**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012**

УДК 531.8

В. Д. БЕРТЯЕВ, Л. А. БУЛАТОВ, А. Е. КИРЕЕВА

Тульский государственный университет, Россия

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Представлена математическая модель шарнирно-рычажного механизма, которая позволяет определить законы движения всех звеньев, координаты узловых точек, а также скорости и ускорения звеньев и узловых точек. Рассмотрены основные теоремы и принципы теоретической механики, применяемые для исследования динамического поведения шарнирно рычажного механизма. Описан алгоритм решения рассматриваемой задачи с помощью MathCAD.

Плоские шарнирные механизмы широко распространены в современном машиностроении в связи с присущими им достоинствами: высокой технологичностью изготовления, долговечностью и ремонтоспособностью. Шарнирные механизмы имеют большую надежность, что обусловлено меньшим износом вращательных соединений звеньев, наличием в них трения качения. Рабочие поверхности вращательных пар могут быть изготовлены точнее, чем поступательные. В шарнирно-рычажных механизмах отпадает необходимость в силовом замыкании соединений, что снижает уровень вибрации. Техническое обслуживание вращательных пар проще, чем поступательных, а следовательно, повышаются надежность и стабильность характеристик механизмов при длительной эксплуатации.

Динамическое и кинематическое исследование шарнирно-рычажных механизмов играет важную роль на этапе предварительного проектирования узлов и звеньев сложных машин. Проектируя новую машину или прибор, разработчик должен уметь создавать такие кинематические схемы, чтобы выходные звенья механизма совершали достаточно точные движения, определяемые технологическим процессом. При этом часто приходится искать способы получения заданных движений всего механизма или его отдельных звеньев в зависимости от тех или иных ограничений определяемых условиями функционирования машины. Без глубокого знания кинематических и динамических характеристик механизмов, входящих в современный агрегат, невозможно спроектировать машину с параметрами, близкими к оптимальным, что, безусловно, отражается на производительности, надежности, долговечности машины и на качестве выпускаемой продукции.

В представленной работе рассматривается алгоритм расчета шарнирно-рычажных механизмов, основанный на использовании средств вычислительной техники.

Объектом кинематического исследования являются плоские многозвенные шарнирно-рычажные механизмы с одной степенью свободы, для которых известны все геометрические размеры и закон движения ведущего звена

$$\varphi(t) = \omega_0 t \ ,$$

где ω_0 – угловая скорость ведущего звена.

В состав многозвенного шарнирно-рычажного механизма могут входить:

– кривошипы, которые двигаются вращательно вокруг неподвижных осей, перпендикулярных плоскости xOy;

– шатуны, совершающие плоскопараллельное движение в плоскости xOy;

– ползуны, перемещающиеся возвратно-поступательно;

– неподвижное звено.

Положение любого звена механизма определяется параметрами: углом φ_k относительно какой-либо координатной оси и координатами X_k и Y_k.

Плоский шарнирно-рычажный механизм изображается в произвольном положении. В качестве системы отсчета принимается правая декартова система координат. Начало системы координат располагается на оси подшипника ведущего звена, а углы поворота звеньев φ_k, $k = 1, 2, 3$ отсчитываются против часовой стрелки от горизонтальной оси Ox.

Для составления уравнений геометрических связей выделяются точки механизма, траектории которых известны. Закон плоскопараллельного движения твердого тела можно определить по двум любым точкам этого тела, поэтому в качестве базовых примем две точки звена. Из двух точек, одновременно принадлежащих кривошипу, одна является зависимой, т. е. определение закона движения одной точки приводит к возможности нахождения закона движения для другой.

Используя выделенные точки, строят векторные контуры, с помощью которых можно составить уравнения геометрических связей. Для их получения записываются векторные соотношения в проекциях на оси координат Ox и Oy. В результате образуется замкнутая система уравнений для определения законов движения звеньев механизма. Ее решение можно найти различными методами, как аналитическими, так и численными. Подробное описание решения систем нелинейных уравнений численными методами изложено, например, в работах [1, 2]. Уравнения позволяют найти угловые координаты звеньев, совершающих вращательные и плоскопараллельные движения, а также законы движения звеньев, движущихся поступательно.

Угловые и линейные скорости звеньев механизма определяются дифференцированием по времени системы уравнений геометрических связей. Эта система является линейной относительно неизвестных угловых и линейных скоростей звеньев, поэтому ее можно представить в матричной форме

$$A\,X_v = B\,, \tag{1}$$

где A – матрица коэффициентов левых частей уравнений; X_v – вектор неизвестных угловых и линейных скоростей звеньев, B – вектор правых частей уравнений.

Решение системы (1) имеет вид

$$X_v = A^{-1}\,B\,.$$

Для определения угловых и линейных ускорений звеньев механизма дважды продифференцируем по времени уравнения геометрических связей. Представляя, как и ранее, линейную относительно угловых и линейных ускорений звеньев систему уравнений в матричной форме, получим:

$$A\,X_a = C\,, \tag{2}$$

где X_a – вектор неизвестных угловых и линейных скоростей звеньев, C – вектор правых частей уравнений.

Решение системы уравнений (2) записывается в виде

$$X_a = A^{-1}\,C\,.$$

Представленные соотношения определяют математическую модель кинематического поведения механизма, которая позволяет найти законы движения всех звеньев механизма, координаты узловых точек, а также скорости и ускорения звеньев и узловых точек.

Для составления дифференциального уравнения движения механической системы с одной степенью свободы под действием приложенных сил можно применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (или уравнения Лагранжа 2-го рода):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k N_k\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum_k N_k\left(\vec{F}_k^i\right),$$

где T – кинетическая энергия системы; $\sum_k N_k\left(\vec{F}_k^e\right)$, $\sum_k N_k\left(\vec{F}_k^i\right)$ – суммы мощностей внешних и внутренних сил.

Окончательное выражение кинетической энергии рассматриваемой системы всегда может быть записано в виде:

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}}(\varphi)\omega^2 ,$$

где $I_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции механизма.

Для механической системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными шарнирами, сумма мощностей внутренних сил равна нулю.

Учитывая выражения для движущегося момента $M_{\text{д}}$ и полезной нагрузки $\vec{F}_{\text{н}}$, получим

$$\sum_k N_k \left(\vec{F}_k^e\right) = M_{\text{д}}(\varphi, \omega)\omega = M_{\text{д}}^0(\varphi)\omega^2$$

Дифференциальное уравнение движения механизма

$$I_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} I'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 = M_{\text{д}}(\varphi, \dot{\varphi}),$$

где $I'_{\text{пр}}(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} I_{\text{пр}}(\varphi)$ – производная от момента инерции механизма по углу поворота ведущего звена.

Из решения дифференциального уравнения второго порядка с учётом начальных условий, получаются закон движения ведущего звена $\varphi(t)$, его угловая скорость $\dot{\varphi}(t) = \omega$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}(t) = \varepsilon$.

Для определения реакций внешних и внутренних связей плоский шарнирно-рычажный механизм расчленяется на отдельные звенья, и изображаются реакции внешних и внутренних связей каждого звена.

Применяя к каждому телу механизма теорему о движении центра масс (в проекциях на оси координат) и теорему об изменении кинетического момента (для кривошипов относительно осей вращения, для шатунов относительно осей, проходящих через центр масс), можно получить систему уравнений, которые позволяют определить все неизвестные реакции опорной плоскости и дифференциальное уравнение движения механизма. Решение поставленной задачи сводится к численному интегрированию дифференциального уравнения движения механизма и решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных динамических реакций внешних и внутренних связей.

Задача интегрирования дифференциального уравнения связана с большим количеством предварительных вычислений и может быть условно разбита на пять блоков:

– решение системы уравнений геометрических связей или вычисление геометрических соотношений;

– вычисление кинематических соотношений;

– вычисление приведенного момента инерции механизма $I_{\text{пр}}(\varphi)$ и приведенного момента внешних сил $M_{\text{пр}}(\varphi, \dot{\varphi})$;

– вычисление производной от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена $I'_{\text{пр}}(\varphi)$;

– численное интегрирование дифференциального уравнения.

Все это может быть проведено в MathCAD несколькими способами, использующими различные встроенные процедуры-функции. Отличие этих способов и методов заключается во времени вычислений, которое требуется для нахождения: решения системы уравнений геометрических связей, приведенного момента инерции механизма $I_{\text{пр}}(\varphi)$ и его производной $I'_{\text{пр}}(\varphi)$, приведенного момента внешних сил $M_{\text{пр}}(\varphi, \dot{\varphi})$, а также решения дифференциального уравнения движения.

Подробно о методах решения данного дифференциального уравнения изложено в [1]. Ниже рассмотрен алгоритм и приведет пример документа MathCAD, в котором обеспечивается минимальное время вычислений.

Для интегрирования системы уравнений при заданных начальных условиях используем встроенную в пакет MathCAD процедуру-функцию rkfixed, реализующую метод Рунге-Кутта [1] и имеющую следующий вид:

$$\text{rkfixed}(U, T_0, T_k, N, D),$$

где $U = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \dot{\varphi}(0) \end{bmatrix}$ – вектор начальных условий; T_0, T_k – граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциального уравнения. Начальные условия, заданные в векторе U, – это значения решения в точке T_0; N – число точек (не считая начальной), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк $N+1$ в матрице, возвращаемой функцией rkfixed; $D(t, U) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t, U) \\ \dot{\omega}(t, U) \end{bmatrix}$ – вектор, элементами которого являются угловая скорость и угловое ускорение маховика, определяемых уравнениями.

Матрица, получаемая в результате решения, содержит три столбца; первый – со значениями времени t, второй – со значениями угла поворота $\varphi(t)$, третий – со значениями угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений для нахождения динамических реакций внешних и внутренних связей сложностей не вызывает и реализуется любым из методов, реализованных в MathCAD [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Бертяев, В. Д.** Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум: учеб. пособие / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.

2 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики: в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 352 с.; Т. 2. – 640 с.

V. D. BERTYAEV, L. A. BULATOV, A. E. KIREEVA

KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF FLAT MECHANISMS WITH THE USE OF COMPUTER TECHNOLOGY

This paper presents a mathematical model describing the kinematic behaviour of hinged-lever mechanism, which allows you to define the laws of movement of all the links of the mechanism, the coordinates of the grid points, as well as the speed and acceleration of the links and junction points. This article presents the main theorem and principles of theoretical mechanics, applied to study the dynamic behavior of the hinged lever mechanism. The algorithm is considered which provides solution this problem with MathCAD.

Получено 18.04.2012

ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012

УДК 37.012.7 : 531

Д. С. ИВАНОВ, С. С. ТКАЧЕВ, М. Ю. ОВЧИННИКОВ

Московский физико-технический институт (Государственный университет), г. Долгопрудный, Россия
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, г. Москва

ПОЛУНАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ОБУЧЕНИЯ МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО МЕХАНИКЕ И УПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрен подход к обучению молодых специалистов по механике и управлению, реализованные на кафедре теоретической механики Московского физико-технического института. В обучении используется лабораторное оборудование, с помощью которого студенты знакомятся с особенностями, возникающими при реализации алгоритмов управления на реальных объектах управления. Таким образом, осуществляется переход от теоретических исследований к практике. Приведено описание используемого лабораторного оборудования.

Проектирование и создание любого прибора или комплексного устройства вне зависимости от их сложности и назначения можно разделить на следующие этапы:

– постановка задачи, формулировка основных идей;

– математическое описание идеи, построение математической модели;