

*B. RUSTEMOV, I. RAKHMATOV*

## **APPLICATION OF EULER – VENN DIAGRAMME IN SCHOOL COURSE OF PHYSICS**

The article describes the specific features of logical thinking development on the base of Euler – Venn diagramme use in school course of Physics. There are given some examples of its Mechanics and Optics application.

Получено 11.03.2011

---

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып.5. Гомель, 2011**

---

УДК 531:539.3/5

*Г. Ф. СИДОРОВ, Е. О. ПОЗДНЫШЕВ*

*Челябинское высшее военное автомобильное командно-инженерное училище  
(военный институт), Россия*

## **РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ МЕТОДОМ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ**

Решена в нормальных (главных) координатах задача статики систем, моделируемых по схеме абсолютно твердого тела, помещенного в пространство наложенных на него упругих связей при соблюдении принципа начальных размеров. Начало отсчета системы нормальных координат именуется кинетическим центром данной механической системы в силу того, что оно позиционирует себя как концентр всей системы опирания тела с эквивалентными этой системе кинетическими свойствами. Последнее открывает возможность решать задачи раскрытия дискретной и континуальной статической неопределимости на основе принципа суперпозиции методом парциальных жесткостей без необходимости оперировать системами уравнений.

Как альтернатива традиционным методам раскрытия статической неопределимости, связанным с составлением и решением систем уравнений равновесия, совместности перемещений и уравнений связей между ними, предлагается унитарная теория силового расчета как для статически определенных, так и статически неопределимых геометрически неизменяемых систем, оперирующая *формулами* [1]. В плане методологии курса теоретической механики описываемый подход представляет собой решение задачи статики несвободного твердого тела в нормальных координатах [2]. Специфическими понятиями данной теории выступают *кинетический центр, главные кинетические оси, главные и парциальные жесткости* [3].

*Кинетическим центром*, определяемым по формуле

$$\sum_n K_n r_n \sin \psi_n = 0, \quad (1)$$

называется точка, позиционируемая как концентр системы связей, наложенных на геометрически неизменяемую систему; здесь  $K_n$  – жесткость  $n$ -й связи;  $r_n$  – модуль радиуса-вектора точки наложения  $n$ -й связи в системе отсчета относительно кинетического центра;  $\psi_n$  – угол между радиусом-вектором  $\vec{r}_n$  и единичным вектором (ортом)  $\vec{e}_n$   $n$ -й связи, указывающим направление силового реагирования этой связи.

Положения *главных кинетических осей*  $X, Y, Z$  (оси эллипсоида жесткостей)

$$\sum_n K_n \sin 2\theta_n = 0, \quad (2)$$

где  $\theta_n$  – угол между главной осью и ортом связи  $\vec{e}_n$ .

Соответствующие *главные жесткости* (далее ограничимся случаем плоской системы) определяются формулами:

$$K_X = \sum_n K_n \cos^2 \theta_{nx}; \quad K_Y = \sum_n K_n \cos^2 \theta_{ny}; \quad \Pi_Z = \sum_n K_n \text{Mom}_Z^2(\vec{e}_n). \quad (3)$$

Слагаемые главных жесткостей именуются *парциальными жесткостями*. Нормальные координаты позволяют применять суперпозицию решений по каждой из них, из чего вытекает *закон парциальных жесткостей* [3]: *реакции связей, а также моменты этих реакций относительно главных кинетических (нормальных) осей пропорциональны их парциальным жесткостям.*

Для иллюстрации возможностей, открываемых предлагаемым подходом, рассмотрим четыре примера.

*Пример 1.* Определить силу в подвесе 2 конструкции, изображенной на рисунке 1.

По формуле (1) находим расстояние  $u$ , определяющее положение кинетического центра:

$$\sum_n K_n r_n \sin \psi_n = 2Ku - 2K(1,5l - u) - K(3,5l - u) = 0; \quad u = 1,3l.$$

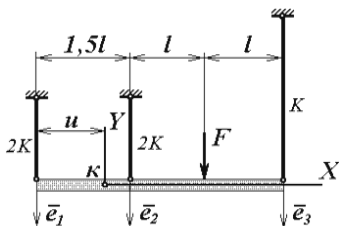


Рисунок 1 – Схема к примеру 1

Приводим активную силу  $F$  к кинетическому центру в виде главного вектора  $F$  и главного момента  $-1,2 Fl$ .

Главные кинетические оси  $X, Y, Z$  указываем по умолчанию как оси наибольшего и наименьшего сопротивлений смещению балки. Главные жесткости системы находим по формулам (3):

$$K_Y = \sum_n K_n \cos^2 \theta_{ny} = K_1 + K_2 + K_3 = 5K,$$

$$\Pi_Z = \sum_n K_n \text{Mom}_Z^2(\vec{e}_n) = (2 \cdot 1,3^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 2,2^2) Kl^2 = 8,3 Kl^2.$$

Реакцию подвеса 2 находим согласно принципу суперпозиции и закону парциальных жесткостей:

$$R_2 = \frac{-F}{K_Y} K_2 + \frac{-1,2Fl}{\Pi_Z} K_2 \frac{(0,2l)^2}{0,2l} = \frac{-F}{5K} 2K + \frac{-1,2Fl}{8,3Kl^2} 2K \cdot 0,2l = -0,46F.$$

**Пример 2.** Найти силу, возникающую в стержне 1 в результате действия силы  $F$  (рисунок 2).

Дано:  $\psi_2 = 53^\circ$ ,  $\psi_3 = 90^\circ$ ,  $K_1 = 0,25 K$ ;  $K_2 = 0,42 K$ ;  $K_3 = 0,33 K$ .

Кинетический центр находится в узле. За начало отсчета углов выберем стержень 1 ( $\psi_1 = 0$ ). Одну из главных кинетических осей определим с помощью угла  $\theta_X$  по формуле (2):

$$\sum_n K_n \sin 2\theta_n = \sum_3 K_n \sin 2(\psi_n - \theta_X) = 0:$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_X = \frac{\sum_3 K_n \sin 2\psi_n}{\sum_3 K_n \cos 2\psi_n} = \frac{0,42 \sin 106^\circ}{0,25 + 0,42 \cos 106^\circ + 0,33 \cos 180^\circ} = -2,$$

$$\theta_X = 0,5 \operatorname{arctg}(-2) = -32^\circ.$$

В рассматриваемом случае получаем:

$$K_Y = \sum_3 K_n - K_X = (1 - 0,28)K = 0,72K.$$

Раскладываем силу  $F$  по главным направлениям, применяя принцип суперпозиции и закон парциальных жесткостей:

$$R_1 = \frac{-F_X \cos \theta_{1X}}{K_X} K_1 + \frac{-F_Y \sin \theta_{1X}}{K_Y} K_1 =$$

$$= -0,25F \left[ \frac{\sin 5^\circ \cos 32^\circ}{0,28} + \frac{\cos 5^\circ \sin 32^\circ}{0,72} \right] = -0,25F.$$

**Пример 3.** Вывести формулу расчета нормальных напряжений в стержне большой кривизны при чистом изгибе (рисунок 3).

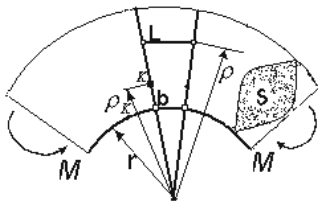


Рисунок 3 – Схема к примеру 3

Согласно схеме стержневой аппроксимации на рисунке 3 элементарные связи между соседними абсолютно жесткими сечениями (закон плоских сечений) обладают жесткостями, обратно пропорциональными их длинам, а их длины в свою очередь пропорциональны радиусу кривизны  $\rho$ :

$$\frac{L}{b} = \frac{\rho}{r}, \Rightarrow L = b \frac{\rho}{r}.$$

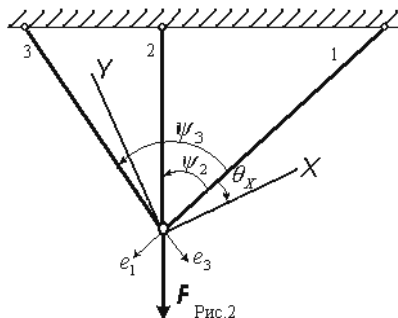


Рисунок 2 – Схема к примеру 2

Закон убывания жесткостей связей

$$K_n = \frac{EdS}{L} = \frac{rE}{\rho b} dS.$$

Положение кинетического центра определяем, переходя от сумм к квадратурам:

$$\sum_n K_n r_n \sin \psi_n = \frac{Er}{b} \int_S \frac{(\rho - \rho_K)}{\rho} dS = \frac{Er}{b} \left( S - \rho_K \int_S \frac{dS}{\rho} \right) = 0,$$

$$\rho_K = \frac{S}{\int_S \frac{dS}{\rho}}. \quad (4)$$

Поворотная жесткость сечения

$$\Pi_Z = \frac{Er}{b} \int_S \frac{(\rho - \rho_K)^2}{\rho} dS = \frac{ErS}{b} (\rho_C - \rho_K),$$

где  $\rho_C$  – координата центра «тяжести» сечения.

Реакция связи

$$\sigma dS = M \frac{K_n (\rho - \rho_K)}{\Pi_Z} = M \frac{\frac{r}{\rho} dS (\rho - \rho_K)}{rS (\rho_C - \rho_K)}, \Rightarrow \sigma = \frac{M (\rho - \rho_K)}{S (\rho_C - \rho_K) \rho}.$$

Введя обозначения  $e = \rho_C - \rho_K$ ,  $y = \rho - \rho_K$ , получим формулу (4.38) [4]:

$$\sigma = \frac{M}{Se} \frac{y}{\rho_K + y},$$

но другим способом – способом парциальных жесткостей.

*Пример 4.* Вывести формулу расчета нормальных напряжений в армирующих волокнах композитного стержня большой кривизны при чистом изгибе.

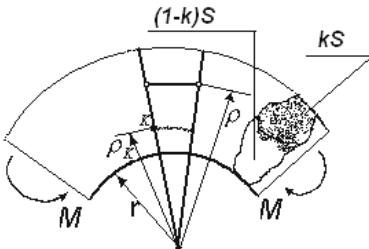


Рисунок 4 – Схема к примеру 4

Воспользуемся схемой на рисунке 3 с той лишь разницей, что часть  $kS$  ( $k \leq 1$ ) поперечного сечения  $S$  стержня заполнена армирующими волокнами, оставшаяся  $(1 - k)S$  – матрицей (см. рисунок 4).

Задача решается аналогично предыдущей с той разницей, что парциальные жесткости волокон и матрицы следует учитывать отдельно:

$$E_v \int_{kS} \frac{\rho - \rho_K}{\rho} dS + E_m \int_{(1-k)S} \frac{\rho - \rho_K}{\rho} dS = 0,$$

где  $E_v, E_m$  – модули упругости волокон и матрицы соответственно.

Разрешая это условие относительно  $\rho_K$ , имеем:

$$\rho_K = \frac{S[E_m + k(E_v - E_m)]}{E_v \int_{kS} \frac{dS}{\rho} + E_m \int_{(1-k)S} \frac{dS}{\rho}}.$$

Поворотная жесткость

$$\begin{aligned} \Pi_Z &= r(E_v \int_{kS} \frac{(\rho - \rho_K)^2}{\rho} dS + E_m \int_{(1-k)S} \frac{(\rho - \rho_K)^2}{\rho} dS = \\ &= rS\{kE_v \rho_{cv} + (1-k)E_m \rho_{cm} - \rho_K [kE_v + (1-k)E_m]\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_{cv}, \rho_{cm}$  – координаты центров «тяжести» сечений, занимаемых волокнами и матрицей соответственно. При равномерном заполнении матрицы волокнами  $\rho_{cv} = \rho_{cm} = \rho_c$ . В таком случае выражение для поворотной жесткости упрощается:

$$\Pi_Z = rS[kE_v + (1-k)E_m](\rho_c - \rho_K).$$

Формула напряжений в армирующих волокнах, равномерно заполняющих сечение стержня большой кривизны, согласно закону парциальных жесткостей будет иметь вид:

$$\sigma_v = \frac{M(\rho - \rho_K)}{Sp(\rho_c - \rho_K) \left[ k + (1-k) \frac{E_m}{E_v} \right]}.$$

Преобразуя ее в систему координат относительно нейтральной оси, получаем:

$$\sigma_v = \frac{M}{Se} \cdot \frac{y}{\rho_K + y} \cdot \frac{1}{k + (1-k) \frac{E_m}{E_v}}.$$

При  $k=1$ , как легко видеть, это выражение совпадет с результатом предыдущего примера. В наиболее общем случае, при неоднородном расположении армирующих волокон в матрице, формула в системе отсчета относительно центра кривизны стержня будет иметь вид

$$\sigma_v = \frac{M(\rho - \rho_k)}{Sp \left\{ k\rho_{cv} + (1-k)\rho_{cm} \frac{E_m}{E_v} - \rho_k \left[ k + (1-k) \frac{E_m}{E_v} \right] \right\}}.$$

Таким образом, рассмотренные примеры подтверждают возможность раскрытия статической неопределенности методом парциальных жесткостей без необходимости оперирования системами уравнений, как это происходит при использовании классических подходов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Сидоров, Г. Ф. К основанию кинетоцентрической теории движения колесных машин / Г. Ф. Сидоров // Вестник Академии военных наук. – М.: Воениздат, 2010. – Вып. 1 (30). – С. 204–207.

2 Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Элементы теории потенциала. – 544 с.

3 Сидоров, Г. Ф. К вопросу о касательных силах в контакте колеса с дорогой / Г. Ф. Сидоров // Повышение эффективности колесных и гусеничных машин многоцелевого назначения: Науч. вестн. Челяб. ВВАКИУ. – 2010. – № 26. – С. 199–203.

4 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 590 с.

*G. F. SIDOROV, E. O. POZDNYSHEV*  
**DISCLOSURE OF STATIC INDETERMINACY  
BY PARTIAL STIFFNESS METHOD**

In the normal (principal) coordinates the problem of the statics of systems modelled according to the scheme of the absolutely rigid body placed in the space of the imposed spring linkage subject to the initial size principle has been solved. The reference point for the system of normal coordinates is called the kinetic centre of this mechanical system due to the fact that it is regarded as the con-centre of the entire system of body support with the relevant kinetic properties of the system. The latter opens the possibility to solve the problems of the discrete and continuous disclosure of static indeterminacy based on the principle of superposition by the partial-stiffness method without using the systems of equations.

Получено 27.04.2010

---

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

---

УДК 531.132

*В. К. ТАРАСОВ, Ю. П. СМЕРНОВ*  
*Тульский государственный университет, Россия*

## **РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЦС ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ**

Рассмотрены методы определения МЦС с использованием теорем Арнольда, а также метод разложения движений и метод остановки. Приведено решение двух задач с применением этих методов.

Одним из наиболее эффективных методов решения задач, связанных с определением скоростей точек звеньев плоских механизмов является определение МЦС звеньев механизма. При этом необходимо отметить, что эле-