

действующих в системе сил не являются гармоническими. Решение данной задачи в линейной постановке не позволяет получить приемлемые оценки кинематических и динамических параметров системы.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1 **Уиттекер, Э. Т.** Курс современного анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1963. – 516 с.

2 **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

3 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

4 **Тарасов, В. К.** Качение цилиндра по внутренней поверхности другого вращающегося цилиндра / В. К. Тарасов, Ю. П. Смирнов // Вестник Тульского государственного университета. Сер. «Актуальные вопросы механики». – Вып. 9. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – 92 с.

*V. K. TARASOV, Yu. P. SMIRNOV*

#### **NONLINEAR OSCILLATIONS OF A SYSTEM CONSISTING OF TWO CIRCULAR CYLINDERS**

There are considered oscillatory motions of two interacting cylinders with axisymmetric location of their masses and the absence of slipping and separation from each other.

Получено 19.09.2013

---

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

---

УДК 69.04

*М. ХАЛЕЦКИ*

*Варшавский университет естественных наук – SGGW, Польша*

#### **АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ РАМНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ**

В работе представлен алгоритм расчёта перемещений узлов (вертикальных и горизонтальных в глобальной, а также в локальных системах координат) и угловых перемещений стержней в плоских рамных конструкциях (рамах и фермах). Расчёт таких перемещений необходим для исследования устойчивости и колебаний конструкций, а также нахождения линий влияния. Алгоритм представлен на примере использования среды MATHEMATICA.

**1 Введение.** При изучении дисциплины «Механика строительных конструкций» студенты определяют линии влияния непрерывных балок и плоских

рам, исследуют устойчивость рам, а также рассчитывают частоты собственных колебаний балок и рам. Для решения названных задач необходимо подсчитать горизонтальные и вертикальные перемещения узлов, а также угловые перемещения стержней, что часто составляет для студентов большую проблему, особенно в случае неортогональных рам (с наклонными стержнями), потому что требует некоторого воображения и сноровки в использовании геометрических зависимостей.

В работе представлен алгоритм вычисления этих перемещений, который опирается на использование так называемой кинематической цепи. Она тесно связана с моментной цепью, представленной в [1], а также с силовой цепью. Разработкой описанного подхода занимался профессор Г. Емелита из Отделения гражданского строительства Варшавского политехнического института. Примеры его использования можно найти в работах ассистентов профессора (например, [2], [3]).

## 2 Основные формулы кинематической цепи. Искомые величины.

Для составления уравнений кинематической цепи используется рисунок 1. Данные: начальная длина горизонтальной  $l_x$  и вертикальной  $l_y$  проекции стержня, горизонтальное  $\Delta x_i$  и вертикальное  $\Delta y_i$  перемещения начала стержня, угол поворота хорды стержня  $\psi$ . Ищем перемещения конца стержня: горизонтальное  $\Delta x_k$  и вертикальное  $\Delta y_k$ . На рисунке обозначен также начальный угол наклона стержня  $\alpha$ . Если длина стержня –  $l$ , а требуется получить длины проекций –  $l'_x$  и  $l'_y$ , то с учетом выражений  $l_x = l \cos \alpha$ ,  $l_y = l \sin \alpha$  и принимая, что угол  $\psi$  мал, т. е.  $\cos \psi \approx 1$ ,  $\sin \psi \approx \psi$ , имеем

$$\begin{aligned} l'_x &= l \cos(\alpha + \psi) = l \cos \alpha \cos \psi - l \sin \alpha \sin \psi \approx l_x - l_y \psi; \\ l'_y &= l \sin(\alpha + \psi) = l \sin \alpha \cos \psi + l \cos \alpha \sin \psi \approx l_y + l_x \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

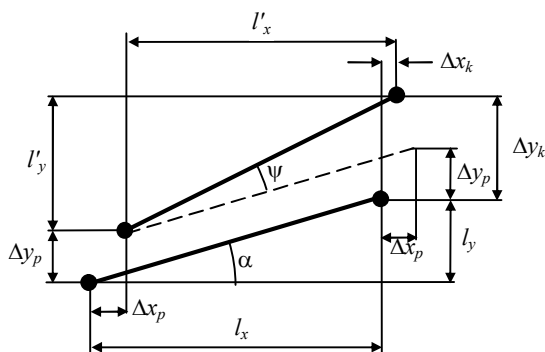


Рисунок 1 – Схема для вывода уравнений кинематической цепи

Соответственно сумма проекций на оси даёт:

$$\begin{aligned} l'_x + \Delta x_i &= l_x + \Delta x_i - (\Delta x_i - \Delta x_k); \\ l'_y + \Delta y_i &= l_y + \Delta y_i + (\Delta y_k - \Delta y_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Окончательно из сравнения (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= \Delta x_i - l_y \psi \Rightarrow \Delta x_i - \Delta x_k - l_y \psi = 0; \\ \Delta y_k &= \Delta y_i + l_x \psi \Rightarrow \Delta y_i - \Delta y_k + l_x \psi = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Такую систему уравнений надо составить для каждого стержня конструкции. Следовательно, если в конструкции имеется  $p$  стержней, то имеем  $2p$  уравнений. Вообще, мы ищем не только перемещения конечных узлов стержней (как мы приняли для вывода уравнений (3)), но также перемещения начальных узлов и углов поворота хорд стержней  $\psi$  – таким образом, мы должны назначить столько входных величин, чтобы система стала однозначно определимой. Этих величин существует  $2w - p$ ; некоторые из них – это нулевые перемещения опор. Надо при этом помнить, что раму следует считать как конструкцию только с шарнирными узлами. Потому, если на самом деле рассматриваемый узел рамы жёсткий, то мы его учитываем путем введения узлового момента. Поэтому как в шарнирно-неподвижной опоре, так и в заделке, существуют две связи, и именно столько назначается в них нулевых перемещений (для шарнирно-подвижной опоры соответственно – одна связь и одно нулевое перемещение).

Остальных величин надо найти столько, сколько существует состояний возможных деформаций

$$\Lambda = 2w - p - w_p, \quad (4)$$

где  $w_p$  – число всех опорных связей.

**3 Силовая цепь для вопроса расчёта частоты собственных колебаний.** Целью статьи не является подробное описание конструкции силовой цепи, в отличие от представления алгоритма для кинематической цепи, однако для лучшего понимания идеи работы надо вкратце описать силовую цепь. Система уравнений этой цепи содержит уравнения равновесия моментов в каждом узле и уравнения принципа возможных перемещений для всех узловых сил в каждом возможном состоянии деформации (их число представляет формула (4)). Для расчёта частот собственных колебаний нужны трансформационные формулы метода перемещений (зависимости узловых моментов и сил от углов поворота хорд стержней и перемещений узлов); если расположение масс в раме примем таким образом, что они сосредоточиваются только в узлах, то трансформационные формулы будут такие, как показано на рисунке 2 [2]. Поэтому, чтобы написать уравнения равновесия моментов и уравнения принципа возможных перемещений, надо подсчитать перемещения узлов в локальных системах координат, связанных с каждым из стержней, и именно поэтому нужна кинематическая цепь.

	$T_i = \frac{6EJ}{a^2}(\varphi_i + \varphi_k) + \frac{12EJ}{a^3}(v_i - v_k); T_k = -T_i;$ $M_i = \frac{2EJ}{a}(2\varphi_i + \varphi_k) + \frac{6EJ}{a^2}(v_i - v_k);$ $M_k = \frac{2EJ}{a}(2\varphi_k + \varphi_i) + \frac{6EJ}{a^2}(v_i - v_k)$
	$T_i = \frac{3EJ}{a^2}\left(\varphi_i + \frac{v_i - v_k}{a}\right); T_k = -T_i;$ $M_i = \frac{3EJ}{a}\left(\varphi_i + \frac{v_i - v_k}{a}\right); \psi = \frac{v_i - v_k}{a}$

Рисунок 2 – Трансформационные формулы для разных типов стержней

Алгоритм расчёта кинематической цепи представим на примере определения частоты собственных колебаний рамы, показанной на рисунке 3. Массы сосредотачиваются в узлах 1, 2, 3 и 4.

Для этой рамы надо знать  $2w - p = 2 \cdot 6 - 6 = 6$  перемещений. Рама имеет две шарнирно-неподвижные опоры, поэтому 4 из этих перемещений будут нулевыми. Число возможных состояний деформации  $\Lambda = 2 \cdot 6 - 6 - 4 = 2$ . Первое состояние возникает в результате размещения в узле 1 виртуальной шарнирной опоры, подвижной в вертикальном направлении, и горизонтального перемещения  $u_1$  узла 3; второе состояние – в результате постановки такой же опоры в узле 3 и горизонтального перемещения  $u_{II}$  узла 1. Эти состояния представляют рисунки 3, б и 3, в. Кроме того, вычисляя узловые силы или моменты согласно с формулам рисунка 2, перемещения  $v_i$  или  $v_k$  считаем суммами перемещений при отдельных состояниях деформации. Уравнения силовой цепи будут следующими:

– уравнения моментов в узлах:

$$M_1^1 + M_1^2 = 0, \quad M_2^1 + M_2^3 = 0, \quad M_3^5 + M_3^4 + M_3^2 = 0; \quad (5)$$

– уравнения принципа возможных перемещений в первом состоянии:

$$T_3^5 v_{3(I)}^5 + T_3^4 v_{3(I)}^4 - T_4^4 v_{4(I)}^4 + T_3^2 v_{3(I)}^2 + T_1^2 v_{1(I)}^2 + T_1^1 v_{1(I)}^1 - T_2^1 v_{2(I)}^1 - T_2^3 v_{2(I)}^3 - T_4^3 v_{4(I)}^3 - T_4^6 v_{4(I)}^6 - (B_1 \Delta_{1(I)} + B_2 \Delta_{2(I)} + B_3 \Delta_{3(I)} + B_4 \Delta_{4(I)}) = 0; \quad (6)$$

– уравнения принципа возможных перемещений во втором состоянии:

$$T_1^2 v_{1(II)}^2 + T_1^1 v_{1(II)}^1 - T_2^1 v_{2(II)}^1 - T_2^3 v_{2(II)}^3 - (B_1 \Delta_{1(II)} + B_2 \Delta_{2(II)} + B_3 \Delta_{3(II)} + B_4 \Delta_{4(II)}) = 0. \quad (7)$$

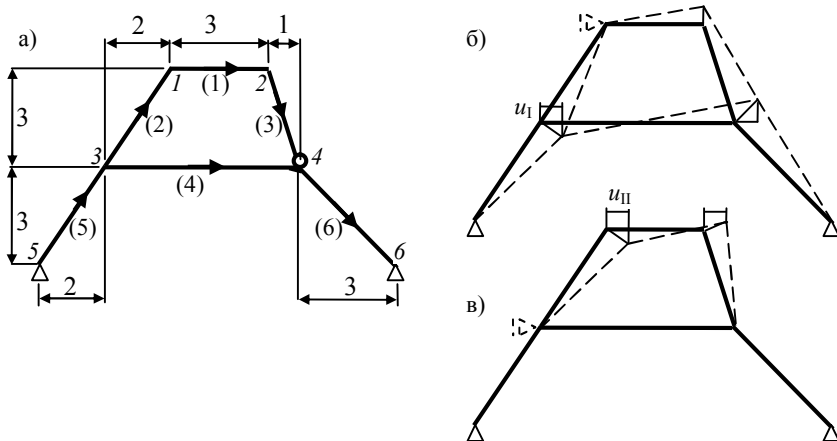


Рисунок 3 – Пример к расчёту перемещений узлов:

*a* – рама с обозначенными узлами и стержнями, *б* – первое состояние деформации, *в* – второе состояние деформации

В вышеуказанных уравнениях символ  $X_w^p$  обозначает величину (момент, силу, локальное перемещение), относящуюся к узлу  $w$ , связанному со стержнем  $p$ ;  $\Delta_w = \sqrt{(\Delta x_w)^2 + (\Delta y_w)^2}$  – полное перемещение узла  $w$ ;  $B_w = m\omega^2 \Sigma \Delta_{wi}$  – силу инерции массы, сосредоточенной в узле  $w$  ( $\Sigma \Delta_{wi}$  – сумма локальных перемещений узла, подсчитанных для всех состояний деформации).

Для работы программы важным является определение направления стержня, то есть того, какой узел считается начальным, и какой – конечным. На рисунке 3, *a* направление указано стрелками.

**4 Структура алгоритма.** Алгоритм можно использовать как в такой среде, которая даёт возможность символического расчёта (например, MATHEMATICA), так и в такой, которая такой возможности не даёт (MATLAB). Однако в средах второго вида пользователь вынужден ввести действительные величины перемещений (то есть намного меньшее количество длин стержней), из-за чего ему трудно заметить некоторые важные закономерности. Особенно это касается студентов, которые обладают малым опытом. Поэтому алгоритм представлен на примере среды MATHEMATICA.

**4.1 Входные данные.** Первый набор данных, которые надо ввести пользователю, – это координаты узлов – матрица  $wspw$ , в которой каждая строка включает координаты  $x$  и  $y$  данного узла:

$$wspw = a\{\{4, 6\}, \{7, 6\}, \{2, 3\}, \{8, 3\}, \{0, 0\}, \{11, 0\}\}$$

Координаты соответствуют рисунку 3,  $a$  и умножены на коэффициент  $a$  [м]. Умножение не является необходимым, но помогает соблюсти общую форму расчёта и принять во внимание единицы измерения результатов (это можно сделать только в среде, которая даёт возможность символического расчёта).

Далее надо ввести номера элементов – матрицу  $e1$ , в которой каждая строка содержит номер начального и конечного узла данного стержня;  $n$ -я строка соответствует  $n$ -му элементу рамы и  $n$ -й строке матрицы  $wspw$ :

$$e1 = \{ \{1, 2\}, \{3, 1\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{4, 6\} \}$$

Потом вводим номера и значения тех перемещений, которые известны. Номерам соответствует вектор  $nprz$ , значениям – вектор  $wprz$ . Принцип нумерации похож на используемый в программах МКЭ, но существуют некоторые отличия (рисунок 4): в представленном в статье алгоритме сначала нумеруются по очереди все горизонтальные перемещения узлов, потом все вертикальные, а наконец – углы поворота хорд стержней. Причиной принятия такого порядка является вытекающая из него лёгкость построения глобальной матрицы системы уравнений кинематической цепи (см. п. 4.2).

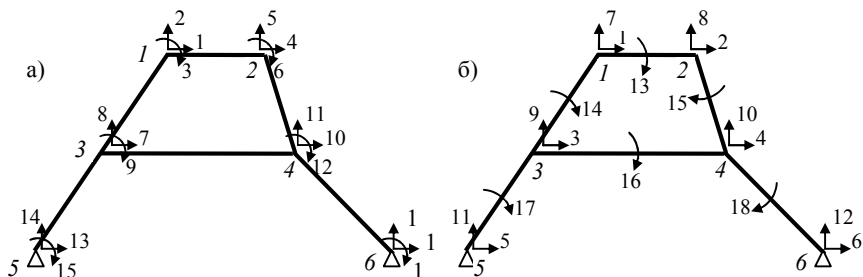


Рисунок 4 – Порядок нумерации в МКЭ (а) и в представленном алгоритме (б)

Как уже упоминалось ранее, для рассчитываемой рамы надо ввести шесть перемещений, из которых четыре – нулевые (в соответствии с рисунком 4, б, их номера 5, 6, 11 и 12), а остальные два – перемещения, соответствующие двум возможным состояниям деформации. Согласно рисункам 3, б и 3, в мы их назовём  $u1$  и  $u2$ ; а их номера – 1 и 3. Если деформацию системы рассчитываем как сумму деформаций при всех возможных состояниях (такие суммы необходимы для трансформационных формул), то векторы  $nprz$  и  $wprz$  принимают вид

$$nprz = \{1, 3, 5, 6, 11, 12\} \quad wprz = \{u2, u1, 0, 0, 0, 0\}$$

Для удобства обслуживания программа подсчитывает число перемещений, которые надо ввести – это параметр  $ruch$ , равный  $2w - p$ . Значение этого параметра должно быть равно числу элементов в векторах  $prz$  и  $wprz$  – в противном случае редуцированная матрица (см. п. 4.3) не будет квадратной, что препятствует решению системы уравнений.

Существенная разница по сравнению с программами МКЭ состоит в том, что в представленном алгоритме не вводятся опоры. Причины две: бывают ситуации, когда для опоры надо указать перемещение, даже если она неподвижна (например, при вычислении линий влияния), появляется также необходимость введения виртуальной опоры в месте, в котором в действительности её нет (рисунок 3). Поэтому, опция введения опор усложняла бы алгоритм не только для программиста, но тоже и для пользователя, которому пришлось бы решать, когда опора перестает быть опорой, а также когда узел превращается в опору.

**4.2 Матрица коэффициентов.** В системе уравнений кинематической цепи существует  $2p$  уравнений вида (3). Для рассматриваемой рамы:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1 - \Delta x_2 - l_{y1} \psi_1 &= 0; & \Delta y_1 - \Delta y_2 + l_{x1} \psi_1 &= 0; \\
 \Delta x_3 - \Delta x_1 - l_{y2} \psi_2 &= 0; & \Delta y_3 - \Delta y_1 + l_{x2} \psi_2 &= 0; \\
 \Delta x_2 - \Delta x_4 - l_{y3} \psi_3 &= 0; & \Delta y_2 - \Delta y_4 + l_{x3} \psi_3 &= 0; \\
 \Delta x_3 - \Delta x_4 - l_{y4} \psi_4 &= 0; & \Delta y_3 - \Delta y_4 + l_{x4} \psi_4 &= 0; \\
 \Delta x_5 - \Delta x_3 - l_{y5} \psi_5 &= 0; & \Delta y_5 - \Delta y_3 + l_{x5} \psi_5 &= 0; \\
 \Delta x_4 - \Delta x_6 - l_{y6} \psi_6 &= 0; & \Delta y_4 - \Delta y_6 + l_{x6} \psi_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Матричная форма этой системы представлена на рисунке 5. Матрица коэффициентов ( $macglob$  – глобальная матрица системы) состоит из шести частей. Размеры частей I, II, IV и V –  $p \times w$ . Каждая строка частей I и V соответствует последующему стержню конструкции. В столбце, соответствующем начальному узлу стержня, стоит “1”, конечному узлу “-1” (тем самым, зная форму матрицы коэффициентов, можно восстановить конфигурацию конструкции: например, стержень 2 начинается в узле 3, а кончается в узле 1, поэтому в строке 2 и столбце 1 стоит “1”, а в столбце 1 располагается “-1”). Часть I соответствует перемещениям  $\Delta x$ , часть V – перемещениям  $\Delta y$ . Поэтому, матрицы I и V конструируются следующим образом:

- 1 Создается нулевая матрица размером  $p \times w$ .
- 2 Для  $i$ -й строки нулевой матрицы отсчитывается из первого столбца и  $i$ -й строки матрицы  $e_1$  номер начального узла  $i$ -го элемента и в столбце матрицы  $e_1$  с тем самым номером вставляется “1”.

3 Для той же самой строки нулевой матрицы отсчитывается из второго столбца и *i*-й строки матрицы  $e_{11}$  номер конечного узла *i*-го элемента и в столбце с тем самым номером матрицы  $e_{11}$  вставляется “1”.

Шаги 2 и 3 можно легко выполнить с помощью одного цикла.

$$\begin{array}{c}
 \text{I} \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \text{III} \\
 \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y5} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{y6} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{x1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{x2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{x3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{x4} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{x5} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & l_{x6}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 \Delta x_1 \\
 \Delta x_2 \\
 \Delta x_3 \\
 \Delta x_4 \\
 \Delta x_5 \\
 \Delta x_6 \\
 \Delta y_1 \\
 \Delta y_2 \\
 \Delta y_3 \\
 \Delta y_4 \\
 \Delta y_5 \\
 \Delta y_6 \\
 \Psi_1 \\
 \Psi_2 \\
 \Psi_3 \\
 \Psi_4 \\
 \Psi_5 \\
 \Psi_6
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

IV
V
VI

Рисунок 5 – Матричная форма системы уравнений (8)

Части II и IV – нулевые матрицы: те самые, что созданы на шаге 1. Части III и VI – диагональные матрицы размера  $p \times p$ , которые соответствуют угловым перемещениям стержней; часть III содержит длины проекций стержней на ось *y* (величины  $l_y$ ), часть VI – на ось *x* (величины  $l_x$ ). Они создаются из матрицы, содержащей эти величины, – в программе она называется *wekt*. Для нашей рамы

$$\text{wekt} = \{ \{3a, 0\}, \{2a, 3a\}, \{a, -3a\}, \{6a, 0\}, \{2a, 3a\}, \{3a, -3a\} \}$$

Конструкция матрицы III таким образом заключается в том, чтобы создать диагональную матрицу из второго столбца матрицы *wekt* (но взятого с отрицательным знаком!), матрицы VI – из первого столбца.

Как видим, глобальная матрица системы уравнений имеет  $2p$  строк и  $2w + p$  столбцов.



4.3 Редуцированная матрица коэффициентов и вектор правой части системы. Конечно, некоторые перемещения известны – мы их ввели в вектора  $wprz$  и  $wprz$ . Эти перемещения учитываются в двух шагах:

1 Из глобальной матрицы вычёркиваются соответствующие этим перемещениям столбцы, но в отличие от МКЭ не вычёркиваются строки; номера этих столбцов находятся в векторе  $wprz$ ;

2 Из вычеркнутых столбцов создаётся новая матрица, которую надо умножить на вектор  $wprz$  с отрицательным знаком, результат – это вектор в правой стороне системы уравнений.

В нашем случае вычёркиваем столбцы 1, 3, 5, 6, 11 и 12. Вектор правой стороны ( $wps$ ) представляется следующим образом:

$$wps = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_2 - u_1 \\ 0 \\ -u_1 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Редуцированная матрица коэффициентов ( $macred$ ) квадратная, что делает возможным решить систему уравнений кинематической цепи.

4.4. Расчёт перемещений в глобальной системе координат. Расчёт перемещений заключается в решении матричного уравнения:

$$macred \cdot przem = wps \tag{9}$$

где неизвестная – вектор  $przem$ . Если подсчитываем деформацию конструкции как сумму деформаций при всех возможных состояниях, то для нашей рамы результат будет следующим:

$$przem = \left\{ u_2, u_1, -\frac{2u_2}{3}, \frac{2u_1}{3} + \frac{u_2}{3}, -\frac{2u_1}{3}, u_1, \frac{2u_1 + 3u_2}{9a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{5u_1}{18a}, -\frac{u_1}{3a}, -\frac{u_1}{3a} \right\}$$

Однако таким же образом, как и в МКЭ, это только те перемещения, которых мы не знали ранее. Для расчёта силовой или моментной цепи нужны все перемещения – в том числе введенные нами в векторе  $wprz$ . Поэтому вектор  $przem$  надо дополнить вектором  $wprz$ . Эта процедура включает следующие стадии:

- 1 Создается нулевой вектор  $przem1$  с  $2w + p$  элементами,
- 2 Отсчитываются номера тех столбцов матрицы  $macglob$ , которые не вычеркнулись, и последующими элементами вектора  $przem$  заменяются элементы вектора  $przem1$  с отсчитанными номерами,
- 3 Остальные элементы в векторе  $przem1$  (то есть те, номера которых находятся в векторе  $nprz$ ) заменяются последующими элементами вектора  $wprz$ .

Созданный таким образом полный вектор перемещений имеет вид:

$$przem1 = \left\{ u_2, u_2, u_1, u_1, 0, 0, -\frac{2u_2}{3}, \frac{2u_1}{3} + \frac{u_2}{3}, -\frac{2u_1}{3}, u_1, 0, 0, \right. \\ \left. \frac{2u_1 + 3u_2}{9a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{5u_1}{18a}, -\frac{u_1}{3a}, -\frac{u_1}{3a} \right\}$$

Перемещения узлов в направлении  $x$  – это элементы вектора  $przem1$  с номерами от 1 до  $w$ , перемещения в направлении  $y$  – элементы с номерами от  $w + 1$  до  $2w$ , угловые перемещения стержней – с номерами от  $2w + 1$  до  $2w + p$ :

$$przemx = \{u_2, u_2, u_1, u_1, 0, 0\}$$

$$przem_y = \left\{ -\frac{2u_2}{3}, \frac{2u_1}{3} + \frac{u_2}{3}, -\frac{2u_1}{3}, u_1, 0, 0 \right\}$$

$$przem_\psi = \left\{ \frac{2u_1 + 3u_2}{9a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{u_1 - u_2}{3a}, \frac{5u_1}{18a}, -\frac{u_1}{3a}, -\frac{u_1}{3a} \right\}$$

Знаки этих перемещений соответствуют глобальной системе координат: положительный элемент вектора  $przemx$  – перемещению узла вправо, положительный элемент вектора  $przem_y$  – перемещению вверх, положительный элемент вектора  $przem_\psi$  – повороту хорды стержня против часовой стрелки.

**4.5 Расчёт перемещений в локальных системах координат.** Однако для трансформационных формул нужны перемещения в локальных системах координат, связанных с каждым из стержней. Расчёт локальных перемещений заключается в использовании формул (рисунок 6):

$$\begin{aligned} v_i &= \Delta x_i \sin \alpha - \Delta y_i \cos \alpha; \\ v_k &= \Delta x_k \sin \alpha - \Delta y_k \cos \alpha; \\ u &= \Delta x_i \cos \alpha + \Delta y_i \sin \alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

Знак поперечных перемещений  $v_i$  (начального) и  $v_k$  (конечного) согласован с трансформационными формулами из рисунка 2. Продольные перемещения  $u$  нужны в случае расчёта колебаний систем со стержнями с непрерывным распределением масс (к такому случаю формулы из рисунка 2 не подходят). Как видим, для формул (10) требуются синусы и косинусы углов  $\alpha$ , определяющих наклон стержней к оси  $x$ ; в то же время для расчёта этих функции нужны длины стержней. Соответствующие векторы представлены ниже:

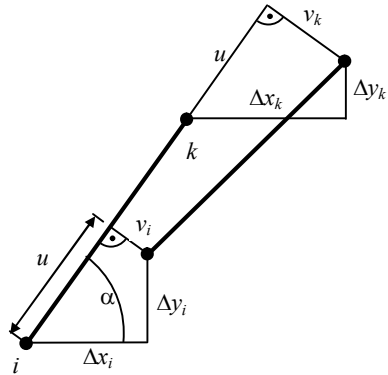


Рисунок 6 – Определение локальных перемещений

$$dlug=\{3a, \sqrt{13} a, \sqrt{10} a, 6a, \sqrt{13} a, 3\sqrt{2} a\} \text{ (длины элементов)}$$

$$\text{cosinus}=\{1, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 1, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$$\text{sinus}=\{0, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$$v_i=\{\frac{2u_2}{3}, \frac{\sqrt{13}u_1}{3}, -\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}u_1+\sqrt{10}u_2}{3}, \frac{2u_1}{3}, 0, -\sqrt{2}u_1\}$$

$$v_k=\{-\frac{2u_1+u_2}{3}, \frac{\sqrt{13}u_2}{3}, -\sqrt{\frac{2}{5}}u_1, -u_1, \frac{\sqrt{13}u_1}{3}, 0\}$$

$$u=\{u_2, 0, -\sqrt{\frac{2}{5}}u_1, u_1, 0, 0\}$$

Векторы  $v_i$ ,  $v_k$  и  $u$  представляют собой комплект перемещений, необходимых для того, чтобы записать трансформационные формулы и решить уравнения силовой или моментной цепи. В каждом из этих векторов  $i$ -й элемент относится к  $i$ -му стержню. Например, для стержня 1 из нашей рамы (двухсторонне закреплён) берём первые элементы векторов  $v_i$  и  $v_k$ , что даёт:

– узловые моменты

$$M_1^1 = \frac{2EJ}{3}(2\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{6EJ}{9} \left( \frac{2}{3}u_{II} - \left( -\frac{2u_I + u_{II}}{3} \right) \right);$$

$$M_2^1 = \frac{2EJ}{3}(2\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{6EJ}{9} \left( \frac{2}{3}u_{II} - \left( -\frac{2u_I + u_{II}}{3} \right) \right);$$

– узловые силы

$$T_1^1 = -T_2^1 = \frac{6EJ}{9}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{12EJ}{27} \left( \frac{2}{3}u_{II} - \left( -\frac{2u_1 + u_{II}}{3} \right) \right).$$

Если же пишем уравнения принципа возможных перемещений для данного состояния деформации, то в элементах векторов  $v_i, v_k$  и  $u$  мы должны учесть только те слагаемые, которые соответствуют этому состоянию – остальные равны 0. Поэтому, например в уравнении для второго состояния деформации (7), примем  $u_1 = 0$  и получим:

– перемещения сосредоточенных масс:

$$\Delta_{w(II)} = \sqrt{(przemx_{w(II)})^2 + (przemy_{w(II)})^2};$$

$$\Delta_{1(II)} = \sqrt{(u_{II})^2 + \left(-\frac{2}{3}u_{II}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}u_{II}; \quad \Delta_{2(II)} = \sqrt{(u_{II})^2 + \left(\frac{1}{3}u_{II}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}u_{II};$$

$\Delta_{3(II)} = \Delta_{4(II)} = 0$ , так как во втором состоянии узлы 3 и 4 не перемещаются;

– уравнение принципа возможных перемещений:

$$T_1^2 \frac{\sqrt{13}}{3}u_{II} + T_1^1 \frac{2}{3}u_{II} - T_2^1 \frac{2}{3}u_{II} - T_2^3 \frac{\sqrt{10}}{3}u_{II} - \left( B_1 \frac{\sqrt{13}}{3}u_{II} + B_2 \frac{\sqrt{10}}{3}u_{II} \right) = 0.$$

Конечно, перемещения можно найти, не зная кинематической цепи, – для этого используются обычные геометрические зависимости. Но многие опытные преподаватели вуза наверняка скажут, что у студентов с этим много проблем, зато кинематическая цепь решается почти автоматически.

**5 Применение кинематической цепи к моментной цепи.** Рисунок 7 представляет сложную конструкцию, для которой «ручной» подсчёт перемещений очень трудоемкий. Одна клетка имеет размер  $1 \times 1$  м. Для этой рамы вычислим углы поворота хорд стержней, необходимых для моментной цепи, которая (как представляется в [1]) нужна, например, для исследования устойчивости (на рисунке 7 – в случае нагружения большой вертикальной силой  $S$ , приложенной к узлу 13).

Четыре неподвижных опоры требуют ввести восемь нулевых перемещений ( $w_p = 8$ ). Согласно формуле (4) существуют  $2 \cdot 16 - 21 - 8 = 3$  возможных состояния деформации. Примем, что они будут вызваны углами поворота хорд стержней: 1 ( $\psi_1$ ), 8 ( $\psi_2$ ) и 15 ( $\psi_3$ ). Согласно с принятым в алгоритме порядком нумерации перемещений (см. рисунок 4) векторы  $nprz$  и  $wprz$  имеют вид:

$$nprz = \{1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20, 33, 40, 47\}$$

$$wprz = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$$

(т. е. нулевые перемещения в опорах в направлении  $x$  имеют номера от 1 до 4, в направлении  $y$  – от 17 до 20, углы поворота хорд стержней 1, 8 и 15 – соответственно 33, 40 и 47).

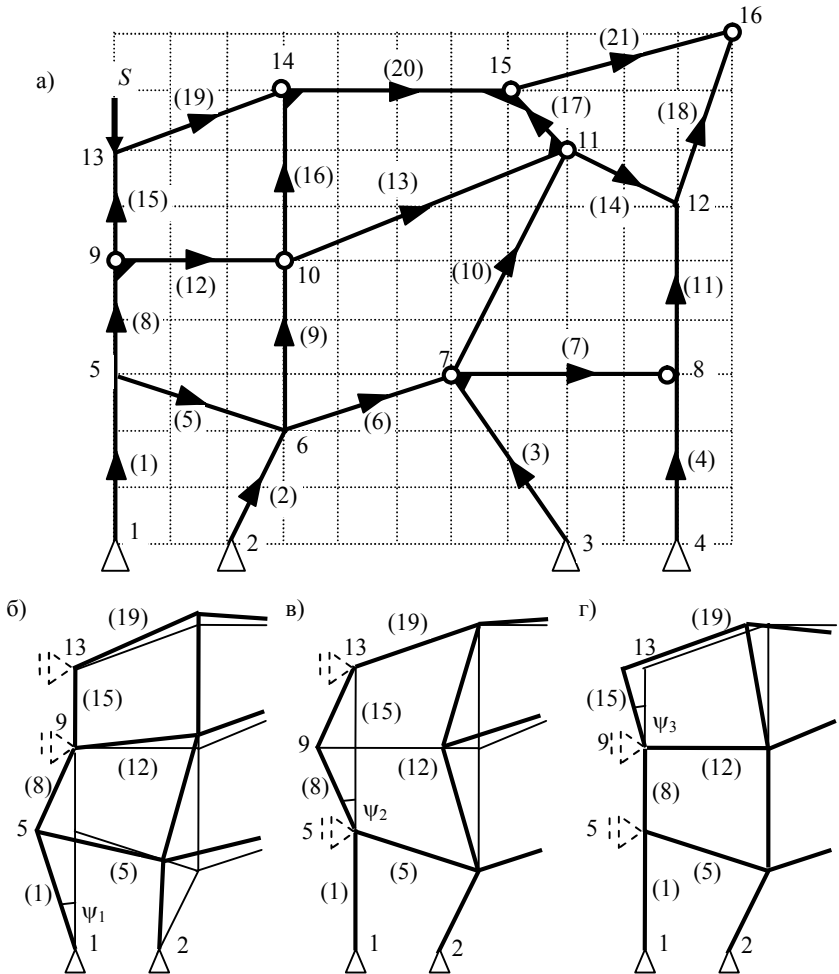


Рисунок 7 – Сложная рама, нагруженная осевой силой  $S$  в узле 13:  
 а – общий вид, б – первое состояние деформации, в – второе состояние деформации,  
 г – третье состояние деформации

Система уравнений кинематической цепи содержит 42 неизвестные, что для компьютера не представляет большой проблемы, однако в связи с большим объёмом распечатки опустим вычисления и представим только их ре-

зультаты, касающиеся всех стержней (таблица 1). Напомним, что согласно части 2, несмотря на реальные виды соединений между стержнями, все эти соединения считаем шарнирными.

Таблица 1 – Выражения углов поворота хорд

Стержень	Угол поворота хорды	Стержень	Угол поворота хорды
1	$\psi_1$	12	$0,4286\psi_1$
2	$1,2857\psi_1$	13	$-0,4578\psi_1 + 0,25\psi_2$
3	$0,5844\psi_1$	14	$0,5016\psi_1 - 0,625\psi_2$
4	$0,5844\psi_1$	15	$\psi_3$
5	$0,4286\psi_1$	16	$0,1429\psi_1 + 0,6667\psi_3$
6	$-0,8182\psi_1$	17	$1,3442\psi_1 - 0,5\psi_2 + 2\psi_3$
7	$0,2922\psi_1$	18	$0,8846\psi_1 - 0,5682\psi_2 + 0,9091\psi_3$
8	$\psi_2$	19	$0,4286\psi_1$
9	$0,1429\psi_1 + 0,6667\psi_2$	20	$-0,9083\psi_1 + 0,4375\psi_2 - 0,5\psi_3$
10	$0,0828\psi_1 + 0,625\psi_2$	21	$0,808\psi_1 - 0,5795\psi_2 + 0,7273\psi_3$
11	$-0,0568\psi_1 + 1,0417\psi_2$		

Полученные величины надо вставить в трансформационные формулы узловых моментов. Но в каждое уравнение принципа возможных перемещений (их три) входят по очереди только те углы, которые получились для того состояния деформации, которому соответствует данное уравнение. Для принятых перемещений (поворот хорд стержней 1, 8 и 15), чтобы получить первое состояние, необходимо ввести виртуальные опоры, подвижные в вертикальном направлении, в узлах 9 и 13 (см. рисунок 7, б); второе – в узлах 5 и 13 (см. рисунок 7, в), третье – в узлах 5 и 9 (см. рисунок 7, г). Это означает, что невозможно получить углы поворота хорд для первого состояния просто подставляя  $\psi_2 = \psi_3 = 0$  (так, как это было в случае перемещений  $v_i$  и  $v_k$ ).

Из различия в длинах стержней 1 и 8 вытекает, что нулевое перемещение узлов 9 и 13 получим только в случае, если стержень 8 повернём на угол  $\psi_2 = -1,5\psi_1$ , а стержень 13 – на угол  $\psi_3 = 0$ . Подобным образом нулевое перемещение узлов 5 и 13 во втором состоянии получим, принимая  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_3 = -\psi_2$ , а нулевое перемещение узлов 5 и 9 в третьем состоянии –  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Углы поворота хорд в каждом из состояний будут такими, как это представлено в таблице 2. Например, для стержня 17 расчет выполнен по формуле

$$1,3442\psi_1 - 0,5\psi_2 + 2\psi_3 = 1,3442\psi_1 - 0,5 \cdot (-1,5\psi_1) + 2 \cdot 0 = 2,0492\psi_1.$$

Таблица 2 – Углы поворота хорд для разных состояний

Стержень	Угол поворота в состоянии 1	Угол поворота в состоянии 2	Угол поворота в состоянии 3
1	$\psi_1$	0	0
2	$1,2857\psi_1$	0	0
3	$0,5844\psi_1$	0	0
4	$0,5844\psi_1$	0	0
5	$0,4286\psi_1$	0	0
6	$-0,8182\psi_1$	0	0
7	$0,2922\psi_1$	0	0
8	$-1,5\psi_1$	$\psi_2$	0
9	$0,8571\psi_1$	$0,6667\psi_2$	0
10	$0,8547\psi_1$	$0,625\psi_2$	0
11	$1,6193\psi_1$	$1,0417\psi_2$	0
12	$0,4286\psi_1$	0	0
13	$-0,8328\psi_1$	$0,25\psi_2$	0
14	$1,4391\psi_1$	$-0,625\psi_2$	0
15	0	$-\psi_2$	$\psi_3$
16	$0,1429\psi_1$	$-0,6667\psi_2$	$0,6667\psi_3$
17	$2,0942\psi_1$	$-2,5\psi_2$	$2\psi_3$
18	$1,7367\psi_1$	$-1,4773\psi_2$	$0,9091\psi_3$
19	$0,4286\psi_1$	0	0
20	$-1,5645\psi_1$	$0,9375\psi_2$	$-0,5\psi_3$
21	$1,6773\psi_1$	$-1,3048\psi_2$	$0,7273\psi_3$

**Заключение.** Состояния деформации должны быть такими, чтобы их было возможно реально получить. Нельзя принять виртуальные опоры в произвольном месте, а углы поворота хорды для любых стержней. Например, невозможно присоединить опоры к узлам 5 и 9, одновременно поворачивая стержень 12 – это физически невозможно и попытка введения таких перемещений приведет к тому, что матрица  $\text{macred}$  делается особенной, а система уравнений кинематической цепи – неразрешимой.

Описанный алгоритм решения задачи позволяет существенно облегчить расчеты сложных рамных конструкций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**1 Халецки, М.** Применение пакета „МАТЕМАТИКА” для решения задач устойчивости рамных конструкций / М. Халецки // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – Гомель: БелГУТ, 2012. – Вып. 6. – С. 244–258.

**2 Hetmański, K.** Zastosowanie Microsoft Excel w mechanice konstrukcji / K. Hetmański. – Warszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 2004. – 88 s.

**3 Witkowska, Z.** Zbiór zadań z mechaniki budowli / Z. Witkowska, M. Witkowski. – Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2008. – 300 s.

**4 Халецки, М.** Применение компьютера для проверки работ студентов / М. Халецки // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – Гомель: БелГУТ, 2012. – Вып. 4. – С. 183–197.

*M. CHALECKI*

## THE ALGORITHM FOR CALCULATION OF DISPLACEMENTS IN FLAT FRAME CONSTRUCTIONS

The paper presents the algorithm for calculation of the nodes movement (vertical and horizontal, in the global and local coordinate systems) and angular displacements of rods in flat rod constructions (frames and trusses). The calculation of such movements is necessary for the structure stability and vibrations investigations, as well as for influence lines forming. The algorithm is presented in the MATHEMATICA environment as an example.

Получено 20.12.2012