

УДК 539.3

Д. А. ЧЕРНОВС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА ЭЛАСТОМЕРОВ

Разработана новая математическая модель процесса деформирования наполненного эластомера. На основе разработанной модели получены выражения, позволяющие связать параметры упругого потенциала Муни-Ривлина с молекулярной массой эластомера и объемной долей наполнителя.

Введение. В различных отраслях машиностроения широко используются эластомерные материалы. В частности, основными материалами при изготовлении автомобильных шин являются натуральные и синтетические каучуки, дисперсно наполненные техническим углеродом [1]. Для создания эластомерных изделий с заранее заданными свойствами необходима расчетная методика, позволяющая прогнозировать механические характеристики данных материалов. При использовании известных теоретических методов описания деформирования эластомеров [2–4] не удается установить математически строгую зависимость их механических свойств от состава и параметров внутренней структуры.

С точки зрения механики деформируемого твердого тела эластомеры рассматриваются как несжимаемые нелинейно-упругие материалы. Компоненты тензора напряжений, возникающих в подобном материале при деформировании, определяются как частные производные от упругого потенциала w , равного удельной потенциальной энергии деформирования. При этом для второго тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа \mathbf{T}^\times , тензора напряжений Пиола \mathbf{P} и Коши \mathbf{T} можно записать [5]

$$\mathbf{T}^\times = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{T}^\times \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}, \quad \mathbf{T} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad (1)$$

где \mathbf{C} – тензор деформации Коши–Грина; $\overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$ – тензор-градиент вектора места.

Известно множество различных упругих потенциалов [6]. Выбор потенциала определяется химическим составом эластомера, диапазоном деформаций, скоростью нагружения и т.д. При этом критерием выбора является точность описания некоторого процесса деформирования. Подобное разнообразие подходов к анализу напряженно-деформированного состояния эластомера

ров обусловлено главным образом отсутствием строгой физической интерпретации механических свойств исследуемых материалов. Среди всего многообразия упругих потенциалов для практических расчетов наиболее оптимальными являются «простые» потенциалы, представляющие собой суммы различного числа членов ряда

$$w = \sum_{i,j} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \quad (2)$$

где $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$ – инварианты тензора деформации; λ_i – главные кратности удлинения.

Основное преимущество простого потенциала заключается в его линейности по параметрам C_{ij} . При этом существенно упрощается процесс идентификации параметров по экспериментальным данным. Регулируя количество членов ряда (2), можно обеспечить требуемую точность описания деформирования эластомера в заданном диапазоне кратностей удлинения и скоростей нагружения. Так, в работе [7] показано, что диаграммы одноосного равновесного растяжения каучуков и наполненных эластомеров в диапазоне кратности $1 < \lambda < 5$ с приемлемой точностью описываются трехпараметрическим потенциалом ($i = 1, 2; j = 1$). При этом для кратностей $1 < \lambda < 2,5$ достаточно оставить только два члена ряда ($i = 1; j = 1$). В этом случае потенциал (2) примет вид, аналогичный известному потенциалу Муни-Ривлина,

$$w = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3). \quad (3)$$

Известны работы [7–10] по установлению связи параметров простого упругого потенциала (2) со структурой и составом эластомеров, а также – с физическими процессами, протекающими в материале при деформировании. Однако полученные в этих работах зависимости основаны на эмпирических данных и носят описательный характер.

Цель настоящей работы заключается в создании математической модели, позволяющей рассчитать параметры простого упругого потенциала на основе информации о структуре и составе эластомерного композита.

Описание математической модели. Наиболее распространенная в настоящее время модель внутренней структуры эластомера представляет собой сетку, образованную сшитыми молекулярными цепями. При описании деформирования данной сетки часто используется допущение о том, что все цепи ориентированы вдоль трех главных осей материала. Данное допущение позволяет получить выражение для осевого мнимого напряжения σ при одноосном напряженном состоянии [8]:

$$\sigma = \frac{\beta}{3\lambda_m} \left[f\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right) - \lambda^{-1,5} f\left(\frac{\lambda^{-0,5}}{\lambda_m}\right) \right], \quad (4)$$

где $\beta = \frac{\rho k T}{m_k}$ – коэффициент, определяемый плотностью эластомера ρ , массой сегмента Куна m_k и абсолютной температурой T (k – постоянная Больцмана); $\lambda_m = \sqrt{n}$ – максимально допустимая кратность удлинения молекулярной цепи, образованной n сегментами Куна [3]; λ – продольная кратность удлинения эластомера при одноосном напряженном состоянии.

Функция $f\left(\frac{\lambda_f}{\lambda_m}\right)$ в выражении (4) описывает зависимость продольной силы, действующей на отдельную молекулярную цепь, от кратности удлинения данной цепи λ_f . Эта зависимость не выражается в элементарных функциях. В работе [10] приведены различные варианты аппроксимации зависимости $f(x)$. Однако известные формы записи функции $f(x)$ не позволяют сопоставить результаты использования соотношения (4) с данными, получаемыми на основе простого двухпараметрического упругого потенциала (3). При использовании потенциала (3) зависимость осевого мнимого напряжения σ от продольной кратности λ примет вид:

$$\sigma = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (5)$$

Для того чтобы привести к подобному виду зависимость (4), выберем функцию $f(x)$ следующей: $f(x) = 3x - rx^{-3}$. Коэффициент r определим из условия равенства нулю продольной силы в недеформированной цепи ($\lambda_f = 1$). Тогда

$$f(x) = 3\left(x - \lambda_m^{-4} x^{-3}\right). \quad (6)$$

Подставив функцию (6) в выражение (4), для осевого напряжения получим

$$\sigma = \frac{\beta}{\lambda_m^2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} + 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (7)$$

Сопоставив функции (5) и (7), получим выражения для параметров потенциала Муни-Ривлина:

$$C_1 = C_2 = \frac{\beta}{2\lambda_m^2} = \frac{\rho k T}{2m_k n} = \frac{\rho R T}{2M}, \quad (8)$$

где R – универсальная газовая постоянная; M – среднemasсовая относительная молекулярная масса эластомера.

При выводе соотношений (8) не учитывается процесс разрыва физических сшивок полимерной сетки при деформировании или нагреве эластомера [9].

В наполненных эластомерах наряду с высокоэластичной полимерной сеткой присутствуют дисперсные частицы наполнителя, которые с достаточной степенью точности могут рассматриваться как абсолютно твердые тела. Для описания одноосного напряженного состояния данного композита используем подход, изложенный в работе [11]. При этом зависимость осевого напряжения от продольной кратности удлинения можно выразить функцией

$$\sigma = (1 - d^2) \sigma^{\text{эл}}(\lambda) + d^2 \sigma^{\text{эл}}(\lambda_m), \quad (9)$$

где $d = \left(\frac{\varphi}{0,605} \right)^{1/3}$ – коэффициент, определяемый объемной долей наполнителя φ ; $\lambda_m = \frac{\lambda^2 - d}{\lambda - d}$ – кратность удлинения молекулярных цепей, связанных с частицей наполнителя.

Функция $\sigma^{\text{эл}}(\lambda)$ описывает зависимость осевого мнимого напряжения от кратности удлинения для ненаполненного «чистого» эластомера. Данная функция задается уравнением (7). Аппроксимируем зависимость (9) функцией (5). При этом необходимо определить параметры C_1 и C_2 упругого потенциала Муни-Ривлина для наполненного эластомера. Для вычисления параметров C_1 и C_2 сопоставим значения дифференциального модуля упругости, определенные при использовании потенциала Муни-Ривлина и выражения (9). Дифференциальным модулем [6] называют величину, равную производной от мнимого осевого напряжения по кратности удлинения $E(\lambda) = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}$. Если напряжение σ определяется функцией (5), то для дифференциального модуля получим

$$E(\lambda) = 2C_1 \left(1 + \frac{2}{\lambda^3} \right) + \frac{6C_2}{\lambda^4}. \quad (10)$$

При использовании функций (9) и (7) дифференциальный модуль определяется следующим образом:

$$E(\lambda) = (1 - d^2) E^{\text{эл}}(\lambda) + d^2 E^{\text{эл}}(\lambda_m) \frac{\lambda^2 - 2\lambda d + d}{(\lambda - d)^2}. \quad (11)$$

Здесь для краткости записи введена функция

$$E^{\text{эл}}(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{2}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^4} \right).$$

Параметры C_1 и C_2 будем определять из условия совпадения значений дифференциального модуля, определенных по формулам (10) и (11), при $\lambda = 1$ и $\lambda \rightarrow \infty$:

$$E(1) = 6(C_1 + C_2) = 6 \frac{\beta}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{d^3}{1-d} \right); \quad E(\infty) = 2C_1 = \frac{\beta}{\lambda_m^2}.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{\beta}{2\lambda_m^2} = \frac{\rho RT}{2M}; \quad C_2 = \frac{\beta}{\lambda_m^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{d^3}{1-d} \right) = \frac{\rho RT}{M} \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi^{1/3}}{0,846 - \varphi^{1/3}} \right). \quad (12)$$

Таким образом, получены выражения, позволяющие вычислить параметры упругого потенциала Муни-Ривлина при заданной температуре T , плотности чистого эластомера ρ , его молекулярной массе M и объемной доле наполнителя φ .

Оценка адекватности математической модели. Для апробации разработанной математической модели сопоставим результаты использования функции (5) при значениях параметров, вычисленных согласно выражениям (12), с экспериментальной диаграммой одноосного растяжения образца наполненного эластомера. В качестве объекта исследования рассмотрим резиновую смесь, образующую протектор легковой автомобильной шины производства ОАО «Белшина». Экспериментальная зависимость $\sigma(\lambda)$, представленная на рисунке, построена по результатам испытания 10 образцов. Образцы имели форму лопаток с длиной рабочей части 35 мм и площадью поперечного сечения 11,03 мм². Растяжение осуществлялось на испытательной машине INSTRON 5567 со скоростью 100 мм/мин. Расчетная зависимость $\sigma(\lambda)$ построена по уравнениям (5) и (12) при следующих исходных данных: $T = 293 \text{ K}$; $\rho = 980 \text{ кг/м}^3$; $M = 12,25 \text{ кг/моль}$; $\varphi = 0,33$.

На рисунке представлено сопоставление расчетной и экспериментальной диаграмм растяжения.

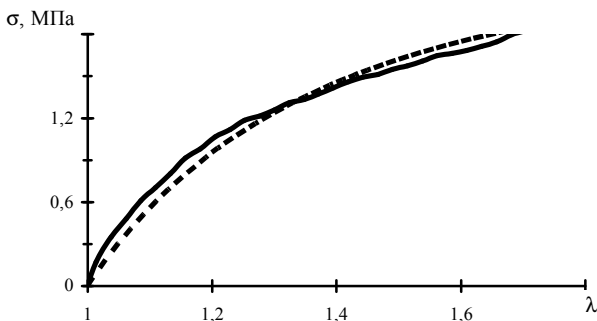


Рисунок — Диаграмма растяжения протекторной резины.

Сплошная кривая — экспериментальные данные,
пунктирная — использование уравнений (5) и (12)

Для оценки степени адекватности математической модели определим среднеквадратичное отклонение расчетных оценок осевого напряжения $\sigma^{\text{теор}}(\lambda)$ от экспериментальных значений $\sigma^{\text{экс}}$:

$$\Delta = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma^{\text{теор}}(\lambda_i) - \sigma_i^{\text{экс}})^2 \right]^{1/2}.$$

Здесь $N = 30$ – количество точек на диаграмме растяжения, в которых производится сопоставление теоретических и экспериментальных результатов. Для зависимостей, представленных на рисунке, отклонение Δ составляет 0,08 МПа. Учитывая, что усредненная по N экспериментальным точкам статистическая среднеквадратичная погрешность измерения осевого мнимого напряжения составляет $\Delta^{\text{экс}} = 0,15$ МПа ($\Delta < \Delta^{\text{экс}}$), можно сделать вывод о правомерности использования разработанной математической модели для описания деформирования резиновых смесей в диапазоне кратностей удлинения $1 < \lambda < 1,7$. При $\lambda > 1,7$ происходит ужесточение эластомера, которое не описывается двухпараметрическим потенциалом [7].

Заключение. Установлено, что в случае пренебрежения разрывом части физических сшивок при деформировании высокоэластичной полимерной сетки параметры упругого потенциала Муни-Ривлина ненаполненного эластомера одинаковы и однозначно определяются абсолютной температурой, молекулярной массой и плотностью исследуемого материала. Дисперсное наполнение эластомера частицами жесткого материала не оказывает влияния на первый параметр потенциала Муни-Ривлина. При этом зависимость второго параметра от объемной доли наполнителя аналогична соответствующей зависимости начального ($\lambda = 1$) модуля упругости. Использование рассчитанных в соответствии с разработанной моделью параметров упругого потенциала позволяет адекватно описать экспериментальную диаграмму растяжения образцов резиновых смесей в диапазоне кратности удлинения $1 < \lambda < 1,7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Автомобильные шины: задачи механики и трибологии / С. В. Шилько [и др.] // ПОЛИКОМТРИБ-2005 : тезисы докладов междунар. науч.-техн. конференции – Гомель : ИММС НАН Б, 2005. – С. 128–130.

2 **Тобольский, А. В.** Структура и свойства полимеров / А. В. Тобольский. – М. : Химия, 1964. – 322 с.

3 **Займан, Дж.** Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем / Дж. Займан. – М. : Мир, 1982. – 592 с.

4 **Черноус, Д. А.** Мезомеханическая модель ненаполненного эластомера / Д. А. Черноус, С. В. Шилько // Материалы, технологии, инструменты. – 2008. – Т. 13. – № 3. – С. 31–34.

- 5 Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- 6 Гамлицкий, Ю. А. Упругий потенциал наполненных резин / Ю. А. Гамлицкий, В. И. Мудрук, М. В. Швачич // Каучук и резина. – 2002. – № 3. – С. 29–39.
- 7 Галушко, А. Г. Корреляция параметров простого упругого потенциала эластомера со структурой сетки и составом резин / А. Г. Галушко, М. Е. Соловьев // Каучук и резина. – 1998. – № 6. – С. 16–19.
- 8 Гаришин, О. К. Исследование структурных напряжений в дисперсно-наполненных эластомерных нанокомпозитах / О. К. Гаришин, С. Н. Лебедев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12. – № 3. – С. 289–299.
- 9 Соловьев, М. Е. Локальная динамика и вязкоупругие свойства вулканизатов бутадиен-нитрильных каучуков / М. Е. Соловьев, О. Ю. Соловьева, А. В. Гопцев // Каучук и резина. – 2005. – № 3. – С. 11–15.
- 10 Свистков, А. Л. Полуэмпирический потенциал свободной энергии полимерной сетки, учитывающий конечность длин полимерных цепей / А. Л. Свистков, Л. А. Свисткова // Высокомолекулярные соединения. Серия А. – 1998. – Т. 40. – № 5. – С. 835–840.
- 11 Шилько, С. В. Особенности деформирования и описание упругих свойств наполненных эластомеров при растяжении / С. В. Шилько, Д. А. Черноус, С. Б. Анфиногенов // Каучук и резина. – 2008. – № 4. – С. 34–38.

D. A. CHERNOUS

PROGNOSTIFICATION OF ELASTIC POTENTIAL PARAMETERS FOR ELASTOMERS

A new mathematical model for filled elastomer deformation process has been developed. On the basis of the developed model the expressions allowing to unite Mooney-Rivlin elastic potential parameters and the molecular weight of an elastomer and a filler volume fraction have been received.

Получено 22.09.2008

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

УДК 539.3

Ф. Г. ШИГАБУТДИНОВ, Р. З. МУРТАЗИН, Р. Ф. МУХУТДИНОВ
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Работа посвящена исследованию форм поперечных движений изотропной цилиндрической оболочки с нерегулярной формой поперечного сечения при ударе абсолютно твердым телом. Приняты дифференциальные уравнения движения тонкой цилиндри-