

A. A. TSERENJA, Yu. A. GRIBKOV

TARGET DEVICE

This article describes the practical theory application of the so-called inverted pendulum. This theory has been adapted and implemented by the authors in the patent for invention and in the actual design of a unique target device.

Получено 23.03.2009

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

УДК 539.374:534.11

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Решена задача о продольных установившихся вынужденных колебаниях линейно вязкоупругого стержня. При этом механические свойства материала стержня характеризовались тремя параметрами: мгновенным и длительным модулями Юнга, временем релаксации. Получены аналитические зависимости амплитуды колебаний и фазового сдвига между смещением и силой от частоты вынуждающей силы. Проведено сопоставление полученных зависимостей с результатами использования упрощенных расчетных методов.

Введение Широкое использование полимерных материалов в различных отраслях строительства и транспортного машиностроения приводит к необходимости совершенствования традиционных методик расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. В рамках данных методик должны учитываться уникальные механические свойства материалов высокомолекулярной природы. В частности, для полимерных материалов характерны ярко выраженные процессы релаксации и ползучести. Пренебрежение данными процессами не позволяет адекватно прогнозировать деформационно-прочностные параметры изделий из полимерных материалов. Большинство подобных изделий функционируют в условиях циклического или ударного нагружения. Поэтому при описании их напряженно-деформированного состояния необходимо решать задачу динамики деформируемого твердого тела с учетом реономных [1, 2] свойств материала.

Решению задач о динамическом нагружении вязкоупругих тел посвящено множество публикаций [3–6]. Однако известные методы решения подразумевают использование сложного математического аппарата. При этом результаты расчетов представляются в виде сходящихся рядов, слагаемые в которых

содержат специальные функции (функции Бесселя или Хевисайда). Кроме того, метод последовательных приближений, предложенный в работах [4–6], требует трудоемких вычислений и может быть реализован только при соблюдении дополнительных условий, накладываемых на вязкоупругие характеристики материала.

Вместе с тем, в некоторых частных случаях решение задачи о динамическом нагружении вязкоупругого тела может быть представлено в элементарных функциях. Подобное представление позволяет упростить процесс расчетов и оценить погрешность различных приближенных методик. Как будет показано в дальнейшем, одним из таких частных случаев, допускающих представление решения в элементарных функциях, является задача об установившихся вынужденных продольных колебаниях линейно-вязкоупругого стержня. Таким образом, цель настоящей работы – аналитическое решение задачи о вынужденных продольных колебаниях стержня, образованного полимерным вязкоупругим материалом.

Решение уравнения вынужденных колебаний. В качестве примера динамического нагружения элементов конструкций из полимерных материалов рассмотрим вынужденные продольные колебания вязкоупругого стержня. Стержень длиной L и площадью поперечного сечения S жестко закреплен одним концом (рисунок 1, *a*). К свободному концу стержня приложена вынуждающая сила $F(t)$.

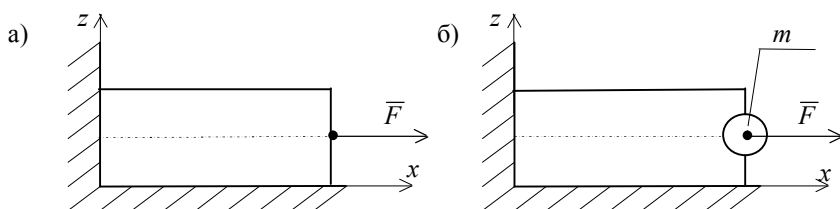


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня (*a*) и аналогия с сосредоточенной массой (*б*)

Один из наиболее распространенных способов описания вязкоупругого деформирования полимерных материалов подразумевает использование трех механических характеристик: мгновенный модуль Юнга E ; длительный модуль Юнга H ; время релаксации τ [1, 2, 7, 8]. При этом связь осевого напряжения σ с продольной деформацией ϵ в условиях одноосного напряженного состояния определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E \dot{\epsilon} + \frac{H}{\tau} \epsilon. \quad (1)$$

Здесь и далее точкой над символом обозначена производная по времени от соответствующей величины.

При анализе продольных колебаний стержня можно принять, что все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma_{xx} = \sigma$ равны нулю. Координата x отсчи-

тывается вдоль стержня (рисунок 1). Тогда уравнение движения деформируемого стержня примет вид:

$$\sigma' = \rho \ddot{u}.$$

Здесь ρ – плотность материала стержня; u – продольное упругое смещение точек стержня. Штрихом у символа обозначена производная по координате x от соответствующей величины. Рассматривая малые смещения и деформации, продольную деформацию стержня ϵ определим как производную по x от продольного смещения $\epsilon = u'$. Используя уравнение движения деформируемого стержня и определения продольной деформации, равенство (1) можно переписать в виде дифференциального уравнения в частных производных для смещения u

$$\rho \ddot{u} + \frac{\rho}{\tau} \dot{u} = E \dot{u}' + \frac{H}{\tau} u'. \quad (2)$$

Граничные условия для смещения u определяются характером закрепления стержня. В рамках настоящей работы рассматриваются вынужденные колебания стержня, жестко закрепленного при $x = 0$. То есть $u(0, t) = 0$. На другом конце стержня $x = L$ действует гармонически изменяющаяся вынуждающая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Здесь F_0 , ω — амплитуда и частота вынуждающей силы соответственно. В соответствии с равенством (1), смещение u при $x = L$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{F_0}{S} \left(\omega \cos \omega t + \frac{1}{\tau} \sin \omega t \right) = E \dot{u}' + \frac{H}{\tau} u'. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде $u(x, t) = C e^{\alpha x} e^{\beta t}$. Подставим данное выражение в уравнение (2), для параметров α и β получим:

$$\rho \beta^3 + \frac{\rho}{\tau} \beta^2 = E \alpha^2 \beta + \frac{H}{\tau} \alpha^2. \quad (4)$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию (3), параметр β должен принимать значения $\beta_1 = i\omega$, $\beta_2 = -i\omega$. Подставляя поочередно β_1 и β_2 в уравнение (4), получим соответствующие значения параметра α : $\alpha_1 = \pm(\eta + i\gamma)$, $\alpha_2 = \pm(-\eta + i\gamma)$. Здесь введены обозначения:

$$\eta = \frac{\omega^2 \tau \sqrt{\rho} (E - H)}{\sqrt{2(E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2) \left(E \omega^2 \tau^2 + H + \sqrt{(1 + \omega^2 \tau^2)(E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2)} \right)}}, \quad (5)$$

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2} \left(\frac{E \omega^2 \tau^2 + H}{E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2} + \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2}} \right)}.$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$u(x, t) = (C_1 e^{(\eta+i\gamma)x} + C_2 e^{-(\eta+i\gamma)x}) e^{i\omega t} + (C_3 e^{(-\eta+i\gamma)x} + C_4 e^{-(\eta+i\gamma)x}) e^{-i\omega t}.$$

Разделим в последнем выражении действительную и мнимую части. Тогда искомое решение, удовлетворяющее граничному условию $u(0, t) = 0$, можно записать следующим образом

$$u(x, t) = \sin \omega t [D_1 (e^{\eta x} + e^{-\eta x}) \sin \gamma x + D_2 (e^{\eta x} - e^{-\eta x}) \cos \gamma x] + \cos \omega t [D_2 (e^{\eta x} + e^{-\eta x}) \sin \gamma x - D_1 (e^{\eta x} - e^{-\eta x}) \cos \gamma x]. \quad (6)$$

Константы D_1 и D_2 определяются из граничного условия при $x = L$. Подставив функцию (6) при $x = L$ в уравнение (3), получим:

$$D_1 = \frac{G_1 Z_1 - G_2 Z_2}{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad D_2 = \frac{G_1 Z_2 + G_2 Z_1}{Z_1^2 + Z_2^2}. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \gamma (e^{\eta L} + e^{-\eta L}) \cos \gamma L + \eta (e^{\eta L} - e^{-\eta L}) \sin \gamma L, \\ Z_2 &= -\gamma (e^{\eta L} - e^{-\eta L}) \sin \gamma L + \eta (e^{\eta L} + e^{-\eta L}) \cos \gamma L, \\ G_1 &= \frac{F_0 (E \omega^2 \tau^2 + H)}{S (E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2)}, \quad G_2 = \frac{F_0 \omega \tau (H - E)}{S (E^2 \omega^2 \tau^2 + H^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, функция (6) с учетом (7), (8) и (5) является решением уравнения вынужденных колебаний вязкоупругого стержня.

Анализ полученных результатов. Используем полученное решение для расчета продольного смещения точки приложения вынуждающей силы. В соответствии с функцией (6) смещение $u_L(t) = u(L, t)$ изменяется со временем по гармоническому закону

$$u_L(t) = u_L^{\max} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний u_L^{\max} и фазовый сдвиг φ определяются соотношениями:

$$u_L^{\max} = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}, \quad \varphi = -\arctg \frac{Y_2}{Y_1}. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} Y_1 &= D_1 (e^{\eta L} + e^{-\eta L}) \sin \gamma L + D_2 (e^{\eta L} - e^{-\eta L}) \cos \gamma L, \\ Y_2 &= D_2 (e^{\eta L} + e^{-\eta L}) \sin \gamma L - D_1 (e^{\eta L} - e^{-\eta L}) \cos \gamma L. \end{aligned} \quad (11)$$

Величины D_1 и D_2 определяются соотношениями (7) с учетом (8) и (5). Используя выражение (10), можно построить амплитудно-частотную характеристику рассматриваемого вязкоупругого стержня.

В работах [3, 9] показано, что при анализе колебаний упругих тел возможен переход от тела с заданной плотностью ρ к системе с сосредоточенными массами и деформируемыми безмассовыми элементами. При использовании данной аналогии значения эквивалентных масс определяются не только массами упругих тел, но и граничными условиями. Сосредоточим всю массу рассматриваемого стержня в точке приложения вынуждающей силы (см. рисунок 1, б). Значение m выберем таким, чтобы частота собственных продольных упругих колебаний системы на рисунке 1, б совпала с минимальной (соответствующей первому волновому числу) частотой собственных колебаний стержня на рисунке 1, а. При этом $m = \frac{4}{\pi^2} \rho LS$. Динамическое уравнение движения груза массой m имеет вид

$$m\ddot{u}_L = F - \sigma_L S. \quad (12)$$

Здесь σ_L — осевое напряжение в стержне при $x = L$. При пренебрежении плотностью материала стержня зависимость продольных смещений от координаты x будет линейной. Значит $u_L(t) = L\varepsilon(t)$. Подставив данное выражение и уравнение (12) в равенство (1), для продольного смещения точки приложения силы получим функцию аналогичную (9). Но при этом амплитуда колебаний и фазовый сдвиг будут определяться соотношениями:

$$u_L^{\max} = \frac{F_0}{S} L \sqrt{\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{(H - \mu \omega^2)^2 + \tau^2 \omega^2 (E - \mu \omega^2)^2}}, \quad (13)$$

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\omega \tau (E - H)}{(H - \mu \omega^2) + \tau^2 \omega^2 (E - \mu \omega^2)} \right].$$

Здесь введен параметр $\mu = m \frac{L}{S} = \rho \left(\frac{2}{\pi} L \right)^2$.

Если при анализе деформирования стержня пренебречь плотностью материала, то выражения (13) примут вид:

$$u_L^{\max} = \frac{F_0}{S} L \sqrt{\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{H^2 + \tau^2 \omega^2 E^2}}, \quad \varphi = \arctg \left[\frac{\omega \tau (E - H)}{H + \tau^2 \omega^2 E} \right]. \quad (14)$$

Использование аналогии с сосредоточенной массой (см. рисунок 1, б) приводит к дополнительной погрешности результатов расчета механических параметров исследуемой системы. Для того чтобы оценить данную погрешность, сопоставим результаты использования соотношений (10), (13) и (14). В качестве расчетного примера рассмотрим стержень длиной $L = 0,3$ м и площадью поперечного сечения $S = 50$ мм². Стержень образован технической резиной, которая используется при изготовлении протектора автомобильных шин [10]. Вязкоупругие свойства данного материала приведены в работе [10]:

$E = 20,7$ МПа; $H = 7,25$ МПа; $\tau = 0,5$ мс; $\rho = 1100$ кг/м³. На стержень действует гармоническая вынуждающая сила с амплитудой $F_0 = 50$ Н.

На рисунке 2 представлены амплитудно-частотные характеристики стержня, полученные с использованием соотношений (10), (13) и (14). Расчетные оценки амплитуды вынужденных колебаний, полученные на основе соотношений (14), не могут быть признаны адекватными. При использовании соотношений (10) и (13) на амплитудно-частотной характеристике наблюдается ярко выраженный максимум при частоте ω_r . Величину ω_r в дальнейшем будем называть резонансной частотой. Предложенная методика расчета эквивалентной массы m обеспечивает практически точное совпадение значений резонансной частоты, вычисленных на основе точного решения задачи и на основе аналогии с сосредоточенной массой. Однако расчетная оценка амплитуды u_L^{\max} , полученная по формулам (13), оказывается существенно выше соответствующего значения, определенного по формулам (10). В результате расчетов было показано, что относительное отклонение амплитуды вынужденных колебаний груза массой m (см. рисунок 1, б) от значения u_L^{\max} , полученного в результате точного решения поставленной задачи (см. рисунок 1, а), составляет 21 % и практически не зависит от свойств материала стержня.

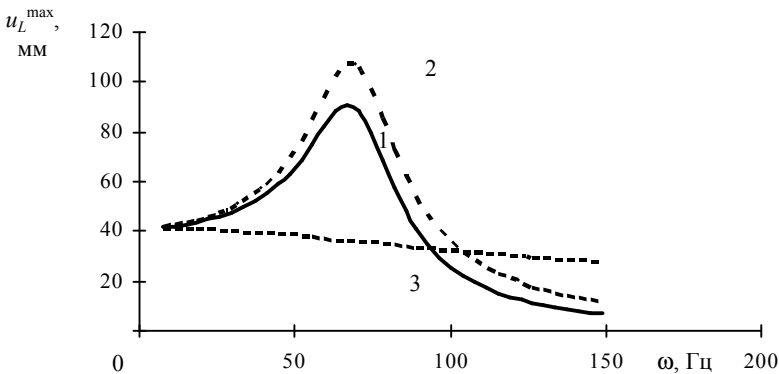


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика вязкоупругого стержня: 1 – результаты использования выражения (10); 2 – выражения (13); 3 – выражения (14)

Анализ частотной зависимости фазового сдвига ϕ (рисунок 3) также свидетельствует о неприемлемости пренебрежения плотностью материала рассматриваемого стержня при расчетах. Соотношения (13) позволяют получить приемлемую расчетную оценку фазового сдвига при частотах $\omega < 1,2\omega_r$. При дальнейшем увеличении частоты вынуждающей силы значение угла ϕ , полученное на основе точного решения задачи, оказывается ниже соответствующего значения, полученного на основе соотношений (13).

Заключение. Показано, что решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях вязкоупругого стержня может быть представлено в элементарных функциях. Установлено, что при использовании аналогии с сосредоточенной массой расчетные оценки амплитуды вынужденных колебаний на 21 % выше соответствующих значений, полученных на основе точного решения динамической задачи механики деформируемого тела.

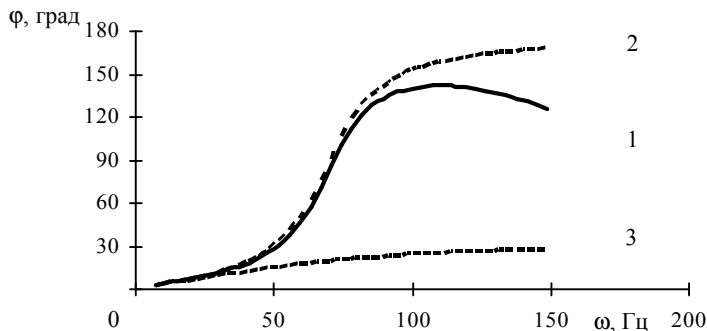


Рисунок 3 – Зависимость фазового сдвига φ от частоты вынуждающей силы для вязкоупругого стержня. Обозначения те же, что и на рисунке 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Ferry, J. D.** Viscoelastic properties of polymers / J. D. Ferry. – New York-London, 1961. – 530 p.
- 2 **Малмейстер, А. К.** Сопротивление жестких полимерных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
- 3 **Воробьев, С. А.** Сопротивление материалов. Прикладная теория колебаний / С. А. Воробьев. – Гомель: БелГУТ, 2008. – 257 с.
- 4 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э.И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель; БелГУТ, 2003. – 367 с.
- 5 **Громов, В. Г.** Динамический критерий устойчивости и закритическое поведение гибких вязкоупругих тел при термосиловом нагружении / В. Г. Громов // ДАН СССР. – 1975. – № 4. – С. 805–808.
- 6 **Громов, В. Г.** Расчет критических параметров устойчивости и закритического режима вязко-упругих стержней при термосиловом нагружении / В. Г. Громов, Г. Н. Раецкий // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14. – № 7. – С. 97–103.
- 7 Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов [и др.]. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 416 с.
- 8 **Захариев, Г.** О реологической модели полимеров и стеклопластиков / Г. Захариев, Л. Хаджиков, П. Маринов // Механика полимеров. – 1971. – № 5. – С. 851–857.
- 9 **Ржаницын, А. Р.** Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.

10 Взаимодействие в системе «пневматическое колесо – рельс» транспортного средства на комбинированном ходу / В. А. Довгяло [и др.] // Трение и износ. – 2008. – Т. 29. – № 6. – С. 604–612.

D. A. CHERNOUS

FORCED LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC ROD

The problem of the forced longitudinal vibrations of a linear viscoelastic rod has been solved. The mechanical properties of the rod material were characterized by three parameters: the instantaneous and long-term Young moduli, relaxation time. The analytical vibration amplitude and displacement-force phase shift – frequency of driving force dependence has been received. The comparison of the dependences obtained with the results of simplified calculation methods has been carried out.

Получено 19.10.2009

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

УДК 621.983.5:539.388.24

О. И. ЯКУБОВИЧ, А. О. ШИМАНОВСКИЙ, А. В. ПУТЯТО
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
А. И. КЕБИКОВ
ОАО «САТУРН-1», Житковичи, Беларусь

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ХОЛОДНОЙ ШТАМПОВКИ КРЫШКИ ЛЮКА ПОЛУВАГОНА

Разработана компьютерная конечноэлементная модель технологического процесса холодной штамповки крышки люка полувагона. Получены распределения эквивалентных напряжений в заготовке и инструменте на различных стадиях процесса. Установлена зависимость глубины внедрения штампа от силы, реализуемой при прессовании. Определены значения минимальной силы, необходимой для формовки изделия, при различных значениях предела текучести материала заготовки.

Методы расчета сил, необходимых для деформирования заготовки в условиях холодной штамповки выдавливанием, разработанные на основе теории пластичности, не всегда позволяют учитывать наиболее важные факторы. Поэтому при разработке технологических процессов холодной штамповки выдавливанием часто используют результаты и рекомендации, полученные при экспериментальных исследованиях и накопленные производственной практикой.

Особенность холодной штамповки выдавливанием – необходимость создания для деформирования заготовки высоких удельных сил, превышающих в некоторых случаях в 4 раза напряжения текучести обрабатываемого материала [1]. В связи с этим актуальной является задача по нахождению минималь-