

УДК 531/534

В. К. ТАРАСОВ, С. В. СИДОРЕНКО

Тульский государственный университет, Россия

О КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РАКЕТЫ

Рассмотрено движение управляемой ракеты, вращающейся по крену. В работе на основе динамических и кинематических уравнений Эйлера составлена система дифференциальных уравнений второго порядка. В результате ее решения на ПЭВМ получены зависимости, определяющие параметры движения ракеты.

При исследовании работы бортовой аппаратуры управляемой ракеты (гироскопов, акселерометров, приемников спутниковой навигационной системы и прочих) необходимо знать условия её эксплуатации. Особый интерес вызывают условия эксплуатации бортовой аппаратуры на вращающейся ракете. К ракете приложены сила тяжести в центре масс (ЦМ) и аэродинамическая сила в центре давления (ЦД). При этом центр масс и центр давления не совпадают, из-за чего могут возникать угловые колебания.

Цель работы – нахождение характеристик прецессионного движения и нутационных колебаний в зависимости от скорости крена, параметров ракеты, начальных условий.

Предположим, что вращающаяся вокруг своей оси симметрии ракета занимает в некоторый момент времени положение, изображенное на рисунке 1. Так как теорема об изменении момента количества движения материальной системы относительно центра масс O имеет ту же форму, что и относительно неподвижной точки [1–6], то при изучении вращательного движения ракеты ее можно рассматривать как трехстепенной гироскоп с неподвижной точкой O . На ракету действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и аэродинамическая сила \vec{R} (рисунок 1). Аэродинамическая сила, направлена в сторону, противоположную скорости \vec{v} центра масс ракеты O , а точка B приложения силы (центр давления) находится на оси ракеты на расстоянии a от O . Сила тяжести $m\vec{g}$ не

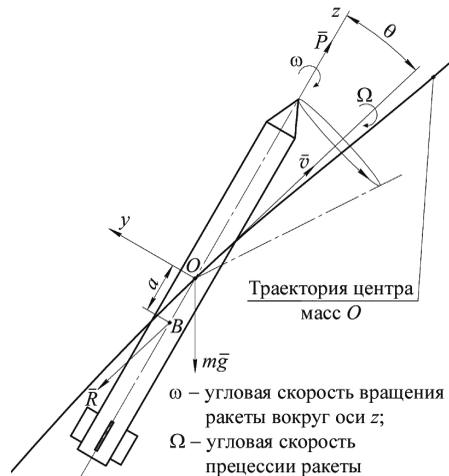


Рисунок 1 – Прецессионное движение ракеты

создает момента относительно точки O , а момент аэродинамической силы относительно этой точки определяется равенством [2, 3]

$$M_R = \bar{a} \times \bar{R},$$

следовательно,

$$M_x = R \cdot a \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad M_y = -R \cdot a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad M_z = 0.$$

Тогда динамические уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = R a \sin \theta \cos \varphi, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = -R a \sin \theta \sin \varphi, \\ C \frac{dr}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $A = B$, C – моменты инерции ракеты; $R = kSC_R$ – сила аэродинамического сопротивления; $k = \sigma v^2/2$ – скоростной напор набегающего невозмущенного потока; σ – массовая плотность воздуха; S – площадь миделевого сечения ракеты; C_R – безразмерный аэродинамический коэффициент [4].

К этим уравнениям еще необходимо присоединить кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) p , q , r , получим три дифференциальных уравнения второго порядка относительно трех эйлеровых углов ψ , θ , φ :

$$\begin{cases} A(\ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \\ + (C - A)(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = M_x, \\ A(\ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - \ddot{\theta} \sin \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi) + \\ + (A - C)(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = M_y, \\ C(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi}) = M_z. \end{cases} \quad (3)$$

Вспользуемся математическим пакетом Maple и аналитически решим получившуюся систему уравнений второго порядка (3). В результате работы ПЭВМ и нормализации уравнений угловые ускорения $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ запишутся в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \ddot{\psi} &= \frac{C\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + C\dot{\theta}\dot{\phi} + M_y\cos\varphi + M_x\sin\varphi - 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta}{A\sin\theta}; \\
 \ddot{\theta} &= \frac{M_x\sin\theta\cos\varphi - M_y\sin\theta\sin\varphi + (A-C)\dot{\psi}^2\cos\theta - C\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta}{A\sin\theta} - \\
 &\quad - \frac{(A-C)\dot{\psi}^2\cos^3\theta}{A\sin\theta}; \\
 \ddot{\phi} &= \frac{(2AC-C^2)\dot{\psi}\dot{\theta}\cos^2\theta - C^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - M_yC\cos\theta\cos\varphi}{AC\sin\theta} + \\
 &\quad + \frac{-M_xC\cos\theta\sin\varphi + AC\dot{\psi}\dot{\theta}\sin^2\theta + M_zA\sin\theta}{AC\sin\theta}.
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Проинтегрируем систему уравнений (4) и получим эйлеровы углы ψ , θ . Зададим начальные условия: экваториальный момент инерции $A = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, осевой момент инерции $C = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, угловая скорость ракеты $\omega = 80 \text{ рад/с}$, расстояние от центра масс до центра давления $a = 0,005 \text{ м}$, угол нутации $\theta_0 = 1^\circ$, угол прецессии $\psi_0 = 0,05^\circ$, $\sigma = 11,57 \text{ г/м}^3$ – массовая плотность воздуха (при 8°C на высоте 1000 м).

В результате решения на ПЭВМ построены графики зависимости угла прецессии и нутации от времени для заданных значений параметров (рисунки 2, 3). Здесь видно развитие прецессионных и нутационных колебаний с частотами 25 и 15 Гц соответственно.

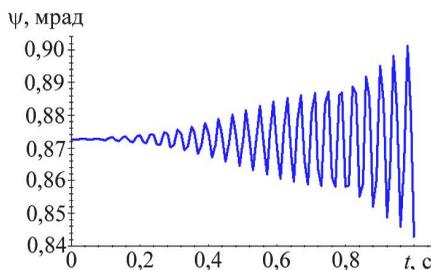


Рисунок 2 – Зависимость угла прецессии от времени при угловой скорости вращения $\omega = 80 \text{ рад/с}$

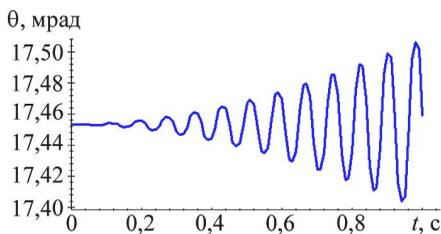


Рисунок 3 – Зависимость угла нутации от времени при угловой скорости вращения $\omega = 80 \text{ рад/с}$

Построим графики углов ψ , θ при угловой скорости вращения ракеты $\omega = 40 \text{ рад/с}$. На рисунках 4 и 5 видны прецессионное и нутационное колебания с частотами 12,5 и 6,25 Гц соответственно.

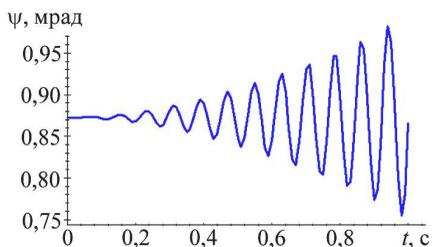


Рисунок 4 – Зависимость угла прецессии от времени при угловой скорости вращения $\omega = 40$ рад/с

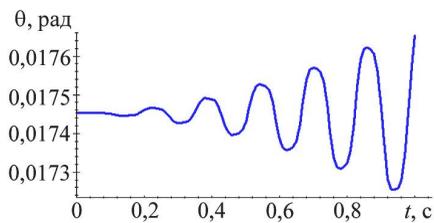


Рисунок 5 – Зависимость угла нутации от времени при угловой скорости вращения $\omega = 40$ рад/с

На рисунках 6 и 7 можно увидеть, как амплитуды прецессионных и нутационных колебаний зависят от расстояния между центром масс и центром давления. В момент времени 5 с центр масс совпадает с центром давления, и амплитуда прецессионного и нутационного колебаний равна нулю.

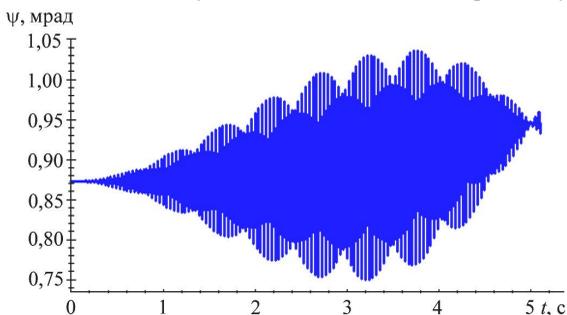


Рисунок 6 – Зависимость угла прецессии от времени

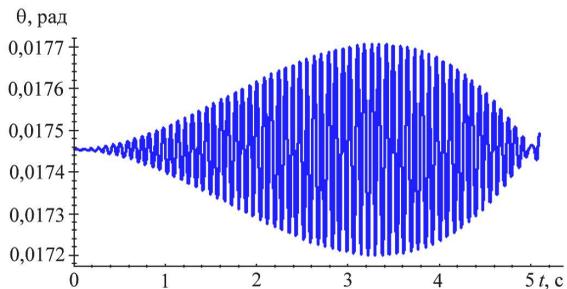


Рисунок 7 – Зависимость угла нутации от времени

Таким образом, получены зависимости, определяющие движение ракеты при заданных параметрах. Прецессионное движение и нутационные колебания зависят как от угловой скорости вращения ракеты, так и от расстояния от центра масс до центра давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Аппель, П.** Теоретическая механика. В 2 т. Т. 2: Динамика системы, аналитическая механика / П. Аппель. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 487 с.
- 2 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2: Динамика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 4-е изд., исправл. – М.: Наука, 1979. – 544 с.
- 3 **Бухгольц, Н. Н.** Основной курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2: Динамика системы материальных точек / Н. Н. Бухгольц. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
- 4 **Дмитриевский, А. А.** Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1979. – 608 с.
- 5 **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика: учеб. пособие. В 10 т. Т. 1: Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд., исправл. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
- 6 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2: Динамика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1983 – 640 с.

V. K. TARASOV, S. V. SIDORENKO

ON VIBRATING MOVEMENT OF A ROTATING MISSILE

The vibrating movement of a guided rotating missile is considered. On the basis of dynamic and kinematic Euler's equations the system for differential equations of second order is constructed. The numerical solution determining the missile movement parameters is obtained.

Получено 18.04.2012

ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012

УДК 620.178.3

С. А. ТЮРИН

ПО «ГОМСЕЛЬМАШ», Гомель

Е. С. ТАРАНОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

КОНТАКТНАЯ УСТАЛОСТЬ ВЫСОКОПРОЧНОГО ЧУГУНА С ШАРОВИДНЫМ ГРАФИТОМ: УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ

В работе впервые апробированы методики и представлены результаты ускоренных испытаний на контактную усталость высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ. Применение данных методов позволило: 1) определить предел контактной выносливости чугуна, численное значение которого сопоставимо с полученным при построении кривой контактной усталости (различие составляет ~ 10 %); 2) сравнить высокопрочный чугун с шаровидным графитом и высокопрочную сталь