

УДК 539.3

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ВЛИЯНИЕ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ НА УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

Разработана математическая модель деформирования одноосно армированного композита, позволяющая при расчете эффективных механических характеристик учесть наличие упругого межфазного слоя. Получены зависимости эффективных характеристик исследуемого материала от объемной доли арматуры и относительной толщины слоя. Полученные расчетные оценки сопоставлены с результатами использования альтернативных упрощенных методик.

Введение. Несмотря на широкое практическое использование армированных полимеров, в настоящее время отсутствует общепринятая расчетная методика, позволяющая прогнозировать их механические характеристики во всем диапазоне варьирования объемного содержания и свойств компонент. В частности, упрощенная теория армирования и различные варианты метода «самосогласования» [1] применимы только при малых объемных долях арматуры. Полученные на основе известных вариационных методов [2] верхние и нижние расчетные оценки некоторых эффективных свойств армированных полимеров существенно расходятся [3]. Данное обстоятельство снижает эффективность использования вариационного подхода для описания исследуемых композитов. Кроме того, большинство аналитических методов, применяемых для определения их эффективных свойств, не позволяют получить подробную информацию о распределении напряжений в исследуемой гетерогенной среде вблизи включений. Что затрудняет использование данных методов при прогнозировании прочностных параметров композитов на полимерной матрице.

Исключением в этом смысле является методика, основанная на использовании трехфазной модели композита [3]. В рамках данной методики для каждой компоненты композита записываются общие решения уравнений теории упругости. Преимущество использования трехфазной модели перед многими альтернативными методами механики композитов заключается также в относительной простоте учета наличия в исследуемом материале межфазного слоя. В работе [4] представлена модификация трехфазной модели, позволившая учесть деформируемый межфазный слой при анализе упругих свойств дисперсно-наполненного полимера. Однако комплекс процессов, протекающих на границе раздела наполнителя с полимером, приводит к возникновению межфазного слоя не только в дисперсно-наполненных, но и в волоконно-армированных полимерных композитах.

В связи с этим, актуальной является задача совершенствования методики трехфазного моделирования композита для получения расчетных оценок эффективных механических характеристик волоконно-армированного полимера, содержащего деформируемый межфазный слой.

Определение эффективных упругих характеристик. На рисунке 1 представлена четырехфазная модель структуры однонаправленно волоконно-армированного композита. Данная модель представляет собой макроскопически однородную трансверсально изотропную среду, в которую помещен составной цилиндр бесконечной длины и радиуса поперечного сечения b . Упругие характеристики среды соответствуют эффективным упругим свойствам исследуемого композита. Составной цилиндр образован тремя элементами. Внутренняя часть радиуса поперечного сечения a моделирует армирующий элемент. Упругое деформирование материала этой части характеризуется модулем Юнга E_f и коэффициентом Пуассона ν_f материала арматуры. Промежуточная часть толщиной l моделирует межфазный слой. Она характеризуется модулем Юнга E_l и коэффициентом Пуассона ν_l . Внешний слой составного цилиндра имеет толщину $b - l$ и образован материалом матрицы с модулем Юнга E_m и коэффициентом Пуассона ν_m . Описанная система отличается от трехфазной модели, представленной в работе [3], наличием элемента, моделирующего межфазный слой.

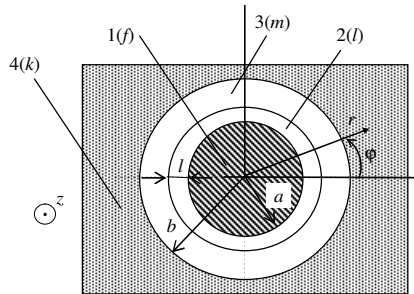


Рисунок 1 – Четырехфазная модель волоконно-армированного композита:
 1 – волокно; 2 – межфазный слой;
 3 – матрица; 4 – композит

Средний радиус поперечного сечения волокна a и толщина межфазного слоя l являются структурными параметрами композита. При заданных a и l

общий радиус составного цилиндра b вычисляется по формуле $b = \frac{a}{\sqrt{c}}$. Здесь

c – объемная доля волокон. Для анализа напряженно-деформированного состояния четырехфазной модели введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . Ось z совпадает с осью составного цилиндра (см. рисунок 1).

Для того чтобы получить расчетные оценки эффективных упругих характеристик композита, рассмотрим предложенную модель в четырех различных деформационных состояниях.

1 *Одноосное деформирование вдоль волокон.* Для четырехфазной модели на значительном расстоянии от составного цилиндра ($r \rightarrow \infty$) зададим следующие значения компонент тензора деформаций – $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{rz} = \epsilon_{r\varphi} = 0$,

$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_0$. Здесь ε_0 – произвольно выбранное ненулевое значение. При таких условиях на бесконечности общее решение уравнений теории упругости для тела из трансверсально изотропного материала в цилиндрических координатах имеет вид [5]

$$u_r = A_1 r + \frac{A_2}{r}, \quad u_z = \varepsilon_0 z, \quad u_\varphi = 0. \quad (1)$$

Константы A_1 и A_2 определяются из граничных условий. Зададим распределения упругих смещений (1) в каждой части четырехфазной модели

$$u_r^i = A_1^i r + \frac{A_2^i}{r}, \quad u_z^i = \varepsilon_0 z, \quad u_\varphi^i = 0.$$

Здесь индекс i обозначает элемент модели. Если $i = f$, то соответствующие величины относятся к волокну; если $i = l$ – к межфазному слою; если $i = m$ – к матрице; если $i = f -$ к макроскопически однородной трансверсально изотропной среде, моделирующей композит. Из граничных условий необходимо определить 8 констант A (по две для каждой их четырех компонент модели). Для обеспечения ограниченности деформаций при $r = 0$ необходимо принять $A_2^f = 0$. Энергетический принцип гомогенизации Эшелби [6]

будет выполняться в том случае, если $A_2^k = 0$. Отсутствие радиальной деформации при $r \rightarrow \infty$ означает, что $A_1^k = 0$. Следовательно, неизвестными остаются только 5 констант. Эти константы определяются из условий неразрывности радиальных смещений u_r и компоненты напряжения σ_{rr} на границе контакта волокна с межфазным слоем ($r = a$) и на границе «межфазный слой – матрица» ($r = a + l$). Также для определения констант используется условие неразрывности радиального смещения при переходе от матрицы к композиту ($r = b$). После определения констант можно определить радиальное напряжение в композите. Для этого используем условие неразрывности напряжения σ_{rr} при $r = b$: $\sigma_{rr}^k = \sigma_{rr}^m \Big|_{r=b}$. Осевое напряжение σ_{zz} в композите определим как усредненное значение соответствующего напряжения по поперечному сечению составного цилиндра

$$\sigma_{zz}^k = \frac{1}{b^2} \left[a^2 \sigma_{zz}^f + l(2a+l) \sigma_{zz}^l + (b^2 - a^2 - l^2 - 2al) \sigma_{zz}^m \right].$$

Зная компоненты тензора напряжений σ_{rr}^k , σ_{zz}^k , возникающие в композите при заданной деформации ε_0 , можно определить две компоненты тензора модулей упругости исследуемого трансверсально изотропного материала

$$C_{11} = \frac{\sigma_{zz}^k}{\varepsilon_0}, \quad C_{12} = \frac{\sigma_{rr}^k}{\varepsilon_0}.$$

После выполнения описанных математических действий для компонент C_{11} и C_{12} получим следующие аналитические выражения

$$C_{11} = c[2G_f + \lambda_f(1+B_1)] + (c_b - c)[2G_l + \lambda_l(1+B_2)] + (1-c_b)[2G_m + \lambda_m(1+B_3)],$$

$$C_{12} = \lambda_m + (2G_m + \lambda_m)B_3.$$

В представленных соотношениях для сокращения записи введены следующие обозначения

$$c_b = c(1+q)^2, \quad c_a = \frac{1}{(1+q)^2}, \quad B_1 = \frac{B_2(2G_l + \lambda_l) - \lambda_f + \lambda_l}{G_f + \lambda_f + G_l},$$

$$B_2 = \frac{c_a c_b (\lambda_f - \lambda_l) - B_3 (G_f + \lambda_f + G_l) (1 - c_b)}{c_b [G_f + \lambda_f + G_l - c_a (G_f + \lambda_f - G_l - \lambda_l)]},$$

$$B_3 = c_a \frac{(G_f + \lambda_f + G_l)(\lambda_l - \lambda_m) + c_a G_l (1 + B_4)(\lambda_f - \lambda_l)}{(G_f + \lambda_f + G_l)[G_l B_4 (1 - c_b) + G_m (1 + c_b) + \lambda_m c_b]},$$

$$B_4 = \frac{G_l (G_f + \lambda_f)(1 + c_a) + G_l (G_l + \lambda_l)(1 - c_a) + \lambda_l (G_f + \lambda_f)}{G_l (G_f + \lambda_f)(1 - c_a) + G_l (G_l + \lambda_l)(1 + c_a) - G_l \lambda_l}.$$

Здесь $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$, $\lambda_i = \frac{E_i \nu_i}{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}$ – модуль сдвига и вторая кон-

станта Ламе материала соответствующей компоненты модели; $q = l/a$ – относительная толщина межфазного слоя.

2 *Сдвиг в плоскости армирования.* Для исследуемой модели зададим при $r \rightarrow \infty$ условия чистого сдвига: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zy} = 0$, $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_0$. В цилиндрических координатах эти условия примут вид — $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = 0$, $\varepsilon_{zr} = \varepsilon_0 \cos \varphi$, $\varepsilon_{z\varphi} = -\varepsilon_0 \sin \varphi$. Общее решение уравнений теории упругости при данном режиме деформирования для каждой компоненты модели имеет вид

$$u_r^i = u_\varphi^i = 0, \quad u_z^i = \left(A_1^i r + \frac{A_2^i}{r} \right) \cos \varphi. \quad (2)$$

Как и при ранее рассмотренном деформационном состоянии условие ограниченности деформаций при $r = 0$ приводит к $A_2^f = 0$, а принцип Эшелби – к $A_2^k = 0$. В соответствии с заданным режимом чистого сдвига $A_1^k = 2\varepsilon_0$. Для определения оставшихся пяти констант используем условия неразрывности смещения u_z и компоненты напряжения σ_{zr} на границах раздела «волокно – межфазный слой» и «межфазный слой – матрица». В качестве пятого уравнения для определения констант выступает условие неразрывности смещения u_z на границе раздела матрицы и композита. В соответствии с решением (2) при заданном режиме деформирования распределение напряжений в среде, моделирующей композит, не зависит от радиальной координаты r . Поэтому после определения констант A можно вычислить

возникающее в композите сдвиговое напряжение $\sigma_{zr}^k = \sigma_{zr}^m \Big|_{r=b}$. Затем определяется модуль сдвига композита в плоскости армирования

$$G_{12} = \frac{\sigma_{zr}^k}{2\varepsilon_0 \cos \varphi}.$$

Для данной характеристики композита можно получить аналитическое выражение

$$G_{12} = G_m \frac{G_m(1-c_b) + G_l B_5(1+c_b)}{G_m(1+c_b) + G_l B_5(1-c_b)}.$$

$$\text{Здесь введено обозначение } B_5 = \frac{G_l(1-c_a) + G_f(1+c_a)}{G_l(1+c_a) + G_f(1-c_a)}.$$

3 *Радиальное деформирование в плоскости изотропии.* Зададим на бесконечности следующие значения компонент тензора деформации: $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\varphi} = 0$, $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_0$. Общее решение уравнений теории упругости для каждой компоненты модели запишем в виде

$$u_r^i = A_1^i r + \frac{A_2^i}{r}, \quad u_z^i = u_\varphi^i = 0.$$

Условие ограниченности деформаций, принцип гомогенизации и заданные значения деформаций на бесконечности позволяют определить три константы: $A_2^f = A_2^k = 0$, $A_1^k = \varepsilon_0$. Остальные пять констант определяются из условий неразрывности радиальных смещения u_r и напряжения на σ_{rr} границах раздела между элементами модели ($r = a$; $r = a + l$; $r = b$). При этом условие неразрывности напряжения на границе контакта матрицы с композитом ($r = b$) позволяет определить величину $\sigma_{rr}^k = \sigma_{rr}^m \Big|_{r=b}$.

Рассматриваемый режим деформирования принято [3] характеризовать объемным модулем упругости при плоском деформационном состоянии, который вычисляется по формуле – $K_{23} = \frac{\sigma_{rr}^k}{2\varepsilon_0}$.

Выполнив описанные математические преобразования, получим

$$K_{23} = \frac{(2G_m + \lambda_m)(G_l B_6 + G_m)}{G_m + (G_m + \lambda_m)c_b + G_l B_6(1-c_b)} - G_m.$$

Здесь введено обозначение

$$B_6 = \frac{(G_l + \lambda_l)(G_f + \lambda_f + G_l) + c_a G_l (G_f + \lambda_f - G_l - \lambda_l)}{G_l (G_f + \lambda_f + G_l) - c_a G_l (G_f + \lambda_f - G_l - \lambda_l)}.$$

4 *Сдвиг в плоскости изотропии.* Для рассматриваемой модели композита зададим на бесконечности условия чистого сдвига: $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\varphi} = 0$,

$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_0$. Общее решение уравнений теории упругости для компонент модели в данном случае будет иметь вид [3, 5]

$$\begin{aligned} u_z^i = 0, \quad u_r^i &= \left[A_1^i r - 4\nu_i A_2^i r^3 + 4(1 - \nu_i) \frac{A_3^i}{r} + \frac{A_4^i}{r^3} \right] \cos 2\varphi; \\ u_\varphi^i &= \left[-A_1^i r + 2(3 - 2\nu_i) A_2^i r^3 - 2(1 - 2\nu_i) \frac{A_3^i}{r} + \frac{A_4^i}{r^3} \right] \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь под коэффициентом ν_k подразумевается коэффициент Пуассона композита в плоскости изотропии ν_{23} . Для армирующего элемента условие ограниченности деформаций при $r = 0$ подразумевает $A_3^f = A_4^f = 0$. Для композита требование ограниченности при $r \rightarrow \infty$ подразумевает $A_2^k = 0$. Для выполнения энергетического принципа гомогенизации необходимо, чтобы $A_3^k = 0$. Отсутствие константы A_3^k приводит к тому, что в выражениях смещений u_r^k , u_φ^k и напряжений σ_{rr}^k , $\sigma_{r\varphi}^k$ присутствует только одна упругая характеристика композита — модуль сдвига в плоскости изотропии G_{23} . В соответствии с заданным режимом деформирования $A_1^k = \varepsilon_0$. Для определения оставшихся констант составляются уравнения неразрывности смещений u_r , u_φ и компонент напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ на границах раздела $r = a$, $r = a + l$, $r = b$. В полученной при этом системе 12 уравнений 12 неизвестных: две константы для арматуры A_1^f , A_2^f ; по четыре константы для межфазного слоя и матрицы $A_1^l, A_2^l, A_3^l, A_4^l, A_1^m, A_2^m, A_3^m, A_4^m$; одна константа для композита A_4^k ; модуль сдвига композита G_{23} . В результате решения этой нелинейной системы уравнений определяется модель сдвига композита в плоскости изотропии. Аналитическое выражение для величины G_{23} не приводится в силу его громоздкости. Следует отметить, что при рассматриваемом режиме деформирования, в отличие от трех предыдущих, напряжения в композите ($r > b$) зависят от радиальной координаты r . Данная зависимость обусловлена ненулевой константой A_4^k .

Таким образом, рассмотрев четыре деформационных состояния предложенной модели, определили пять эффективных упругих характеристик композита: C_{11} , C_{12} , G_{12} , K_{23} , G_{23} . Зная эти характеристики, можно определить и традиционно используемые механические параметры одноосно армированного композита: продольный E_L и поперечный E_T модули упругости, коэффициенты Пуассона в плоскости армирования ν_{12} и в плоскости изотропии ν_{23} :

$$v_{12} = \frac{C_{12}}{2K_{23}}, \quad E_L = C_{11} - 4v_{12}^2 K_{23}, \quad E_T = \frac{4G_{23}K_{23}E_L}{E_L(K_{23} + G_{23}) + 4v_{12}^2 G_{23}K_{23}};$$

$$v_{23} = \frac{E_L(K_{23} - G_{23}) - 4v_{12}^2 G_{23}K_{23}}{E_L(K_{23} + G_{23}) + 4v_{12}^2 G_{23}K_{23}}.$$

Пример использования математической модели

Получим расчетные оценки упругих свойств однонаправленно армированного стеклопластика. В качестве материала связующего используем эпоксидную смолу: $E_m = 3,1$ ГПа; $v_m = 0,4$. Матрица армирована E -стекловолокном: $E_f = 68,6$ ГПа; $v_f = 0,22$. Значения упругих характеристик компонент заимствованы из работы [7]. На рисунке 2 представлены результаты расчета поперечного модуля упругости E_T данного композита без учета межфазного слоя ($l = 0$). Можно отметить, что расчетные зависимости данной характеристики от объемного содержания волокон существенно нелинейны. Для расчета эффективных упругих характеристик армированных композитов в настоящее время широко используются упрощенные математические модели. Так, в работе [8] для величины E_T предложено следующее соотношение

$$E_T = \frac{E_m E_f}{c E_m + (1 - c) E_f - \frac{c(1 - c)(E_f v_m - E_m v_f)}{c E_f + (1 - c) E_m}}. \quad (4)$$

В монографии [7] поперечный модуль упругости стеклопластиков рекомендуется вычислять по формуле

$$E_T = \frac{E_m E_f}{E_m + E_f (1 - v_m^2)(1 - \sqrt{c})}. \quad (5)$$

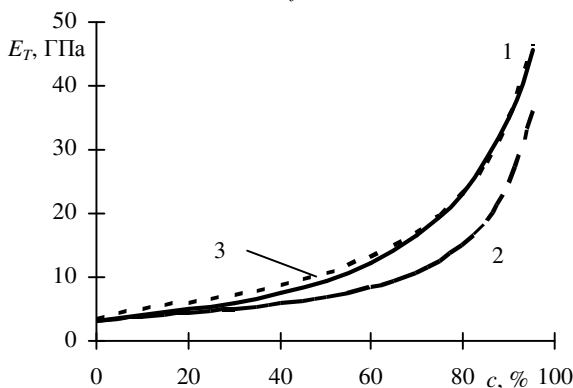


Рисунок 2 – Зависимость поперечного модуля упругости композита от объемной доли волокон. Кривая 1 – по разработанной модели; 2 – соотношение (4); 3 – формула (5)

При выводе соотношений (4) и (5) композит рассматривается как система из двух последовательно соединенных упругих элементов. Подобный упрощенный подход к моделированию исследуемого объекта снижает точность расчетных оценок, полученных по данным выражениям. При этом четырехфазная модель (см. рисунок 1) позволяет обеспечить более точный прогноз упругих свойств композита. Анализ зависимостей на рисунке 2 позволяет сделать вывод о том, что результаты использования соотношений (4) соответствуют значениям, полученным на основе более подробной модели, только при малом содержании волокон ($c < 0,2$). При бóльших значениях объемной доли c соотношения (4) приводят к заниженным оценкам эффективного модуля E_T исследуемого композита. Выражение (5) может применяться для расчета поперечного модуля упругости стеклопластиков с большим объемным содержанием волокон ($c > 0,6$). При меньших значениях c использование соотношения (5) приводит к завышенным оценкам жесткости композита.

Разработанная методика позволяет при прогнозировании эффективных характеристик композита учесть наличие межфазного слоя. В армированных полимерах межфазный слой представляет собой некоторую модификацию приграничного объема материала матрицы. Не снижая общности результатов использования четырехфазной модели в расчетном примере примем, что объемный модуль материала межфазного слоя совпадает с объемным модулем материала матрицы $K_l = K_m$. Для получения приемлемых расчетных оценок свойств композита, содержащего межфазный слой, необходимо знать не только механические характеристики, но и толщину данного слоя. Согласно графикам, представленным на рисунке 3, зависимости поперечного модуля E_T и модуля сдвига G_{12} композита от относительной толщины межфазного слоя существенно нелинейны. В результате расчетов было установлено, что данные зависимости имеют тот же общий вид, что и функции $E_T(\sqrt{c})$, $G_{12}(\sqrt{c})$ для композита при отсутствии межфазного слоя.

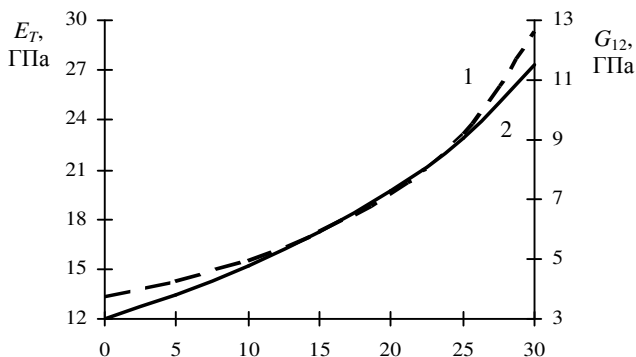


Рисунок 3 – Зависимость поперечного модуля упругости (1) и модуля сдвига в плоскости армирования (2) композита от относительной толщины межфазного слоя при $G_l = 5G_m$.

Заключение. В результате использования разработанной четырехфазной модели волоконно-армированного композита установлено, что упрощенная расчетная методика, основанная на рассмотрении системы из последовательно и параллельно соединенных упругих элементов, позволяет получить приемлемые оценки поперечного модуля упругости и модуля сдвига исследуемого материала только при малых значениях объемной доли волокон ($c < 0,2$). Также показано, что зависимости данных эффективных моделей композита от упругих характеристик межфазного слоя существенно нелинейны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Composite materials.** Mechanics of composite materials / ed. by Sendeckyj G.P. – New York and London: Academic Press, 1974. – Vol. 2. – 640 p.

2 **Гузь, А. Н.** Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3 т. / А. Н. Гузь, Л. П. Хорошун, Г. А. Ванин. – Киев: Наукова думка, 1982. – Т. 1: Механика материалов. – 368 с.

3 **Кристенсен, Р.** Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

4 **Черноус, Д. А.** Анализ механического поведения дисперсно-армированных нанокompозитов. Метод расчета эффективных упругих характеристик / Д. А. Черноус, С. В. Шилько, С. В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 85–90.

5 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

6 **Эшелби, Дж.** Континуальная теория дислокаций / Дж. Эшелби. – М.: Иностранная литература, 1963. – 247 с.

7 **Тарнопольский, Ю. М.** Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. М. Скудра. – Рига: Зинатне, 1966. – 260 с.

8 Тканые конструкционные композиты / под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. – Москва: Мир, 1991. – 432 с.

D. A. CHERNOUS

THE EFFECT OF THE INTERPHASE LAYER ON THE ELASTIC RESPONSES OF REINFORCED COMPOSITES

A mathematical model of deformation of uniaxially reinforced composite has been developed. It allows taking into account the presence of elastic interphase layer when calculating effective mechanical characteristics. The dependences of the effective characteristics of the studied material on the reinforcement volume fraction and the layer thickness ratio have been obtained. The received estimates have been compared with the results of the use of alternative simplified methods.

Получено 05.03.2011