

УДК 512.774.42

Е. А. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА

Уральский государственный технический университет, Екатеринбург, Россия

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАЗВЕРТЫВАНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе предложен алгоритм разворачивания гладких поверхностей, основанный на применении матрицы поворота относительно движущейся в трехмерном пространстве оси.

Линейчатыми называются поверхности, образуемые совокупностью прямых, зависящих от одного параметра [1]. Линейчатую поверхность можно получить движением прямой (образующей) по некоторой линии (направляющей). Примерами линейчатых поверхностей, в частности, являются цилиндры и конусы. Линейчатые поверхности подразделяются на разворачиваемые и косые. Разворачиваемые линейчатые поверхности могут быть посредством изгибания наложены на плоскость без складок и разрывов. Они характеризуются тем, что касательная плоскость в различных точках образующих в каждом ее положении неизменна. Как известно, любая разворачиваемая поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью, образованной касательными к некоторой пространственной кривой (торсовой поверхностью). Математически это означает, что разворачиваемая поверхность изометрична плоскости. Известно, что линейчатая поверхность тогда и только тогда является разворачиваемой, когда ее полная (гауссова) кривизна равна нулю [2]. Это эквивалентно условию

$$LN - M^2 = 0, \quad (1)$$

где L , M и N – коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности.

Благодаря наличию прямолинейной образующей линейчатые поверхности находят широкое применение в технических приложениях. В частности, в строительном производстве это свойство линейчатой поверхности позволяет создавать различные пространственные конструкции причудливых форм с использованием только прямолинейных несущих элементов. Откосы насыпей автомобильных и железных дорог также образуют линейчатые поверхности. Многие корпусные детали и оболочечные конструкции из листовых материалов состоят из фрагментов разворачивающихся линейчатых поверхностей.

Пусть задан кусок гладкой пространственной кривой

$$\hat{r} = \hat{r}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq u^*.$$

Запишем общее уравнение линейчатой поверхности в виде

$$\hat{r}(u, v) = \hat{r}(u) + v\hat{l}(u), \quad (2)$$

где $\hat{l}(u)$ – единичные векторы образующих линейчатой поверхности.

Полагаем, что коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности (2) удовлетворяют условию (1), т. е. заданная линейчатая поверхность – разворачивающаяся. Рассмотрим задачу о нахождении кривой, в которую преобразуется заданная направляющая кривая $\hat{r} = \hat{r}(u)$ при разворачивании поверхности.

Как было показано в работе [3], преобразование конечного поворота трехмерного пространства на угол φ вокруг оси, заданной единичным вектором \hat{l} и проходящей через точку M_1 с радиус-вектором \hat{r}_1 , может быть записано следующим образом:

$$\Delta\hat{r} = \hat{r}' - \hat{r} = ((\cos\varphi - 1)E + \sin\varphi \cdot L)(E - \hat{l}\hat{l}^T) \cdot (\hat{r} - \hat{r}_1)$$

(здесь $L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}$ – матричная запись вектора \hat{l}).

Это преобразование с учетом равенств $L\hat{l}\hat{l}^T = 0$ и $(\hat{l}\hat{l}^T - E) = L^2$ может быть представлено также в виде

$$\Delta\hat{r} = ((1 - \cos\varphi)L^2 + \sin\varphi L)(\hat{r} - \hat{r}_1).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости в разложении тригонометрических функций в ряд Тейлора в случае малых углов поворота $\Delta\varphi$, находим

$$\Delta\hat{r} = L(\hat{r} - \hat{r}_1)\Delta\varphi. \quad (3)$$

Воспользуемся этой формулой для получения образа произвольной точки направляющей кривой при разворачивании поверхности. Для этого разобьем кривую $\hat{r} = \hat{r}(u)$ на n частей и заменим ее ломаной. Представим алгоритм разворачивания этой ломаной линии последовательностью поворотов вокруг осей, заданных единичными векторами $\hat{l}(u_1), \hat{l}(u_2), \dots, \hat{l}(u_{n-1})$, проходящих через точки разбиения M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на углы $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_{m-1}$ (рисунок 1), образованные нормальными к образовавшимся граням поверхности.

Для любой точки $M(u)$ ломаной, принадлежащей интервалу $[\hat{r}(u_i), \hat{r}(u_{i+1})]$, указанная процедура в соответствии с равенством (3) может быть представлена системой уравнений:

$$\begin{aligned}
\hat{r}^{(i+1)}(u) - \hat{r}(u) &= L(u_{i+1})(\hat{r}(u) - \hat{r}(u_{i+1}))\Delta\varphi_{i+1}; \\
\hat{r}^{(i+2)}(u) - \hat{r}^{(1)}(u) &= L(u_{i+2})(\hat{r}^{(1)}(u) - \hat{r}(u_{i+2}))\Delta\varphi_{i+2}; \\
&\dots\dots\dots \\
\hat{r}^{(n-1)}(u) - \hat{r}^{(n-2-i)}(u) &= L(u_{n-1})(\hat{r}^{(n-2)}(u) - \hat{r}(u_{n-1}))\Delta\varphi_{n-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

где верхний индекс в записи радиус-вектора $\hat{r}^{(j)}(u)$ соответствует номеру шага процедуры (заметим, что с первого по i -й шаг преобразование оставляет рассматриваемую точку на месте).

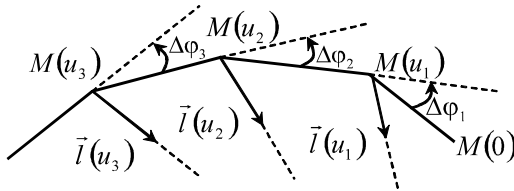


Рисунок 1 – Схема разворачивания поверхности

При таком преобразовании точка движется в пространстве, описывая ломаную пространственную кривую. Для аппроксимации ломаной траектории точки гладкой кривой введем в рассмотрение параметр t ($u \leq t \leq u^*$), определяющий накопленный поворот разворачивающейся поверхности. Тогда от системы (4), описывающей дискретное преобразование, можем перейти к уравнению, описывающему непрерывный процесс:

$$\Delta\hat{r}(u, t) = L(t)(\hat{r}(u, t) - \hat{r}(t))\Delta\varphi(t).$$

Поделив обе части этого уравнения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение кривой – траектории точки $\hat{r}(u)$ в процессе разворачивания поверхности:

$$\frac{d\hat{r}(u, t)}{dt} = L(t)(\hat{r}(u, t) - \hat{r}(t))\varphi'(t)$$

или

$$\frac{d\hat{r}(u, t)}{dt} - L(t)\hat{r}(u, t) = -L(t)\hat{r}(t)\varphi'(t); \quad u \leq t \leq u^*. \tag{5}$$

Проиллюстрируем алгоритм разворачивания кривой на наглядном примере окружности – на цилиндре с образующей, параллельной оси Oz (рисунок 2).

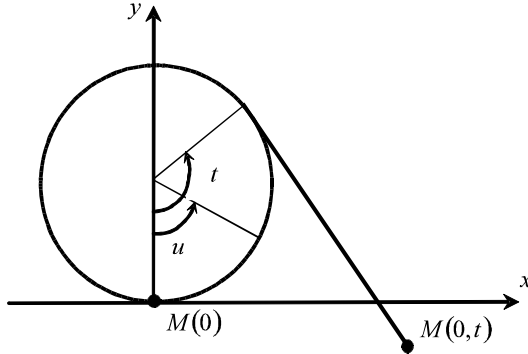


Рисунок 2 – Пример разворачивания кривой на цилиндре с образующей

Пусть окружность задана уравнением

$$\hat{r}(u) = \begin{pmatrix} \sin u \\ 1 - \cos u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{const}, \varphi = t, \hat{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Записывая уравнение (5) для плоского случая, получим:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(u, t) \\ y(u, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u, t) \\ y(u, t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 1 - \cos t \\ \frac{dy}{dt} - x = -\sin t \end{cases} \quad u \leq t \leq 2\pi.$$

Решив полученную систему уравнений при краевых условиях:

$$\begin{aligned} x|_{t=u} &= \sin u; \\ y|_{t=u} &= 1 - \cos u, \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} x &= \sin t - (t - u) \cos t; \\ y &= 1 - \cos t - (t - u) \sin t; \quad u \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения кривой в промежуточном состоянии ее разворачивания, определяемого параметром t ($0 \leq t \leq 2\pi$), имеют вид:

$$x(u) = \begin{cases} \sin u, & u \geq t \\ \sin t - (t-u)\cos t, & u \leq t \end{cases}$$
$$y(u) = \begin{cases} 1 - \cos u, & u \geq t \\ 1 - \cos t - (t-u)\sin t, & u \leq t. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Математический энциклопедический словарь** / гл. ред. Ю. В. Прохоров; ред. кол. С. И. Адян [и др.]. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

2 **Постников, М. М.** Линейная алгебра и дифференциальная геометрия / М. М. Постников. – М.: Наука, 1979. – 312 с.

3 **Рощева, Т. А.** Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2009. – Вып. 3. – С. 197–204.

E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA

KINEMATIC ALGORITHM FOR RULED SURFACE DEPLOYMENT

This paper introduces the algorithm for smooth surface deployment. It is based on the application of the rotation matrix relative to the moving axis in the three-dimensional space.

Получено 17.09.2009

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

УДК 531.32

E. A. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА

Уральский государственный технический университет, Екатеринбург

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрены возможность построения ограниченной поверхности, пригодной для скольжения материальной точки с заданными характеристиками “комфорта” или “дискомфорта”.

В формализации большого объема прикладных задач в качестве модельного объекта выступает материальная точка. При постановке и решении задач динамики несвободной точки реакции, как правило, предполагаются неизвестными.