

Решетневские чтения: материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева; в 2 ч. – СибГАУ: Красноярск, 2012. – Ч. 1. – С. 274–275.

A. N. MELKONJAN, L. P. NAZAROVA, N. A. SMIRNOV, E. N. FISENKO

THE KINEMATIC ANALYSIS OF PLANAR MECHANISMS PERFORMED BY ANALYTICAL METHODS

There are considered the analytical methods of planar mechanism kinematic analysis, the algorithms and calculations order are also presented. On the slider-crank mechanism example the possibility of the Denavit-Hartenberg homogeneous coordinate transformation using is shown.

Получено 23.04.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

УДК 531

Е. А. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА, Н. Е. МИСЮРА

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

СОВРЕМЕННЫЕ ЛЕКЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рассматриваются примеры механизмов, использование которых на лекциях по теоретической механике позволяет повысить качество усвоения учебного материала. Приводится решение некоторых задач кинематики и динамики таких механизмов.

То, что современные методы обучения еще не задушили естественное любопытство и желание задавать вопросы, почти чудо.

А. Эйнштейн

Вопрос о необходимости лекции как элемента учебного процесса в высшей школе поднимал еще в позапрошлом веке Лев Николаевич Толстой [1]. Считаю возможным процитировать выдержки из его статьи, опубликованной в журнале «Ясная Поляна» в 1862 году: «...Посмотрим теперь на практику университетов. Из 50 студентов, составляющих аудиторию, десять человек на первых двух лавках имеют тетрадки и записывают; из этих десяти шесть записывают для того, чтобы понравиться профессору, из выработанного школой и гимназией прислужничества, еще четверо записывают с искренним желанием записывать весь курс, но на четвертой лекции бросают (...). Весьма трудно не пропустить ни одной лекции. В математическом

предмете, да и во всяком другом, пропущена одна лекция – и связь потеряна. Студент справляется с руководством, и ему естественно приходит простая мысль – не нести бесполезную работу записывания лекций, когда то же самое можно сделать по руководству или чужим запискам. В математическом и всяком другом предмете, что должен знать каждый учитель, постоянно следить за выводами и доказательствами учителя не в состоянии ни один ученик, как бы учитель ни старался быть подробен, ясен и увлекателен».

К счастью, современные образовательные стратегии, ориентированные в том числе и на дистанционное обучение, в качестве одной из основных форм передачи учебной информации по-прежнему рассматривают лекцию, коэффициент полезного действия которой прямо пропорционален активности слушателей. Динамизм научно-технического развития, с одной стороны, и устойчивая тенденция сокращения учебных часов, с другой стороны, заставляют в настоящее время увеличивать информативную емкость лекционного материала. Независимо от содержательного наполнения лекции предъявление учебной информации, как правило, завершается примером использования определенной системы теоретических положений и знаний, полученных во время лекции, при решении конкретных задач. Это может быть подробный, расточительный по времени и громоздкий вычислительный шаблон некоего алгоритма, который студенты затем должны механически наполнить индивидуальными данными, а может быть и рождающееся на их глазах маленькое запоминающееся открытие. Это совершаемое при их участии открытие, предваренное ясной постановкой задачи, увязанное в средствах реализации со смежными дисциплинами и неожиданным, неочевидным, но ярким результатом, послужит закреплению теоретической части курса и станет побудительным мотивом к более осознанной и вдумчивой самостоятельной работе.

Появление специализированных аудиторий, оснащенных компьютерной техникой и доступом в Интернет, позволяет включить слушателей непосредственно в процесс математического моделирования тех или иных реальных явлений, а не предлагать им готовые модели.

В лекционной практике одного из авторов (Митюшова Е. А.) большой интерес аудитории вызвали следующие примеры, имеющие отношение к традиционной теме курса теоретической механики «Плоскопараллельное движение твердого тела».

Задача о мобильном роботе 1. Мобильный робот-тележка (рисунки 1, 2) осуществляет криволинейное движение за счет разности угловых скоростей ведущих колес, которые вращаются при помощи моторов-редукторов (рисунков 2). Определить радиус круговой траектории средней точки оси тележки, если заданы угловые скорости ведущих колес мобильного робота ω_1 и ω_2 , а также расстояние между колесами w .

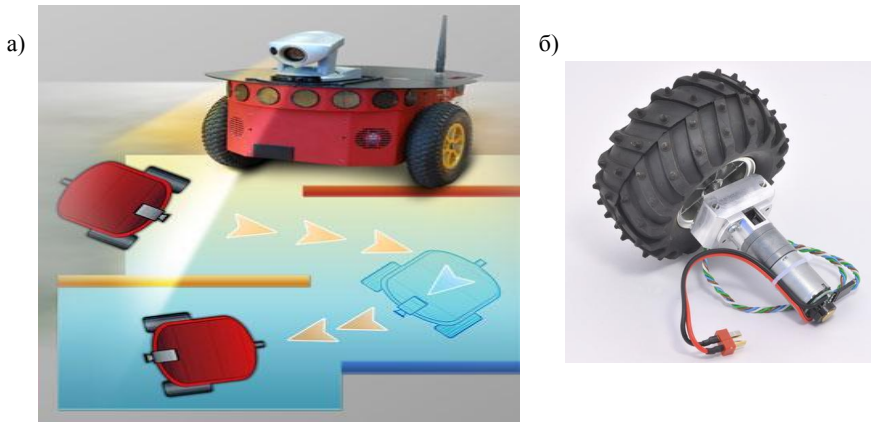


Рисунок 1 – Исследовательский мобильный робот P3-DX компании MobileRobots:
a – общий вид; *б* – колесо с мотором-редуктором

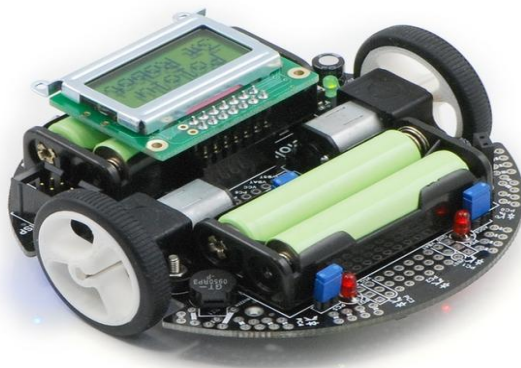


Рисунок 2 – Любительский робот Pololu 3pi. Производитель Pololu Robotics and Amherst, USA. Electronics, Las Vegas, USA

Рассмотрим следующую кинематическую схему робота-тележки (рисунок 3). Ось тележки совершает плоское движение. Угловая скорость и скорость точки C могут быть найдены из соотношений

$$\omega = \frac{v_C}{CO} = \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{w}, \quad v_C = \frac{v_{C_2} + v_{C_1}}{2}. \quad (1)$$

Скорости центров колес связаны с угловыми скоростями их вращения равенствами

$$\omega_1 = \frac{v_{C_1}}{r}, \quad \omega_2 = \frac{v_{C_2}}{r}. \quad (2)$$

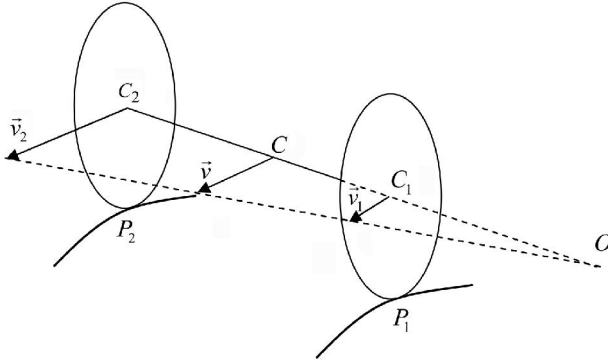


Рисунок 3 – Кинематическая схема робота-тележки

Из равенств (1) и (2) находим радиус круговой траектории движения робота

$$CO = \frac{v_C}{\omega} = \frac{w(v_{C_2} + v_{C_1})}{2(v_{C_2} - v_{C_1})} = \frac{w(\omega_2 + \omega_1)}{2(\omega_2 - \omega_1)}. \quad (3)$$

Задача о мобильном роботе 2. Для мобильного робота из задачи 1 при известных радиусах ведущих колес r и расстоянию между ними найти угловые скорости вращения колес, обеспечивающие его движение по заданной траектории с заданной постоянной скоростью. Под траекторией и скоростью робота понимаются траектория и скорость средней точки оси ведущих колес.

Математикам известно, что для произвольной гладкой функции $f(s)$ существует кривая γ , единственная с точностью до ориентации ее на плоскости, параметризованная натуральным параметром s , такая что

$$f(s) = k(s)$$

во всех точках кривой. Здесь величина $k(s)$ — ориентированная кривизна кривой γ .

Так как угловая скорость робота определяется равенством $\omega = \dot{\psi}$, где ψ — угол поворота касательной к траектории движения робота, то

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_C k(s).$$

Принимая во внимание равенства (1)–(3), находим

$$v_C k(s) = \frac{(\omega_2 - \omega_1)r}{w},$$

$$v_C = \frac{(\omega_2 + \omega_1)r}{2}.$$

Иначе

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{v_C k(s) w}{r},$$

$$\omega_2 + \omega_1 = \frac{2v_C}{r}.$$

Откуда

$$\omega_1 = \frac{v_C}{r} - \frac{v_C k(s) w}{2r},$$

$$\omega_2 = \frac{v_C}{r} + \frac{v_C k(s) w}{2r}. \quad (4)$$

Задача о мобильном роботе 3. В условиях задач 1 и 2 найти закон управления роботом в виде закона изменения угловых скоростей его колес при движении с постоянной скоростью $v_C = 9$ см/с, если радиусы колес $r = 3$ см, расстояние между ними $w = 9$ см, а траектория движения (рисунок 4) задана натуральным уравнением

$$k(s) = \frac{\pi}{2} \cos(s) \frac{1}{\text{см}}.$$

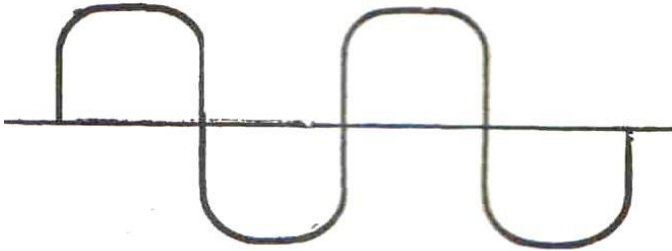


Рисунок 4 – Узорная кривая $k(s) = \frac{\pi}{2} \cos(s)$.

При равномерном движении дуговая координата изменяется согласно закону

$$s = v_C t.$$

Находя кривизну траектории как функцию времени и подставляя эту функцию в равенства (4), находим

$$\omega_1 = \frac{v_C}{r} - \frac{\pi v_C w \cos v_C t}{4r},$$

$$\omega_2 = \frac{v_C}{r} + \frac{\pi v_C w \cos v_C t}{4r}.$$

Окончательно

$$\omega_1 = 3 - 21,2 \cos 9t \frac{1}{c},$$
$$\omega_2 = 3 + 21,2 \cos 9t \frac{1}{c}.$$

В творческой лаборатории лектора могут быть не только профессионально-ориентированные примеры. Заораживающие движения монет в Spiral Washing Well [2] и диска Эйлера [3], несмотря на сложность их полного математического описания, при внимательном рассмотрении основных эффектов доступны объяснению и не специалистам. Знаний по механике, полученных в школе, а также в вузовских курсах физики и теоретической механики для этого вполне достаточно. В обоих движениях удивляет их длительность, при постоянно увеличивающейся скорости, и мгновенная остановка диска во втором примере при занятии им горизонтального положения. Рассмотрим эти движения при некоторых упрощающих допущениях.

Опыт и интуиция наблюдателя, основной источник «модельного бизнеса», подсказывают, что характерное движение монет в воронке будет присуще и шарикам, если ими заменить монеты, а также материальным точкам, движущимся по гладкой поверхности той же формы. Именно форма воронки (рисунок 5) определяет движение тел, о которой, несмотря на пространственные рассуждения и графики, ни на сайте изобретателя Стевана Дивника [4], ни в его патенте [5] ничего не говорится – Now how!

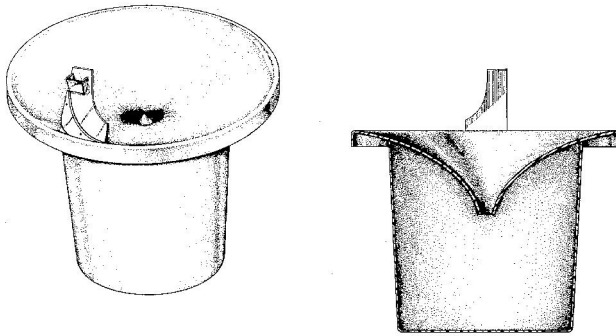


Рисунок 5 – Модель воронки

Определившись с физической моделью (в дальнейшем рассматриваем движения материальной точки по гладкой поверхности), построим математическую модель ее движения для определения формы воронки. Т.е. найдем такую поверхность вращения, двигаясь по которой с постоянной заданной скоростью, материальная точка во все время движения оставалась бы на

одном уровне. В реальном аттракционе скорость монете сообщается путем ее запуска со специальной разгонной площадки – пандуса, а диссипативные силы (головные боли любого «модельера») приводят к медленному вертикальному движению монеты.

Рассматривая движение материальной точки на поверхности вращения в цилиндрической системе координат, ось Oz которой вертикальна, запишем уравнения ее движения в проекциях на естественные оси

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\tau}}{dt} &= 0, \\ m \frac{v_{\tau}^2}{r} &= N \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0^2}{r} = g \operatorname{tg} \vartheta, \\ 0 &= N \cos \vartheta - mg, \end{aligned}$$

где N – нормальная реакция гладкой поверхности, ϑ – угол между направлением реакции и осью Oz .

Так как $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dz}{dr}$, то уравнение образующей поверхности вращения находится путем интегрирования следующего уравнения:

$$\frac{v_0^2 dr}{r} = g dz.$$

Откуда

$$z = \frac{v_0^2}{g} \ln \frac{r}{r_B}.$$

Параметрами воронки являются начальная скорость, определяемая высотой пандуса, максимальный радиус воронки r_0 и радиус выходного r_B отверстия, который связан с высотой воронки h соотношением:

$$h = \frac{v_0^2}{g} \ln \frac{r_0}{r_B}.$$

Движение тяжелой точки по заданной поверхности вращения рассматривалось П. Аппелем [6], но требуемая из условий движения форма поверхности не определялась.

Подобные примеры не только вызывают интерес и любопытство (что само по себе уже неплохо) но и, как показали контрольно-оценочные процедуры, увеличивают процент сохранения информации в долговременной памяти. Действительно, при восприятии таких примеров включаются все виды памяти – зрительная, слуховая, логическая и даже, быть может, эмоциональная. Кроме того, включение в лекцию рассмотренных демонстраций позволяют формировать у студентов так называемое подвижное мышление.

Естественно, подбор и структурирование учебного материала такого рода требуют широкого кругозора и готовности к новизне от преподавателей. Необходимость быстрого ориентирования во все возрастающих потоках информации требуется не только обучающимся, но и обучающим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Толстой, Л. Н. Воспитание и образование / Л.Н. Толстой // Собрание сочинений в 22 томах. – М.: Худ. лит-ра, 1978–1985. – Т. 16. – С. 29–66.

2 **Spiral Wishing Well in Japan** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=rfNpirPTYzU#. – Дата доступа: 10.06.2013.

3 **Euler's Disk** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?%20feature=player_embedded&v=ug2bKCG4gZY#. – Дата доступа: 10.06.2013.

4 **Spiral Wishing Well Coin Funnels** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.spiralwishingwells.com>. – Дата доступа: 10.06.2013.

5 **Coin Collector**: Pat. № 289218 USA; US Cl. D99/34; D21/8; D99/35 / S. M. Divnick. – Filed 22.01.1986; Date of Patent 7.04.1987. – 7 p.

6 **Апель, П.** Теоретическая механика / П. Апель. – М.: ФМ, 1960. – Т. I. – 515 с.

E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA, N. E. MISYURA

MODERN LECTURE EXAMPLES IN THE THEORETICAL MECHANICS COURSE

There are considered the examples of mechanisms which can be presented at the lectures on theoretical mechanics and they allow to increase the quality of educational material understanding. Several examples of problems on statics and kinematics of these mechanisms are presented.

Получено 16.06.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

УДК 534.014

С. І. РУСАН¹, С. С. РУСАН²

¹ *Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Беларусь*

² *Івана-Франкоўскі нацыянальны тэхнічны ўніверсітэт нафты і газа,
Україна*

МЕТОДЫКА ПРЫМЯНЕННЯ МЕТАДА ЖУКОЎСКАГА Ў СІЛАВЫМ АНАЛІЗЕ КІНЕМАТЫЧНЫХ ПАР

Разглядаецца пытанне пра ўдасканаленне сілавога аналізу плоскіх рычажных механізмаў з найніжкімі кінематычнымі парамі. Паказана, што графічны метада Жукоўскага, які звычайна выкарыстоўваецца для вызначэння вонкавых сіл, можна ўжываць і для знаходжання ўнутраных сіл узаемадзеяння, якія ўзнікаюць у кінематычных парах. Апісана метадыка сілавога аналізу і прыведзены лікавы прыклад.