

Таблица 2 – Касательные напряжения в крайних точках сечений
В паскалях

Угол наклона	Координаты сечений, м				
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$\alpha = 0$	0	0	0	0	0
$\alpha = \pi/16$	0	0,0970	0,1790	0,2483	0,3066
$\alpha = \pi/8$	0	0,1852	0,3153	0,4055	0,4665
$\alpha = 3\pi/16$	0	0,2704	0,4215	0,5009	0,5369
$\alpha = \pi/4$	0	0,3568	0,5006	0,5441	0,5402

Вывод. Диаграммы касательных напряжений в балках с поперечным сечением в виде прямоугольника с линейно изменяемой по длине высотой существенно отличаются от аналогичных диаграм для случая постоянного поперечного сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Съпротивление на материалите** / С. Кисляков [и др.]. – София: Техника, 1986. – 354 с.

2 **Феодосьев, В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / И. Феодосьев. – М., 1967. – 376 с.

S. V. LILKOVA-MARKOVA

SHEAR STRESSES IN THE BEAM WITH A RECTANGULAR CROSS-SECTION

On the basis of numerical studies the cost of shearing stresses for beams with constant and variable along the beam length rectangular cross-section has been analyzed.

Получено 18.02.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ, С. А. СЕНЬКОВ

Витебский государственный технологический университет, Беларусь

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Рассмотрено сложное движение эллиптического маятника. Составлены и решены дифференциальные уравнения, описывающие движения ползуна и шарика. В работе принято, что в начальный момент угол отклонения стрелы маятника от вертикали и скорость ползуна равны нулю, угловая скорость вращения стрелы не равна нулю. С учетом принятых начальных условий получены уравнения движения ползуна и малых колебаний маятника.

В работе [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра масс системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения стержня $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, угол отклонения $\varphi = \varphi_0 \neq 0$.

В работе [2] получен закон малых колебаний эллиптического маятника при приближении $\sin^2 \varphi = \varphi$. Однако больший диапазон угла отклонения маятника удастся описать в случае приближения $\sin^2 \varphi = \varphi^2$, при этом угол может изменяться в диапазоне $\varphi = -40^\circ \dots +40^\circ$ ($-0,698 \dots +0,698$ радиан).

Рассмотрим эллиптический маятник, состоящий из ползуна I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика II, подвешенного к ползуну I нерастяжимым стержнем (см. рисунок 1). Масса ползуна I равна M , масса шарика – m , длина нерастяжимого стержня – l .

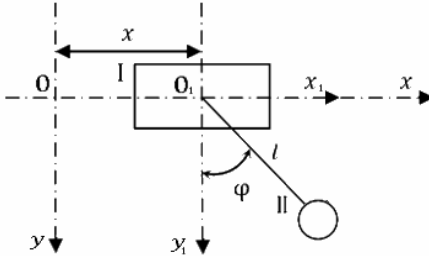


Рисунок 1 – Расчетная схема эллиптического маятника

По расчетной схеме (см. рисунок 1) принимаем, что в начальный момент угол $\varphi = \varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$. Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$.

Для решения воспользуемся уравнением Лагранжа. Принимаем, что на маятник не действуют силы тяжести и потенциальная энергия системы $\Pi = 0$. Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами x и φ . Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии первого и второго тел.

В работе [2] получены уравнения, выражающие закон движения ползуна в зависимости от угла отклонения стержня l от вертикальной оси и времени и зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня l от вертикальной оси:

$$x = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 t - \sin \varphi)}{M + m}, \quad (1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \phi}}. \quad (2)$$

Подставляя в выражение (2) $\sin^2 \phi = \varphi^2$ и разделяя переменные, получим:

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M} \varphi^2} d\varphi = \dot{\phi}_0 dt. \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) воспользуемся заменой $\sqrt{1 + \frac{m}{M} \varphi^2} = p$.

$$\text{Получим } \varphi = \sqrt{\frac{M}{m}(p^2 - 1)} \text{ и } d\varphi = d\sqrt{\frac{M}{m}(p^2 - 1)} = \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2 - 1)}} dp.$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2 - 1)}} dp = \int \dot{\phi}_0 dt. \quad (4)$$

Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (4):

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M}(p^2 - 1)}} dp = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{p^2}{p^2 - 1} dp. \quad (5)$$

Введем замену $\sqrt{p^2 - 1} = t$, тогда $p = \sqrt{t^2 + 1}$, а $dp = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$.

Следовательно, в правой части уравнения (5) получим:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{t^2 + 1}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \sqrt{t^2 + 1} dt. \quad (6)$$

Используем замену $t = \operatorname{tg} x$, тогда $\sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{\cos x}$ и $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

В таком случае выражение (6) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^2} dx = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2}. \quad (7)$$

Введем замену $\sin x = \cos y$.

Тогда выражение (7) окажется равным:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{d \cos y}{(1 - \cos^2 y)^2} = -\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{\sin y dy}{(\sin^2 y)^2} = -\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{\sin^2 y} dy. \quad (8)$$

Так как для малых углов $\sin y \approx y$, то $\sin^2 y \approx y^2$.

Тогда формула (8) примет вид:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{y^2} dy = -\sqrt{\frac{M}{m}} \int y^{-2} dy = \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2y^2}. \quad (9)$$

Применим обратную замену: $y \approx \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \cos x$.

Уравнение (9) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2 \cos^2 x} = \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x). \quad (10)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x = t$, а $t = \sqrt{p^2 - 1}$, где $p^2 = 1 + \frac{m}{M} \varphi^2$, из (10) получаем:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right). \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (3), находим:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right) = \dot{\varphi}_0 t + C_4. \quad (12)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ из уравнения (12) определяем $C_4 = \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2}$.

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right) = \dot{\varphi}_0 t + \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Из равенства (13) получим:

$$\varphi = \sqrt{\frac{4M}{m}} \dot{\varphi}_0 t. \quad (14)$$

Уравнение (14) выражает закон движения эллиптического маятника, соответствующий малым отклонениям угла φ от положения равновесия. Подставляя уравнение (14) в (1), можно найти закон движения ползуна в зависимости от времени для заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

Полученная расчетная формула по определению закона малых колебаний маятника значительно упрощается по сравнению с формулой в работе [2] и применима при исследовании малых колебаний маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения при диапазоне изменения угла φ от -40 до $+40^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. В 2 т. / А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1971. – Т. 2: Динамика. – 488 с.

2 Локтионов, А. В. К вопросу о составлении дифференциального уравнения при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: Международ. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2010. – Вып. 4. – С. 162–166.

A. V. LOKTIONOV, S. A. SENKOV

SOLUTION OF THE EQUATION OF SMALL OSCILLATION FOR AN ELLIPTIC PENDULUM

The compound motion of the elliptic pendulum is being considered. The differential equations describing slider and ball movements are set up and solved. In the work it is accepted that at the initial moment the deflection angle of rotation of an arrow of a pendulum from vertical and the velocity of the slider equal zero and the angular velocity of needle rotation is nonzero. With the initial conditions taken into account the equations for slider movement and small oscillations of the pendulum are received.

Получено 04.10.2010

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 531.1

А. Г. МИТЯЕВ, О. А. ТКАЧ

Тульский государственный университет, Россия

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС НА УПРУГОЙ НИТИ

Рассмотрены малые поперечные колебания сосредоточенных масс на упругой нити. Решена система дифференциальных уравнений. Приведены уравнения движения масс и исследованы различные формы колебаний.

Пусть три материальные точки M_1 , M_2 , и M_3 одинаковой массы расположены так, что $AL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = L_3B = a$ (рисунок 1).

Рассмотрим малые отклонения точек M_1 , M_2 , и M_3 от прямой AB , считая, что смещения перпендикулярны оси x . Если y_1, y_2, y_3 – координаты названных точек, то кинетическая энергия приобретает форму

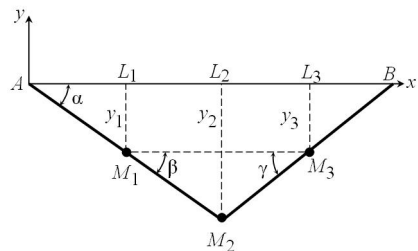


Рисунок 1 – Расчетная схема