ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 531/534

Д. В. КОМНАТНЫЙ
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Беларусь

ЗНАЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СОЗДАНИЯ МЕТОДА КИНЕТОСТАТИКИ

В статье проанализировано значение исследовательских задач, решенных выдающимися учеными, в частности Ж.-Л. Даламбером, для создания метода кинетостатики. Показано, как в процессе решения указанных задач совершенствовались и приближались к современным теоретические положения метода. На основании анализа работ Ж.-Л. Даламбера и его современников высказаны рекомендации по использованию классических задач теоретической механики в современных учебных курсах и пособиях с целью расширения кругозора студентов и их подготовки к самостоятельным исследованиям.

Метод кинетостатики, основанный на принципе Германа-Даламбера, находит применение при решении широкого круга прикладных задач. В создание этого метода внесли вклад такие выдающиеся исследователи, как Я. Бернулли, Я. Герман, Л. Эйлер, Ж.-Л. Даламбер. Разработка метода кинетостатики в трудах перечисленных ученых неразрывно связана с решением исследовательских задач динамики систем со связями и твердого тела. Значение результатов решения этих задач для развития и уточнения теоретических представлений, к сожалению, недостаточно отражено в известных трудах по истории механики [1–4]. Тем не менее, изучение этого вопроса полезно не только для освещения путей создания современных методов теоретической механики, но и для улучшения преподавания этой науки во втузах.

Впервые систематическое рассмотрение систем со связями ввел Ж.-Л. Даламбер в трактате «Динамика» [5], поэтому будем анализировать исследовательские задачи, имеющиеся в этом сочинении.

В «Динамике» (часть вторая, глава первая) Даламбер высказал свой принцип. Но в авторской формулировке принципа Даламбера не упоминаются никакие силы. Даламбер рассматривает передачу движений (в терминологии того времени движение – это скорость) несвободным материальным точкам и утверждает, что передаваемое движение не равно воспринимаемому точкой по причине наличия связи. Часть движения является потерянным; при наличии только потерянных движений материальные точки остаются в покое. Как видно, авторская формулировка принципа Даламбера существенно отличается от современной.

Далее, в главе третьей, Даламбер приступает к решению исследовательских задач на базе своего принципа. Первая решенная им задача – задача о составном маятнике в виде невесомого стержня, нагруженного несколькими материальными точками. Эта же задача была рассмотрена Я. Бернулли и, позже, Я. Германом и Л. Эйлером с помощью «петербургского принципа». Последний и заключается в идее уравновешивания движущих сил и сил реакций связей силами инерции [4]. Даламбер показал эквивалентность своего принципа и «петербургского принципа» Германа. Но Даламбер считал, что понятие присущих телу сил (живых, мертвых, инерции и т.д.) – метафизическое и даже ненужное. По Даламберу реально только движение. Поэтому и в дальнейшем он рассматривает задачи динамики системы, опираясь на свою формулировку метода кинетостатики. Тем не менее, основа для объединения двух принципов была заложена уже в самом начале их создания.

В параграфе 101 Даламбер решает следующую задачу. Тело P опускается по кривой CB и тянет за собой тело F при помощи нити, переброшенной через закрепленный в точке C блок (рисунок 1). Требуется найти скорость каждого тела, если начальные скорости обоих тел равны нулю. Тела, заданные в условии, можно представить в виде материальных точек. В этой задаче никакие «движения» (то есть скорости) обоим телам системы не передаются, система движется под действием силы тяжести тела P. Прямое применение авторской формулировки принципа Даламбера в этой задаче затруднительно. Даламбер осуществляет развитие своего метода. В эпоху Даламбера под ускорением, которое именовалось ускоряющей силой, понимали дифференциал скорости dv. Пользуясь этим представлением, Даламбер переходит от конечных приращений скоростей к бесконечно малым, а последние рассматривает с помощью своего принципа [5]. Эти бесконечно малые приращения у Даламбера соответствуют ускоряющим силам. Даламбер вводит косоугольную систему координат, одна из осей которой направлена по нити CP, а вторая – по нормали к кривой CB. В итоге рассуждений он получает условие равновесия системы

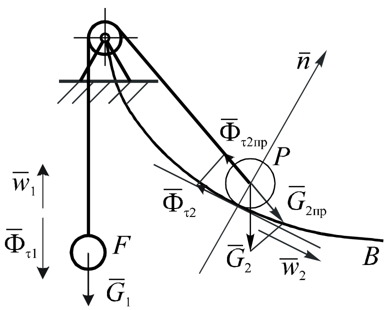

Рисунок 1 – Задача, о движении тел, связанных нитью

$$m_F w_1 = m_P w_2 , \tag{1}$$

где m_F, m_P – массы тел F и P, соответственно, кг; w_1, w_2 – ускоряющие силы тел F и P, м/с^2.

С позиций современной механики это уравнение – не что иное, как уравнение моментов для активных сил и сил инерции, записанное относительно оси блока C. Оно имеет вид

$$G_1 r + \Phi_{\tau_1} r - G_{2\text{пр}} r + \Phi_{\tau 2\text{пр}} r = 0\,, \qquad (2)$$

где индекс «пр» означает проекцию на ось x.

Преобразование уравнения (2) дает

$$G_1 + \Phi_{\tau_1} = G_{2\text{пр}} - \Phi_{\tau 2\text{пр}}\,. \qquad (3)$$

Силы в уравнении (3) могут быть выражены через массы и ускорения материальных точек, что дает

$$m_F\,(g + w_1) = m_P\,(g_{\text{пр}2} - w_{2\text{пр}})\,. \qquad (4)$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (1) из «Динамики», если приравнять множители при массах материальных точек.

Итак, Даламбером получено уравнение равновесия системы материальных точек под действием активных сил и сил инерции. При его выводе Даламбер говорит об «уравновешивании тел», обладающих «ускоряющими силами», а не об «уравновешивании тел», обладающих «движениями», как в предыдущих разделах своего трактата [4, 5]. Уравнение, полученное Даламбером, только обозначениями отличается от современного. Таким образом, Даламбер практически выходит на современные понятия о силах инерции и методе кинетостатики, но не выделяет силы инерции, как особое понятие и не дает им определения. Схожие задачи исследовали Я. Герман и И. Бернулли. Решения этих авторов Даламбер использовал для сравнения со своим [5].

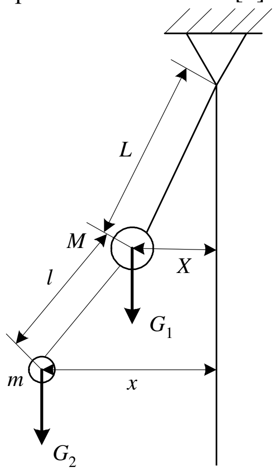

Рисунок 2 – Задача о двойном маятнике

В следующих разделах трактата Даламбер развивает идеи параграфа 101. Так в параграфе 115 он исследует колебания двойного маятника (рисунок 2). При этом вообще не упоминаются передаваемые грузам маятника движения. Даламбер указывает, какого рода движения (в современном смысле слова) осуществляют грузы двойного маятника. И далее переходит к рассмотрению «усилий весов» грузов маятника (в современной терминологии – составляющих сил тяжести, действующих на грузы). Даламбер рассматривает проекции силы тяжести груза массой M на касательную к траектории движения этого груза и на нормаль к ней, совпадающую с нитью подвеса. Также и сила тяжести груза массой m разлагается на две составляющие – касательную к траектории и нормальную к ней. После этого Даламбер высказывает положение, которое соответствует отысканию силы натяжения нити подвеса нижнего маятника. Рассуждения Даламбера весьма близки к современному анализу действия сил в двойном маятнике, который приведен в [6]. Далее Даламбер записывает условия равновесия обоих грузов маятника под действием приложенных к ним «ускоряющих сил и усилий», что в современных терминах эквивалентно условиям равновесия указанных грузов под действием активных сил, сил инерции и сил реакции связей, записанным в проекции на касательные к траекториям грузов. Даламбер изучает малые колебания грузов, поэтому он пренебрегает различием между дугой траектории груза и касательной к ней. Уравнения движения грузов маятника, данные Даламбером, по форме записи и по сути соответствуют уравнениям, указанным Зоммерфельдом в [6] для того же случая малых колебаний маятника.

Уравнения движения грузов маятника у Даламбера имеют вид

$$-d^2x=\left[\frac{px}{l}-\frac{MP}{m}\left(\frac{y}{l}-\frac{x}{l}\right)\right]dt^2,$$

$$-d^2y=\left[\frac{yP}{L}\frac{M+m}{m}-\frac{x}{l}\left(p+\frac{MP}{m}\right)\right]dt^2, \tag{5}$$

где p, P – ускорения силы тяжести грузов маятника, которые Даламбер принимал различными, м/с^2; x, y – координаты грузов маятника, м.

Те же уравнения по Зоммерфельду

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=-M\frac{g}{l}X+mg\left(\frac{x-X}{l}-\frac{X}{L}\right),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m\frac{g}{l}(x-X). \tag{6}$$

Видно, что решение задачи о колебаниях двойного маятника, выполненное Даламбером, по ходу и результатам незначительно отличается от решения, полученного современными средствами. Обращает на себя внимание и то, что Даламбер не применяет в этой задаче свой принцип в первоначальной формулировке и не рассматривает «передачу движений» грузам, хотя это и возможно в данной задаче.

Одновременно с Ж-Л. Даламбером колебания двойного маятника рассмотренного типа изучали Л. Эйлер и Д. Бернулли. Решения всех трех авторов совпали по существу, что позволило Даламберу сделать вывод об обоснованности его принципа.

Итак, рассмотрение круга задач, исследовавшихся выдающимися механиками – создателями основ кинетостатики позволяет сделать выводы:

1 Результаты решения Даламбером и его современниками исследовательских задач динамики системы материальных точек были достаточны для того, чтобы последующие ученые могли сформулировать современный принцип Германа-Даламбера и создать метод кинетостатики. Причем именно решение различных задач привело Даламбера к включению в его принцип не «движений» (скоростей), а «ускоряющих сил» (ускорений). В дальнейшем

эта идея вела к установлению понятия сил инерции. Можно сказать, что решения описанных задач явились необходимым условием прогресса в теории механического движения.

2 Обращает на себя внимание значение задач о колебаниях двойного и составного маятников для развития теоретических представлений механики. Эти задачи изучались многими выдающимися учеными и позволили им развить такие разделы этой науки, как метод кинетостатики и энергетический метод [3].

3 Поэтому, с целью показа развития идей теоретической механики студентам, в современных учебных курсах должны находить место задачи о колебаниях составного и двойного маятников. Полезно задачу о составном маятнике решать как на основе теоремы об изменении кинетической энергии, так и с помощью принципа Даламбера. А задачу о двойном маятнике – как методом кинетостатики, так и на базе уравнений Лагранжа второго рода. Такой подход применил в своем труде Зоммерфельд [6]. Это позволяет обогатить учебные курсы сведениями из истории науки и повысить уровень освоения теоретического материала.

4 При изучении метода кинетостатики полезно, в качестве первого примера, решать этим методом задачи о движении по наклонным плоскостям связанных нитью тел [7]. Эта задача является упрощением задачи из «Динамики» Даламбера. Такое упрощение, во-первых, не затрудняет усвоение методов механики сложными математическим выкладками, и, во-вторых, позволяет учащимся повторить путь, которым создавался метод кинетостатики.

В пособиях по истории механики для иллюстрации связи труда Даламбера с современными методами механики, предпочтительнее рассматривать задачу о двойном маятнике, так как ее решение, данное Даламбером, ближе к современному, чем решение Даламбера задачи о составном маятнике.

Таким образом, использование классических исследовательских задач в современных курсах и пособиях по теоретической механике не только расширяет знания и кругозор студентов, но и может послужить для подготовки их к будущей самостоятельной исследовательской работе. Такая подготовка является, безусловно, необходимой и актуальной в современных условиях, требующих инновационного развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Моисеев, Н. Д.** Очерки развития механики / Н. Д. Моисеев. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1961. – 474 с.

2 **Веселовский, И. Н.** Очерки истории теоретической механики / И. Н. Веселовский. – М.: Высшая школа, 1974. – 287 с.

3 **Яковлев, В. И.** Начала аналитической механики / В. И. Яковлев. – Москва-Ижевск: Изд-во ин-та компьютерных исследований, 2002. – 339 с.

4 **Тюлина, И. А.** Принцип Даламбера, его предыстория и предпосылки / И. А. Тюлина // Проблемы истории математики и механики: сб. науч. тр. / Институт математики АН УССР. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1977. – С. 14–24.

5 **Даламбер, Ж.-Л.** Динамика / Ж.-Л. Даламбер. – Новокузнецк: Новокузнецкий физико-математический институт, 2000. – 336 с.

6 **Зоммерфельд, А.** Механика / А. Зоммерфельд. – М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1947. – 391 с.

7 **Пёшль, Т.** Техническая механика для инженеров и физиков / Т. Пёшль. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – 344 с.

D. V. KOMNATNY

VALUE OF RESEARCH PROBLEMS
FOR CREATING KINETOSTATICS METHOD

The value of research problems solved by the outstanding researchers, G.-L. Dalambert in particular, for creating the kinetostatics method is analyzed in this article. It is shown how the theoretical treatments of this method during problem solution process were improved and moved towards the modern ones. Based on G.-L.Dalambert's and his contemporaries' work analyses there were given the recommendations for the usage of engineering mechanics classical problems in contemporary training courses and handbooks. The aim of this use is broadening students' outlook and the preparation for their independent researches.

Получено 03.06.2010

ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 531.8

С. В. ЛИЛКОВА-МАРКОВА

Университет по архитектуре, строительству и геодезии, София, Болгария

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

На основе численных исследований проанализированы значения касательных напряжений для балки с постоянным и с изменяющимся по длине балки прямоугольным поперечным сечением.

Введение. Балка часто встречается как элемент в конструкциях и машинах. Многие темы по дисциплине „Сопротивление материалов” для инженерных специальностей технических университетов связаны с нагруженными балками. В большинстве учебников по этой дисциплине исследованы только балки с постоянным по длине поперечным сечением. В учебной программе по сопромату в Университете по архитектуре, строительству и геодезии в Софии (Болгария) представлены темы только о таких балках.

Среди студентов всегда есть такие, которые проявляют большой интерес к дисциплине „Сопротивление материалов”. Для них будет полезно усвоить