

3 Григорьян, А. Т. История механики с конца XVIII века до середины XX века / А. Т. Григорьян, И. Б. Погребысский. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

4 Веселовский, И. Н. Очерки по истории теоретической механики / И. Н. Веселовский. – М.: Высш. шк., 1974. – 288 с.

5 Меркин, Д. Р. Краткая история классической механики / Д. Р. Меркин. – М.: Физ.-мат. лит., 1994. – 160 с.

6 Тюлина, И. А. История механики / И. А. Тюлина, В. Н. Чиненова. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 256 с.

*I. E. LOPATUKHINA*

## **TEACHING OF COURSE ON “THE HISTORY OF MECHANICS AND APPLIED MATHEMATICS” ON MATHEMATICAL-MECHANICAL FACULTY OF SANKT-PETERSBOURG STATE UNIVERSITY**

The information on the content of the course on the history of mechanics and applied mechanics, some of the brief work topics, summaries of some lecture topics are presented in the article.

Получено 02.10.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

---

УДК 621.01

*А. Н. МЕЛКОНЯН, Л. П. НАЗАРОВА, Н. А. СМИРНОВ, Е. Н. ФИСЕНКО*  
*Сибирский государственный аэрокосмический университет*  
*им. акад. М. Ф. Решетнёва, Красноярск, Россия*

## **КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

Рассмотрены аналитические методы выполнения кинематического анализа плоского механизма, приведены алгоритмы и порядок вычислений. На примере кривошипно-ползунного механизма показана возможность применения однородного преобразования координат Денавита-Хартенберга.

При проектировании механизма необходимо выполнить структурный, кинематический и силовой анализ. Конечной целью такого анализа является определение полезных моментов и (или) сил, которые необходимо приложить к ведущим звеньям для преодоления известных сил и (или) моментов полезного сопротивления, приложенных к выходным звеньям. Решение этой задачи позволяет рассчитать мощность на ведущих звеньях. Иными словами – выбрать двигатель и, при необходимости, привод, который сможет обеспечить работоспособность механизма.

При анализе сил, действующих на механизм, для каждой группы Ассура, начиная с группы, которая присоединена к ведущему звену, записываются

уравнения кинестатики. Записать такие уравнения можно только для замкнутой системы сил, которые получаются, следуя принципу Даламбера, приложением к системе внешних сил, действующих на группу звеньев и сил инерции звеньев, входящих в эту группу. И если внешние силы, как правило, известны либо легко определяются из условий статического равновесия, то для определения сил инерции необходимо знать скорости и ускорения точек каждого звена в любой момент времени. Эту задачу призван решить кинематический анализ механизма [1].

Для выполнения кинематического анализа механизма используются разные методы: графические методы построения диаграмм перемещения конкретного звена с дальнейшим графическим дифференцированием, графоаналитические методы (метод планов, метод определения мгновенных центров скоростей и ускорений) и аналитический метод, более сложный, чем предыдущие, но и более точный. Графические и графоаналитические методы основаны на прямых измерениях по масштабным схемам, и, естественно, содержат погрешность, с ними связанную. Таким образом, графические и графоаналитические методы подходят только для приближенных расчетов, если не требуется высокая точность вычислений.

Рассмотрим аналитический метод кинематического анализа плоского механизма. Общая постановка задачи выглядит следующим образом. Пусть дан плоский механизм, состоящий из  $n$  звеньев, длины которых  $l_i$ ,  $i = 1, n$  известны. Все звенья, включая стойку, соединены между собой при помощи  $m$  кинематических пар. Необходимо определить скорости  $v_k$  и ускорения  $a_k$ ,  $k = 1, m$  каждой кинематической пары в любой момент времени.

Аналитическое решение можно получить по крайней мере двумя способами: рассматривая геометрические соотношения в механизме и используя метод преобразования координат [2]. Естественно, результат должен быть одинаков при любом решении.

В качестве примера рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рисунок 1), состоящий из стойки и трех подвижных звеньев: 1 – ведущее звено, кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун, перемещающийся по направляющей (стойке). Закон движения ведущего звена известен и определен изменением угла  $\varphi$ .

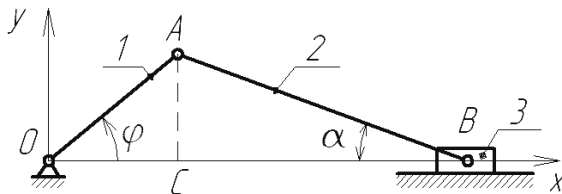


Рисунок 1 – Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма

Выберем правую систему координат  $XYZ$ . При рассмотрении плоского механизма ограничимся системой  $XOY$ . В данном случае  $z_B = 0, y_B = 0$ . Определим закон изменения  $x_B$ , координаты точки  $B$ .

Опустим перпендикуляр  $AC$  из точки  $A$  и обозначим угол  $\alpha$  – угол между шатуном и направляющей (см. рисунок 1). Тогда

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi + l_{AB} \sin \alpha. \quad (1)$$

Найдем зависимость между углами  $\varphi$  и  $\alpha$ .  $AC = l_{OA} \sin \varphi = l_{AB} \sin \alpha$ , и

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \sin \varphi\right). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) с учетом, что  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , получим точное решение:

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi + l_{AB} \sqrt{1 - \frac{l_{OA}^2}{l_{AB}^2} \sin^2 \varphi}. \quad (3)$$

График изменения координаты  $x_B$  при  $l_{OA} = 0,1$  м и  $l_{AB} = 0,4$  м приведен на рисунке 2.

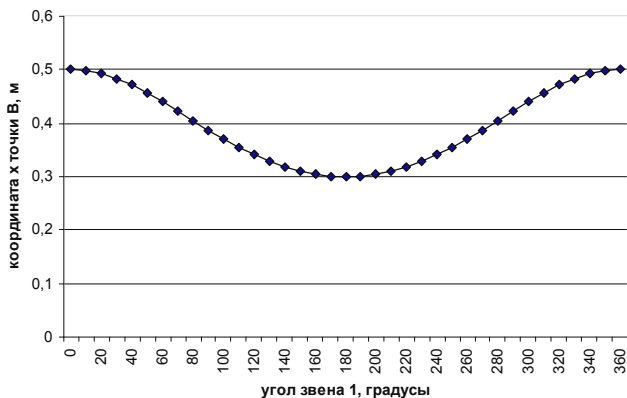


Рисунок 2 – График изменения координаты выходного звена в зависимости от угла поворота ведущего звена

Соотношение между углами  $\varphi$  и  $\alpha$  можно найти другим способом. Обычно при исследовании стержневых механизмов используют углы между звеньями. В механике принято положительным направлением считать направление отсчета угла против часовой стрелки. Для рассматриваемой задачи обозначим угол между звеном 2 и звеном 1 –  $\varphi_2$  (рисунок 3). Тогда можно записать:

$$\alpha = 2\pi - (\varphi + \varphi_2). \quad (4)$$

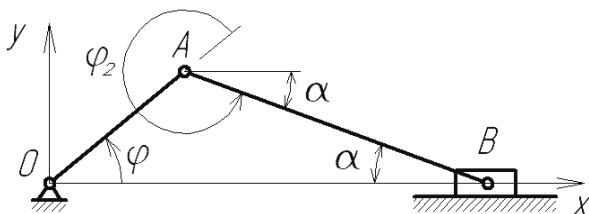


Рисунок 3 – Схема механизма для определения углов между звеньями

Подставим (4) в (1) и после преобразований получим

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi + l_{AB} \cos (\varphi + \varphi_2). \quad (5)$$

С учетом (2)

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi - \arcsin\left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \sin \varphi\right).$$

Если исследуемый механизм будет содержать большее количество звеньев, такой метод потребует длительных вычислений и преобразований.

Вспользуемся для решения данной задачи методом однородных преобразований координат Денавита-Хартенберга [2], который заключается в последовательном переходе от специальной системы координат, связанной с выходным звеном к предыдущей специальной системе координат, связанной со звеном, присоединенным к выходному, и так далее до базовой системы координат. В процессе такого перехода определяются обобщенные координаты выходного звена относительно специальных систем координат, не связанных непосредственно с самим выходным звеном. При этом каждой кинематической паре соответствует матрица перехода, отражающее преобразование движения, реализуемое этой парой. Общая методика решения задачи рассмотрена в [3].

Введем базовую систему координат, связанную со стойкой  $X^0 = (x_0; y_0)$ . Кроме того, поставим в соответствие каждому звену специальную систему координат  $X^i = (x_i; y_i)$ .

Матрица перехода от  $i$ -системы координат к  $i-1$ -системе имеет вид

$$T_{(i-1)i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 & l_i \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & l_i \sin \varphi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от специальной  $k$ -системы координат к базовой определится как произведение всех матриц перехода от первого звена до  $k$ -звена.

$$T_{0k} = \prod_{i=1}^k \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 & l_i \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & l_i \sin \varphi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последний вектор-столбец матрицы  $T_{0k}$  и определит координаты кинематической пары  $m$  относительно базовой системы координат

$$(a_{14})_{0k} = x_k = f_1(\varphi), \quad (a_{24})_{0k} = y_k = f_2(\varphi);$$

Тогда проекции скорости и ускорения этой кинематической пары на соответствующие оси

$$v_k^x = \frac{dx_k}{dt}, \quad v_k^y = \frac{dy_k}{dt};$$

$$a_k^x = \frac{dv_k^x}{dt} = \frac{d^2 x_k}{dt^2}, \quad a_k^y = \frac{dv_k^y}{dt} = \frac{d^2 y_k}{dt^2}.$$

Располагаем начало базовой системы координат  $X^0 = (x_0; y_0)$  в точке  $O$  (рисунок 4). С первым звеном свяжем систему координат  $X^1 = (x_1; y_1)$  с началом в точке  $A$ , при этом ось  $x_1$  направлена вдоль звена 1. Система координат относительно базовой повернута на угол  $\varphi$ . Для второго звена начало координат помещаем в точку  $B$ , ось  $x_2$  направляем вдоль звена 2. Эта система координат относительно предыдущей повернута на угол  $\varphi_2$ .

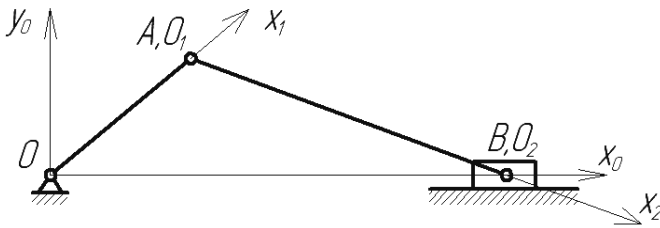


Рисунок 4 – Схема назначения связанных со звеньями систем координат

Составим матрицы перехода между системами координат  $X_1$ ,  $X_0$  и  $X_2$ ,  $X_1$

$$T_{01} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & l_{OA} \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & l_{OA} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & l_{AB} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & l_{AB} \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результирующая матрица  $T_{02} = T_{01} T_{12}$ .

После перемножения матриц, упрощения и приведения выражений с учетом (2) и (4) получим в результате координаты точки  $B$ :

$$x_B = l_{OA} \cos \varphi + l_{AB} \cos (\varphi + \varphi_2),$$

$$y_B = l_{OA} \sin \varphi + l_{AB} \sin (\varphi + \varphi_2),$$

$$z_B = 0.$$

Видно, что полученные выражения совпадают с начальными условиями и с предыдущим решением (5). Однако данное решение содержит функцию координаты  $y_B$ , но для рассматриваемого механизма численно эта величина равна нулю при любых значениях угла  $\varphi$ . Для другого механизма и иных исходных данных величины  $y_B$  могут быть значимыми.

Далее можно найти законы изменения скорости и ускорения точки  $B$ , продифференцировав полученный закон изменения координаты  $x$  точки  $B$ .

Рассмотренные аналитические методы кинематического анализа механизмов можно применять к механизмам любой сложности с замкнутыми и незамкнутыми кинематическими цепями. С увеличением сложности механизма будет возрастать объем вычислительных операций, но будет получено точное решение в виде непрерывных функций для определения координат любых точек механизма, а затем, скоростей и ускорений. Это очень важно при проектировании современных приводов с шаговыми двигателями, сервоприводов и систем управления к ним. Несложные алгоритмы расчета кинематических параметров реализуются в распространенных программных средах и приложениях типа MS Excel, Maple, MathCAD и др. Такие алгоритмы можно адаптировать для учебного процесса при изучении курсов теоретической механики, теории механизмов и машин, робототехники, систем автоматического регулирования электроприводов, а также для инженерных расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Смелягин, А. И.** Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование : учеб. пособие / А. И. Смелягин. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 263 с.
- 2 **Воробьев, Е. И.** Механика промышленных роботов. В 3 кн. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
- 3 **Смирнов, П. Н.** Методы однородного преобразования координат при выполнении кинематического анализа плоского механизма / П. Н. Смирнов, Н. А. Смирнов //

Решетневские чтения: материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева; в 2 ч. – СибГАУ: Красноярск, 2012. – Ч. 1. – С. 274–275.

*A. N. MELKONJAN, L. P. NAZAROVA, N. A. SMIRNOV, E. N. FISENKO*

## **THE KINEMATIC ANALYSIS OF PLANAR MECHANISMS PERFORMED BY ANALYTICAL METHODS**

There are considered the analytical methods of planar mechanism kinematic analysis, the algorithms and calculations order are also presented. On the slider-crank mechanism example the possibility of the Denavit-Hartenberg homogeneous coordinate transformation using is shown.

Получено 23.04.2013

---

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

---

УДК 531

*Е. А. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА, Н. Е. МИСЮРА*

*Уральский федеральный университет имени первого Президента России*

*Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*

## **СОВРЕМЕННЫЕ ЛЕКЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Рассматриваются примеры механизмов, использование которых на лекциях по теоретической механике позволяет повысить качество усвоения учебного материала. Приводится решение некоторых задач кинематики и динамики таких механизмов.

То, что современные методы обучения еще не задушили естественное любопытство и желание задавать вопросы, почти чудо.

А. Эйнштейн

Вопрос о необходимости лекции как элемента учебного процесса в высшей школе поднимал еще в позапрошлом веке Лев Николаевич Толстой [1]. Считаю возможным процитировать выдержки из его статьи, опубликованной в журнале «Ясная Поляна» в 1862 году: «...Посмотрим теперь на практику университетов. Из 50 студентов, составляющих аудиторию, десять человек на первых двух лавках имеют тетрадки и записывают; из этих десяти шесть записывают для того, чтобы понравиться профессору, из выработанного школой и гимназией прислужничества, еще четверо записывают с искренним желанием записывать весь курс, но на четвертой лекции бросают (...). Весьма трудно не пропустить ни одной лекции. В математическом