

среди студентов очной формы обучения механических специальностей. Обнаружена корреляция между степенью овладения курса Тренажера и успеваемостью по курсу теоретической механики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Федин, Д. А.** Программированное обучение в курсе теоретической механики / Д. А. Федин, А. И. Карнин // Тези доп. Всеукр. наук.-техн. конф. студентів і молодих учених «Молода академія 2010» (19–20 травня 2010 року, м. Дніпропетровськ). – Т. 1. – 2010. – С. 102.

2 Учитель. Книга о профессоре И. Е. Шварце. – Пермь: Книжный мир, 2009. – 600 с.

3 **Крэм, Д.** Программированное обучение и обучающие машины / Д. Крэм. — М.: Мир, 1965. – 274 с.

*D. A. FEDIN, B. V. VINOGRADOV*

### **ENGINEERING MECHANICS: PROGRAMMED TEACHING AS A MEANS OF COURSE ORGANISATION AND CONTROL**

The article describes the basic principles of programmed teaching and their connections with the credit-modular system and distance education regulations. There is a technique for programmed teaching of Engineering Mechanics Course. The description of the “Engineering Mechanics Training Simulator” structure and teaching computer programme manual are given. There is shown the prospects of application of interactive courses based on the branching programmed teaching in the systems of distance education.

Получено 11.04.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

---

УДК 521.13

*С. С. ЩЕРБАКОВ, Д. Г. ПРИБЫТОК, Р. С. ЖУК*  
*Белорусский государственный университет, Минск*

### **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ N ТЕЛ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЛАНЕТАРНОЙ СИСТЕМЫ**

Представлены результаты численного решения методом Эйлера гравитационной задачи для произвольного количества взаимодействующих тел. В разработанном алгоритме используется адаптивная дискретизация по времени, что позволяет значительно уменьшить погрешность численного интегрирования. Приведены решения ряда модельных задач для двух и трех тел, а также планетарной системы. Проведен анализ погрешности в сравнении с аналитическим решением задачи для двух тел.

**Постановка гравитационной задачи  $N$  тел.** Гравитационная задача  $N$  тел формулируется следующим образом. В пустоте находится  $N$  тел, моделируемых материальными точками, массы которых  $m_i$  известны. Взаимодействие точек описывается законом тяготения Ньютона в предположении, что гравитационные силы аддитивны. Пусть в начальный момент времени  $t_0$  известны радиус-векторы  $\mathbf{r}_i$  и скорости  $\mathbf{v}_i$  каждой точки:

$$\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i(0)}, \quad \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i(0)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

В этом случае определению подлежат положения точек для всех последующих моментов времени.

**Математическая модель движения.** Перемещения и скорости тел находятся из следующих формул [1–3]:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = G \sum_{j=1}^N m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad j \neq i, \quad (3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

**Численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера.** Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (4)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

где функция  $f$  определена на некоторой области  $D \subset R^2$ .

Решение задачи (4)–(5) строится для некоторого интервала  $[x_0, b]$ . Если ввести на данном интервале узлы

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \quad (6)$$

то приближенное решение в узлах  $x_i$ , которое обозначим через  $y_i$ , строится по формуле [4]

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (7)$$

**Численное решение пространственной задачи  $N$  тел.** Для численного решения задачи гравитационного взаимодействия произвольного количества тел на языке C++ была написана программа, которая на каждом ( $i$ -м) шаге вычисляет проекции главного вектора силы  $(F_x, F_y, F_z)$ , действующей на каждое из тел, и в соответствии с методом (4)–(7), применительно к задаче (1)–(3) находим координаты и скорость рассматриваемого тела на следующем шаге:

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &= v_{xi} \Delta t_i + x_i, \\
 v_{x(i+1)} &= \frac{F_x}{m} \Delta t_i + v_{xi}, \\
 y_{i+1} &= v_{yi} \Delta t_i + y_i, \\
 v_{y(i+1)} &= \frac{F_y}{m} \Delta t_i + v_{yi}, \\
 z_{i+1} &= v_{zi} \Delta t_i + z_i, \\
 v_{z(i+1)} &= \frac{F_z}{m} \Delta t_i + v_{zi}.
 \end{aligned}$$

Входными данными для программы являются проекции начальных координат и скоростей всех точек, их массы, радиусы (тела представляются шарами), время движения, шаг вывода в пакет Mathematica, точность вычислений, время движения тел. В процессе выполнения программы на каждом промежутке времени в файлы для передачи в пакет Mathematica записывается массив с параметрами отображения тел, необходимый для создания анимационного представления движения тел.

**Оценка погрешностей численного решения применительно к задаче двух тел.** Оценка погрешности проведена для простейшего случая взаимодействия двух тел в следующей постановке: два тела массами  $m_1 = m_2 = m$ , находятся на расстоянии 20, начальные скорости равны нулю (рисунок 1).

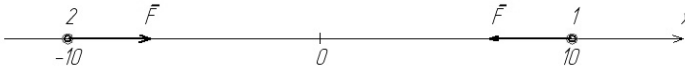


Рисунок 1 – Схема взаимодействия двух тел

Рассмотрим движение первого тела, на которое действует сила

$$F = -m^2 / 2x \text{ при } G=1.$$

Далее получаем дифференциальное уравнение для первого тела

$$\ddot{x} = m/(4x^2),$$

решая которое с учётом начальных условий  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 10$ , находим зависимость  $x(t)$ , неявно заданную следующим уравнением:

$$\sqrt{2} \left( x \sqrt{-1 + \frac{10}{x}} + 5 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{-1 + \frac{10}{x}}(x-5)}{-10+x} \right) \right) + \frac{5\sqrt{2}}{2} \pi = t.$$

Из рисунка 2 видно, что графики численного и аналитического решений практически совпадают.

Графики погрешностей (рисунок 3) были получены как разность численного и аналитического решений, отнесенная к  $x(0)$ , для различной дискретизации по времени:  $dt = 0,1$ ,  $dt = 0,05$ ,  $dt = 0,01$ ,  $k = 0,01$ ,  $k = 0,001$ .

Промежуток времени  $dt$  в зависимости от  $k$  для случая адаптивной дискретизации рассчитывается следующим образом:

$$dt = \frac{k}{v + 10k} \quad (8)$$

Дальнейшие расчеты проводились для  $dt$ , найденного в соответствии с (8), при  $k = 0,001$ .

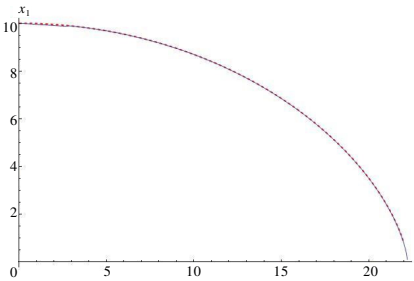


Рисунок 2 – Численное и аналитическое решение для двух тел

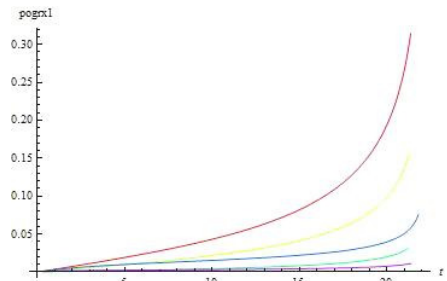


Рисунок 3 – Погрешности для различных разбиений

**Задача трех тел.** Качественная проверка работоспособности программы была проведена на случай с тремя одинаковыми телами массой  $m$ , расположенными в вершинах равностороннего треугольника, с начальными скоростями, направленными ортогонально векторам, соединяющим центр треугольника (т.О) с его вершинами (рисунок 4).

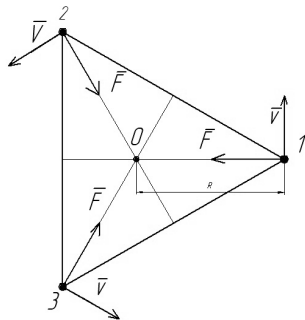


Рисунок 4 – Схема взаимодействия трех тел

Поскольку в данном случае на каждое из тел действует центральная сила  $F$ , они будут вращаться вокруг точки  $O$  по эллиптическим орбитам, если

$$\sqrt{\frac{m}{\sqrt{3}R}} \leq v \leq \sqrt{\frac{2m}{\sqrt{3}R}}.$$

При этом в любой момент времени тела должны образовывать равносторонний треугольник.

Для моделирования движения трех одинаковых тел по эллиптическим орбитам были приняты исходные данные, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры задачи для трех тел

Номер тела	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$v_{x(0)}$	$v_{y(0)}$	$v_{z(0)}$	масса	радиус
1	10	0	0	0	1	0	10	0,5
2	-5	8,66	0	-0,866	-0,5	0	10	0,5
3	-5	-8,66	0	0,866	-0,5	0	10	0,5

Из рисунка 5 видно, что тела движутся по эллиптическим орбитам. Рисунок 6 показывает, что в любой момент времени тела образуют равносторонний треугольник.

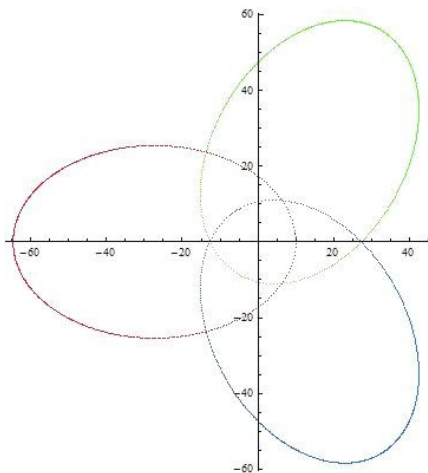


Рисунок 5 – Траектории движения трех тел

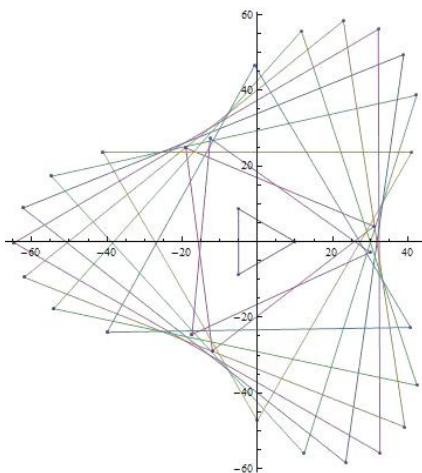


Рисунок 6 – Положения трех тел в различные моменты времени

Также был рассмотрен случай, когда начальные скорости трех тел равны нулю. Из рисунка 7 видно, что тела движутся к центру, в каждый момент времени образуя равносторонний треугольник.

**Моделирование планетарной системы.** В общем случае планетарная (звездная) система представляет собой систему звезд и различных астрономических объектов, которые вращаются вокруг общего барицентра, то есть центра масс.

При моделировании планетарной системы необходимо, чтобы планеты находились на устойчивых орбитах при их вращении вокруг некоторого тела с массой  $M$  (звезды), значительно превосходящей массы планет. Для этого начальная скорость каждой планеты  $v$  должна быть ортогональна радиус-вектору  $R$ ,

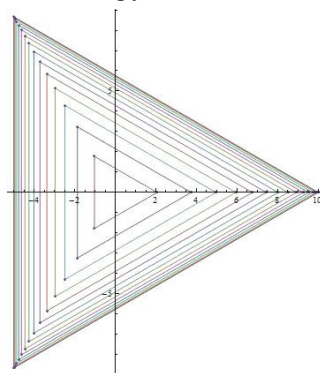


Рисунок 7 – Случай нулевых начальных скоростей

проходящему через центры масс планеты и звезды. Также для абсолютного значения  $v$  должно выполняться следующее условие:

$$\sqrt{\frac{M}{R}} \leq v \leq \sqrt{2\frac{M}{R}} .$$

Моделирование планетарной системы было проведено для шести тел, вращавшихся вокруг седьмого по эллиптическим и круговым орбитам. Исходные данные для расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Параметры планетарной системы

Номер тела	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$v_{x(0)}$	$v_{y(0)}$	$v_{z(0)}$	масса	радиус
1	0	0	1	0	0	0	1000	1,5
2	0	7	1	12	0	0	1	0,2
3	0	-10	1	-11	0	0	1	0,3
4	0	0	6	0	14,14	0	0,5	0,1
5	0	-6	9	-10	0	0	1	0,4
6	0	9	-11	9	0	0	1	0,5
7	10	0	1	0	7,6	10	1	0,6

В результате проведенных расчетов были получены массив с данными для отображения тел на каждом промежутке времени.

Из рисунка 8 видно, что движение тел планетарной системы происходит по устойчивым эллиптическим и круговым орбитам.

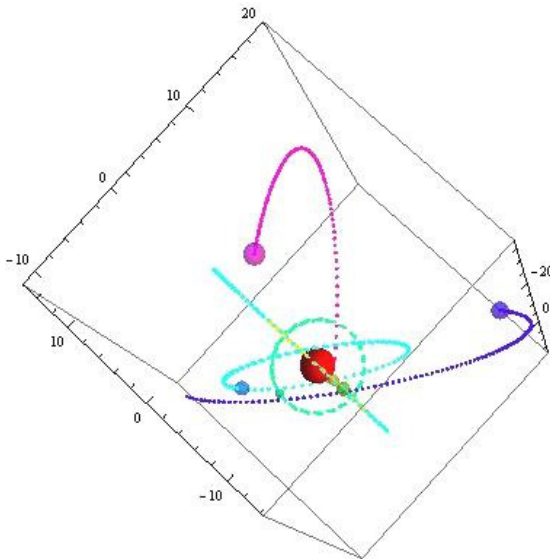


Рисунок 8 – Планеты и траектории их движения вокруг звезды

**Заключение.** В рамках проделанной работы была численно решена задача  $N$  тел. При решении данной задачи:

- разработана программа на C++ для решения методом Эйлера дифференциальных уравнений движения системы  $N$  тел;

- с помощью созданных в программе классов могут быть заданы количество тел системы, их начальные положения и скорости, при этом необходимое количество оперативной памяти выделяется динамически;

- разработан адаптивный алгоритм дискретизации по времени: шаг по времени зависит от скорости движения тел;

- проведено сравнение результатов численного моделирования с аналитическими решениями для простейших случаев, показавшее малую погрешность (до 3 % в случае адаптивного шага по времени) численного решения;

- с помощью разработанной программы решен ряд модельных задач: двух тел; трех тел, находящихся в вершинах равностороннего треугольника; о движении планетарной системы;

- разработанная компьютерная модель позволяет эффективно решать задачу для  $N$  тел и при ее дальнейшем усовершенствовании моделировать столкновение тел, в том числе с учетом взрыва и взаимодействием оставшихся тел со взрывной волной.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1 **Алексеев, В. М.** Лекции по небесной механике / В. М. Алексеев.– Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. – 160 с.

2 **Зигель, К. Л.** Лекции по небесной механике / К. Л. Зигель. – М.: ИЛ, 1959. – 300 с.

3 **Саари, Д.** Кольца, столкновения и другие ньютоновы задачи  $N$  тел / Д. Саари. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. – 280 с.

4 **Самарский, А. А.** Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1978. – 269 с.

*S. S. SHCHERBAKOV, D. G. PRIBYTOK, R. S. ZHUK*

#### **SOLUTION OF THE N-BODY PROBLEM WITH REGARD TO PLANETARY SIMULATION**

The results of numerical solutions of gravitational problem for any quantity of interacting bodies by Eulerian method are set out. The developed algorithm uses an adaptive time quantization which allows to reduce the error of numerical integration significantly. The solutions to a number of model problems for two or three bodies as well as for the planetary system are given. The analysis of errors versus the analytic solution of the problem for two bodies has been carried out.

Получено 26.05.2011