l_y l_z),$$

или

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Все три записи есть формальные записи вектора $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$. При этом первые две – интуитивно очевидны. Поясним смысл введения представления (1). Попытки формализовать операцию векторного произведения двух векторов, как известно, в некоторой степени реализованы с использованием определителей 3-го порядка. Вычисление формального определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

дает результат векторного умножения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе (*i, j, k*).

Представление (1) позволяет определять эту операцию, столь необходимую при исследовании движения, достаточно просто:

$$\vec{a} \times \vec{b} \to A\hat{b},$$

где A – матричное представление (1) вектора $\vec{a}$.

Попутно заметим, что неассоциативная операция двойного векторного умножения при таком представлении становится ассоциативной в силу ассоциативности операции умножения матриц. То есть $\vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = CA\hat{b}$.

Не останавливаясь на доказательстве этого и приведенных ниже соответствий (все доказательства основаны на непосредственном проведении соответствующих вычислительных процедур и сравнении полученных результатов), представим возможности матричной реализации операций над векторами в виде таблицы 1.

Таблица 1 – **Матричная реализации операций над векторами**

Наименование операции	Определение операции в векторном пространстве	Матричная реализация операции
Сложение векторов	$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$	$\hat{c} = \hat{a} \pm \hat{b}$
Умножение вектора на число	$\vec{c} = \alpha\vec{a}$	$\hat{c} = \alpha\hat{a}$
Скалярное произведение двух векторов	$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$\lambda = \hat{a}^T \hat{b}$
Векторное произведение двух векторов	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$\hat{c} = A\hat{b}$
Двойное векторное произведение	$\vec{d} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$	$\hat{d} = AB\hat{c} = CA\hat{b} = BC\hat{a}$
Смешанное произведение	$\vec{d} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$	$\hat{d} = \hat{b}^T A^T \hat{c} = \hat{a}^T C^T \hat{b} = \hat{c}^T B^T \hat{a}$
Вектор-проекция вектора на ось	$\vec{a}_l = Пр_{\vec{l}}\left(\vec{a}\right) = \left(\vec{a}\vec{l}^{\,0}\right)\vec{l}^{\,0}$	$\hat{a}_l = \hat{l}^{\,0} \hat{l}^{\,0^T} \hat{a}$
Алгебраическая проекция вектора на ось	$a_l = np_l\left(\vec{a}\right) = \vec{a}\vec{l}^{\,0}$	$a_l = \hat{a}^T \hat{l}^{\,0}$

В дальнейшем, для того чтобы оставаться в рамках привычных представлений, мы будем использовать терминологию векторного пространства. То есть будем употреблять такие геометрически наглядные понятия, как радиус-вектор точки, направляющий вектор прямой, орты координатных осей и др., способствующие восприятию материала.

Как известно, абсолютно твердое тело – это система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными при любых движениях. Пусть $Ox'y'z'$ – система координат, жестко связанная с телом. Очевидно, изменение положения тела в пространстве относительно выбранной неподвижной системы отсчета (движение тела) абсолютно точно определяется изменением положения этой ($Ox'y'z'$) системы координат. Этот факт позволяет в дальнейшем говорить о преобразованиях координатной системы $Ox'y'z'$ в трехмерном (линейном) пространстве R^3. Понятие линейного преобразования (отображения) векторного пространства достаточно подробно изучается в курсе линейной алгебры. Основная цель заключается в том, чтобы перенести классические соотношения теории линейных преобразований и матричное представление векторов в традиционные разделы теоретической механики.

Выделим и определим две группы линейных преобразований, позволяющих полностью описать движение твердого тела в пространстве: параллельный перенос и поворот вокруг оси. Заметим, что преобразование в R^3 определено, если указаны матрицы $A_{3\times 3}$ и $\hat{b}_{3\times 1}$, с помощью которых устанавливается соответствие между точками пространства после преобразования (образом) и до преобразования (прообразом). Это соответствие в общем случае преобразования движения имеет вид:

$$\hat{r}' = A\hat{r} + \hat{b}.$$

1 Параллельный перенос. Параллельный перенос – это преобразование, которое оставляет неизменной начальную ориентацию подвижной системы отсчета. Операция параллельного переноса полностью определяется заданием вектора $\hat{a}$. Нетрудно убедиться в том, что радиус-вектор любой точки преобразуемого пространства изменяется в соответствии с правилом:

$$\hat{r}' = \hat{r} + \hat{a}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

2 Ориентированный поворот вокруг ориентированной прямой (оси). Такое преобразование оставляет на месте все точки выбранной оси. Остальные точки перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси, в заданном направлении. Пусть l – ось, относительно которой осуществляется поворот на заданный угол φ (рисунок 1).

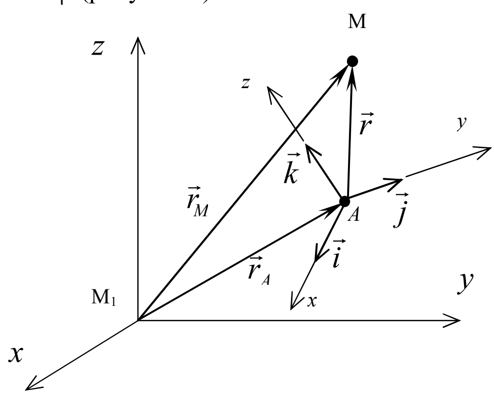

Рисунок 1 – Иллюстрация вращательного движения тела

Положение оси в пространстве с выбранной системой отсчета определено точкой M_1, через которую эта ось проходит,

$$\hat{r}_{M_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

и направляющим ортом оси

$$\hat{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы $A_{3\times 3}$ и $\hat{b}_{3\times 1}$ такие, что

$$\hat{r}' = A\hat{r} + \hat{b}.$$

Пусть C – точка пересечения оси l и плоскости, в которой перемещается точка M. Разложим вектор $\hat{r}'_M - \hat{r}_M = \Delta\hat{r} = C\hat{M}' - C\hat{M}$ по базису:

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\left|C\vec{M}\right|} C\hat{M} \quad \text{и} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\left|C\vec{M}\right|} L(C\hat{M}),$$

$$\Delta\hat{r} = \left((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi L\right)(C\hat{M}). \tag{2}$$

Здесь введена матрица

$$C\hat{M} = \left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)\left(\hat{r}_M - \hat{r}_{M_1}\right).$$

Перепишем выражение (2) в виде:

$$\Delta\hat{r} = \hat{r}_M - \hat{r}_{M'} = \left((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi \cdot L\right); \quad \left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)\cdot\left(\hat{r}_M - \hat{r}_{M_1}\right) = -B_0\hat{r}_M + B_0\hat{r}_{M_1},$$

где $B_0 = \left((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi L\right)\left(E - \hat{l}\hat{l}^T\right)$,

откуда $\hat{r}_{M'} = (E - B_0)\hat{r}_M + B_0\hat{r}_{M_1}$ или $\hat{r}_{M'} = A\hat{r}_M + B$,

где $A = E - B_0$; $B = B_0\hat{r}_{M_1}$.

Матрицы A и B однозначно определены заданием направления оси l, точки, через которую она проходит, и углом поворота φ.

Приведем выражения для матриц A и B в случае бесконечно малого поворота на угол $\Delta\varphi$, которые получаются разложением тригонометрических функций в степенной ряд. Оставляя только члены первого порядка малости, получим:

$$\hat{r}_{M'} = A\hat{r}_M + B \quad A = E + L\Delta\varphi; \; B = \Delta\varphi L r_{M_1}. \tag{3}$$

Дадим физическую интерпретацию полученным результатам. Для этого будем говорить уже не о повороте пространства, а о повороте твердого тела на бесконечно малый угол вокруг оси. Определим элементарное перемещение точки M при таком движении. С учетом соотношений (3)

$$\Delta\hat{r}_M = \Delta\varphi L(\hat{r}_M - \hat{r}_{M'}) = \Delta\varphi L(M_1\hat{M})\,. \tag{4}$$

Поделив обе части уравнения (4) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим выражение для скорости точки M твердого тела:

$$\hat{v}_M = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{r}_M}{\Delta t} = \frac{d\hat{r}_M}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}L(M_1\hat{M})\,. \tag{5}$$

Производная $\dfrac{d\varphi}{dt}$ в каждый момент времени характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела вокруг оси l. Она может принимать как положительные, так и отрицательные значения и называется алгебраической угловой скоростью твердого тела в данный момент времени.

Остановимся подробнее на величине $\dfrac{d\varphi}{dt}L$:

$$\frac{d\varphi}{dt}L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z\dot{\varphi} & l_y\dot{\varphi} \\ l_z\dot{\varphi} & 0 & -l_x\dot{\varphi} \\ -l_y\dot{\varphi} & l_x\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Этот матричный сомножитель полностью характеризует операцию вращения вокруг выбранной оси: направление оси, направление вращения, величину угловой скорости. Тензором угловой скорости назовем кососимметрический тензор Ω, определяемый матрицей (6):

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В том, что это тензор, нетрудно убедиться, записав формулы преобразования Ω при переходе к новому базису. Правила преобразования соответствуют правилам преобразования компонент тензора второго ранга, Ω также является оператором линейного преобразования. Собственный вектор этого преобразования, соответствующий нулевому собственному значению оператора Ω,

$$\hat{\omega} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

представляет собой вектор угловой скорости твердого тела.

Заметим, что если известный формализм в представлении угловой скорости твердого тела как вектора как-то физически интерпретируется, то использование кососимметрического тензора – тензора угловой скорости проводится всеми исследователями без каких-либо ссылок на возможный физический смысл. Более того, в некоторых публикациях последних лет особо подчеркивается «векторная природа» угловой скорости. Предложенные выше рассуждения позволяют сохранить физическое и математическое содержание термина «угловая скорость» (как количественной характеристики быстроты изменения угла поворота).

Таким образом,

$$\hat{v}_M = \Omega \hat{r}'_M , \tag{8}$$

где $\hat{r}'_M = M_1\hat{M}$ – радиус-вектор точки M с началом в точке M_1. При выводе формулы (8) никакими специальными свойствами точку M_1 мы не наделяли, кроме того, что она принадлежит оси вращения. Эта формула носит название формулы Эйлера и в векторной записи имеет вид

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M .$$

Рассмотрим такое движение твердого тела, при котором одна его точка остается неподвижной во все время движения. Так как все точки тела при таком движении перемещаются вдоль траекторий, расположенных на поверхностях сфер, это движение называется сферическим.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной полностью определяется заданием матрицы линейного преобразования

$$P = P(t) = \left\| \alpha_{ij}(t) \right\| . \tag{9}$$

Элементы этой матрицы – направляющие косинусы орт подвижной системы отсчета $\alpha_{ij}(t) = \cos(Ox_i \hat{;} Ox'_j)$. Можно показать, что одним из собственных значений этой матрицы является 1. Это означает, что найдется система коллинеарных собственных векторов, удовлетворяющих равенству $P\hat{l} = \hat{l}$. То есть в каждый момент времени существует мгновенная ось вращения тела.

Определим тензор угловой скорости с помощью оператора, задаваемого матрицей (9). Тогда для любого момента времени выполняются соотношения

$$\hat{r} = P(t)\hat{r}_0 ; \tag{10}$$

$$\hat{r}_0 = P^{-1}(t)\hat{r} . \tag{11}$$

Продифференцировав обе части равенства (10) по времени, с учетом зависимости (11), получим:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{P}(t)\hat{r}_0 = \dot{P}(t)P^{-1}(t)\hat{r} .$$

Сопоставление этого выражения с формулой (8), выражающей скорость точки тела при его повороте вокруг оси, дает

$$\Omega = \dot{P}(t)P^{-1}(t) . \tag{12}$$

Тензор углового ускорения ε получаем дифференцированием по времени тензора угловой скорости $\varepsilon = \dot{\Omega}$.

Преимущество матричной структуризации пространства проявляется в наибольшей степени при определении ускорений точек движущегося тела. Действительно, продифференцировав соотношение (8) по времени, получим формулу для определения ускорения точек тела, совершающего сферическое движение,

$$a_M = \dot{\hat{v}}_M = \dot{\Omega} \cdot \hat{r}_M + \Omega \dot{r}_M = (\dot{\Omega} + \Omega^2)\hat{r}_M = (\varepsilon + \Omega^2)\hat{r}_M,$$

где

$$\Omega^2 = \Omega\Omega = \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix}.$$

Формула Ривальса для определения ускорений точек свободного тела принимает компактный вид

$$\hat{a}_M = \ddot{\hat{r}}_A + (\varepsilon + \Omega^2)(A\hat{M}),$$

где $\ddot{\hat{r}}_A$ – слагаемое, определяемое параллельным переносом и равное ускорению произвольно выбранной точки A тела. Для получения этой формулы на лекции достаточно написать очевидное равенство

$$\hat{r}_M = \hat{r}_A + A\hat{M}$$

и дважды продифференцировать его.

Другие важные соотношения кинематики точки и твердого тела также легко получаются с использованием представлений о линейности оператора Ω (сложение вращений вокруг параллельных и пересекающихся осей), непосредственного дифференцирования матриц и правил преобразования матричных элементов или компонент тензора 2-го ранга при переходе к другой системе координат (кинематические уравнения Эйлера и теорема Кориолиса об определении ускорения точки при сложном движении). В частности, после разъяснения постановки задачи получение кинематических уравнений Эйлера сводится к вычислительной процедуре перемножения матриц и определения производных. Решение такой задачи было предложено студентам при чтении курса высшей математики. Ни один из этапов получения уравнений у подготовленных студентов трудностей не вызвал (студенты увереннее манипулируют с матрицами, чем с векторами).

В заключение отметим, что изложение многих вопросов динамики также существенно упрощается с использованием рассмотренных представлений.

T. A. ROSHCHEVA, E. A. MITJUSHOV
THE THEORY OF LINEAR TRANSFORMATIONS: ENGINEERING MECHANICS METHODICAL AVAILABILITY

The paper is about the descriptive method for motion of rigid body based on 3D space matrix structuring allowing to put into algorithm the search for many heterogeneous solutions in point of traditional (within vector algebra) Engineering Mechanics tasks statements and to use standard information resources for their solutions in full.

Получено 10.02.2008

ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009

УДК 531

С. І. РУСАН
Баранавіцкі дзяржаўны універсітэт, Баранавічы

НЕКАТОРЫЯ ПЫТАННІ ЯКАСНАГА АНАЛІЗУ ПЛОСКАГА РУХУ ЦЕЛА

Павышаны ў апошнія гады статус тэхнічных ВНУ ад інстытутаў да ўниверсітэтаў абавязвае агульнатэарэтычныя кафедры да паглыбленага вывучэння фундаментальных курсаў, і ў прыватнасці, — тэарэтычнай механікі. У артыкуле закранаецца адна з галоўных тэм курса — плоскапаралельны рух цела. Разглядаюцца пытанні тэрміналогіі, сутнасць кінематычных характарыстык і мадэлей плоскага руху. Паказана існаванне трох натуральных кінематычных характарыстык і адпаведных ім імгненных цэнтраў. Абмяркоўваецца магчымасць выкарыстання альтэрнатыўнай мадэлі даследавання палёў паскарэнняў. Разгледжаны на прыкладзе адпаведны ёй двухпалярны метад.

Пазітыўны досвед выкладання дысцыпліны, здабыткі ў канкрэтных пытаннях рассеяны па крупінках у педагагічным асяроддзі і натуральным спосабам назапашваюцца вельмі марудна. Таму ініцыятыву калег з Беларускага дзяржаўнага універсітэту транспарту выкарыстаць старонкі зборніка «Механіка» для павышэння канцэнтрацыі такога досведу варта прызнаць рацыянальнай і падтрымаць.

У змешчаным тут матэрыяле ўзнімаюцца асобныя пытанні методыкі выкладання і ўдасканалення зместу тэмы «Плоскапаралельны рух цела». Робіцца спроба прааналізаваць магчымасці набліжэння ў свядомасць студэнтаў абстрактных матэматычных мадэлей дысцыпліны да адпаведных ім рэальных механічных сістэм.

1 Агульныя заўвагі. На працягу многіх дзесяцігоддзяў працай некалькіх пакаленняў механікаў і матэматыкаў створаны строгі, лагічны курс вузаўскай дысцыпліны – тэарэтычнай механікі, які зараз стаў класічным. Ён арыента-