**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 531

С. А. БЕРЕСТОВА, Е. А. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

ТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В МЕХАНИКЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предложен один из путей введения тензорных характеристик в преподавании теоретической механики при описании движения твердого тела, обладающий наглядным физическим содержанием и возможностями использования для записи инвариантных количественных соотношений.

Введение. В последние годы, в связи с массовым применением вычислительной техники в практику преподавания теоретической механики стали широко внедряться матричные методы. Это относится как к записи уравнений равновесия и движения линейных систем, так и к процедуре получения их решений. Помимо этого матричная запись используется для представления группы собственных ортогональных аффинных преобразований движения, к которым относятся параллельные переносы и вращения. В меньшей степени в задачах классической механики используется тензорный формализм, несмотря на отражаемый им глубокий физический смысл и инвариантный характер получаемых с его использованием количественных соотношений. В данной работе, имеющей методический характер, рассматриваются «тензорная природа» тензора инерции, о которой, к сожалению, практически не упоминается в учебной литературе, и понятие тензора угловой скорости, перспективное, на наш взгляд, для решения некоторых задач классической механики.

Тензор инерции. К понятию тензора инерции проще всего подойти, рассматривая выражение кинетического момента твердого тела в случае его сферического движения. С учетом формулы Эйлера для скорости произвольной точки тела имеем

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k),$$

где $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость сферического движения.

Воспользовавшись формулой для двойного векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \cdot \vec{b})$, получим

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \vec{\omega} - \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \left(\vec{r}_k \cdot \vec{\omega}\right)$$

или

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) \vec{\omega} - \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \left(x_k \omega_x + y_k \omega_y + z_k \omega_z\right).$$

В проекциях на оси системы координат, связанной с движущимся телом,

$$K_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right) \omega_x - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k \omega_y - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k \omega_z,$$

$$K_{Oy} = -\sum_{k=1}^{n} m_k y_k x_k \omega_x + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(z_k^2 + x_k^2\right) \omega_y - \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \omega_z,$$

$$K_{Oz} = -\sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k \omega_x - \sum_{k=1}^{n} m_k z_k y_k \omega_y + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \omega_z.$$

Так как $(y_k^2 + z_k^2)$, $(z_k^2 + x_k^2)$, $(x_k^2 + y_k^2)$ – квадраты расстояний от точки с массой m_k до координатных Ox, Oy, Oz, то $I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right)$, $I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(z_k^2 + x_k^2\right)$, $I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right)$ – осевые моменты инерции.

Введем обозначения:

$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k$, $I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k$, $I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k$ – центробежные моменты инерции ($I_{xy} = I_{yx}$, $I_{yz} = I_{zy}$, $I_{zx} = I_{xz}$).

Тогда

$$K_{Ox} = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z,$$

$$K_{Oy} = -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z,$$

$$K_{Oz} = -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z.$$

В общем случае вектор кинетического момента не совпадает по направлению с вектором угловой скорости. В матричном виде их связь описывается выражением

$$\begin{pmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Или, как линейное отображение (оператор) в трехмерном векторном пространстве:

$$\vec{K}_O = \mathbf{I}\,\vec{\omega},$$

Линейному оператору **I** соответствует в фиксированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ матрица

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \text{ – тензор инерции.}$$

Матрица I является симметрической и ее элементы определяются моментами инерции твердого тела, характеризующими распределение масс относительно фиксированной системы координат.

Как известно, при изменении базиса (преобразовании системы координат) матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду

$$I' = \begin{pmatrix} I_\xi & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{pmatrix},$$

где I_ξ, I_η, I_ζ – собственные значения линейного оператора **I**, которые находятся из уравнения

$$\det(I - \lambda\, E) = 0,$$

E – единичная матрица.

То есть

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y - \lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

($\lambda_1 = I_\xi$, $\lambda_2 = I_\eta$, $\lambda_3 = I_\zeta$).

Один и тот же линейный оператор в двух разных базисах имеет разные матрицы I' и I. Используя традиционную нумерацию координатных осей ($x \to 1, y \to 2, z \to 3$) и обозначая через $L = \left\| l_{ij} \right\| = \left\| \vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j \right\|$ ортогональную матрицу перехода от ортонормированного базиса (e_1', e_2', e_3'), соответствующего главным осям, к ортонормированному базису (e_1, e_2, e_3) с произвольным расположением базисных векторов, имеем

$$I = LI'L^{-1}, \; L^{-1} = L^{\mathrm{T}}$$

(в силу ортогональности обратная матрица совпадает с транспонированной).

Тогда, с учетом определения операции умножения матриц, связь между элементами матриц I' и I можно записать в следующем координатном виде

$$I_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} l_{im} l_{jn} I'_{mn}, \qquad (1)$$

где $l_{im} = \cos\left(Ox_i \,\hat{}\, Ox'_m\right)$ – косинусы углов между новыми и старыми осями.

Формула (1) преобразования элементов матрицы линейного оператора при изменении базиса может служить определением тензора. Если соответствующие девять величин преобразуются по этому правилу, то они называются компонентами тензора, а инвариантный образ линейного оператора – тензором (в данном случае тензором второго ранга).

В частности, момент инерции относительно произвольной оси *Ox*, составляющей углы α, β и γ с главными осями $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$, в соответствии с указанным правилом перехода от одного базиса к другому, определится равенством

$$I_x = I_\xi \cos^2\alpha + I_\eta \cos^2\beta + I_\zeta \cos^2\gamma .$$

Этому равенству можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Вдоль оси *Ox* отложим отрезок

$$OM = \frac{1}{\sqrt{I_x}} .$$

Точка M имеет координаты

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_x}}, \; \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I_x}}, \; \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_x}} .$$

Тогда

$$I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_\zeta \zeta^2 = 1 \text{ или } \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 ,$$

где $a = \left(\sqrt{I_\xi}\right)^{-1}$, $b = \left(\sqrt{I_\eta}\right)^{-1}$, $c = \left(\sqrt{I_\zeta}\right)^{-1}$.

Геометрическим местом точек M является поверхность эллипсоида, называемого эллипсоидом инерции, с полуосями, обратными корням квадратным из соответствующих главных моментов инерции. Каждой точке твердого тела можно сопоставить эллипсоид инерции. По построению, длина отрезка, соединяющего данную точку с произвольной точкой поверхности эллипсоида, обратно пропорциональна корню квадратному из момента инерции твердого тела относительно оси соответствующего направления. Вместе с массой эллипсоид инерции полностью определяет инертные свойства твердого тела.

Тензор угловой скорости. Введем в рассмотрение антисимметричный тензор второго ранга угловой скорости (http://dee.karelia.ru/files/vector/P3end.htm)

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот тензор имеет всего три независимых компоненты, преобразующиеся при изменении базиса по общему тензорному правилу (1).

Имеет место утверждение: три независимые компоненты антисимметричного тензора второго ранга

$$\Omega_{12} = \omega_3, \quad \Omega_{23} = \omega_1, \quad \Omega_{13} = -\omega_2$$

преобразуются как компоненты аксиального вектора угловой скорости $\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Действительно, при повороте осей

$$\omega_1' = \Omega_{23}' = l_{2m} l_{3n} \Omega_{mn} = l_{21}(l_{32}\Omega_{12} + l_{33}\Omega_{13}) + l_{22}(l_{31}\Omega_{21} + l_{33}\Omega_{23}) + l_{23}(l_{31}\Omega_{31} + l_{32}\Omega_{32}) =$$
$$= \Omega_{12}(l_{21}l_{32} - l_{22}l_{31}) + \Omega_{23}(l_{22}l_{33} - l_{23}l_{32}) + \Omega_{31}(l_{23}l_{31} - l_{21}l_{33})$$

или

$$\omega_1' = l_{11}\omega_1 + l_{12}\omega_2 + l_{13}\omega_3.$$

Аналогично для компонент ω_2' и ω_3' получим:

$$\omega_2' = l_{21}\omega_1 + l_{22}\omega_2 + l_{23}\omega_3,$$
$$\omega_3' = l_{31}\omega_1 + l_{32}\omega_2 + l_{33}\omega_3.$$

При преобразовании инверсии, когда правая система координат переходит в левую, т.е.:

$$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1; \quad \vec{e}_2' = \vec{e}_2; \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_3,$$

то

$$\Omega_{12} \to \Omega_{12}' = -\Omega_{12}, \quad \Omega_{23} \to \Omega_{23}' = \Omega_{23}, \quad \Omega_{31} \to \Omega_{13}' = -\Omega_{31},$$

т.е.

$$\omega_1 \to \omega_1' = \omega_1; \qquad \omega_2 \to \omega_2' = -\omega_2; \qquad \omega_3 \to \omega_3' = -\omega_3.$$

Компоненты вектора $\vec{\omega}$ преобразуются как компоненты аксиального вектора.

Таким образом, компонентам антисимметричного тензора $\mathbf{\Omega}$ в рассматриваемой системе координат может быть поставлен в соответствие вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Справедливо и обратное утверждение.

S. A. BERESTOVA, E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA

TENSOR FORMALISM IN MECHANICS OF RIGID BODY

There is suggested the way of introducing tensor characteristics in Engineering Mechanics teaching when describing the motion of a rigid body with a clear physical content and possibility of using it for recordings of quantitative invariant relations.

Получено 25.05.2011

ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 531.1

В. Д. БЕРТЯЕВ, Л. А. БУЛАТОВ, Д. Ю. САЗОНОВ, О. А. ТКАЧ
Тульский государственный университет, Тула

МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрен вопрос использования тензоров второго ранга при изучении теоретической механики. Показано, что их применение, не нарушая обычный стиль изложения дисциплин при подготовке студентов инженерных специальностей и направлений подготовки, позволяет существенно сократить громоздкие выводы при изложении теоретического материала и наполнить его понятным физическим смыслом.

Существенное сокращение часов (практически в два раза), отводимых на проведение аудиторных занятий основных теоретических дисциплин, в том числе и на теоретическую механику, приводит к необходимости конспективного изложения теоретического материала. Подобного рода практика приводит к необходимости исключать, при чтении лекций, подробные выводы основных зависимостей и теорем изучаемого курса, что неизбежно ведет к непониманию учащимися излагаемого материала. С другой стороны министерство образования требует повышения фундаментальной подготовки студентов ВПО при дальнейшем сокращении часов аудиторных занятий.

Такого рода противоречий можно избежать частично изменив изложение общетеоретических и общематематических курсов дисциплин. При этом желательно широко использовать векторную и тензорную символику при выводе изучаемых в курсе теорем и положений.

Отметим, что применение тензоров второго ранга в теоретической и аналитической механике хорошо известно [1–3]. В работе [2] эти вопросы подробно и детально обсуждены. Однако при изложении теоретического материала в ней отсутствует единый подход к применению тензорного исчисления в теоретической механике. Так, при изложении кинематики твердого